

Тема II: Многочлены

§ 5. Отделение кратных множителей

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

По теореме о разложении многочлена на неприводимые множители произвольный многочлен f положительной степени над полем F однозначно представим в виде

$$f = \alpha p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m},$$

Здесь p_1, p_2, \dots, p_m – попарно различные неприводимые над F унитарные многочлены, $k_1, k_2, \dots, k_m \in \mathbb{N}$, а $\alpha \in F$.

Многочлены p_1, p_2, \dots, p_m называются **неприводимыми множителями** многочлена f , а число k_i (где $1 \leq i \leq m$) – **кратностью** неприводимого множителя p_i . Множители p_i , для которых $k_i > 1$, называют **кратными**.

Разложить многочлен в произведение неприводимых – трудная задача. Однако оказывается, что довольно просто **отделить кратные множители**, т.е. найти многочлен

$$g = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \cdots p_m^{k_m-1}.$$

Здесь мы считаем, что $p_i^0 = 1$, т.е. в разложении g участвуют в точности кратные множители многочлена f .

Пусть F – произвольное поле, $x \in F$, а n – натуральное число.

Положим $nx := \underbrace{x + x + \cdots + x}_{n \text{ раз}}$. Если существует натуральное число n

такое, что $nx = 0$ для всякого $x \in F$, то минимальное n с таким свойством называется **характеристикой** поля F ; если такого n не существует, то характеристика поля F полагается равной 0.

Характеристика поля F обозначается через $\text{char } F$.

Примеры: $\text{char } \mathbb{Q} = \text{char } \mathbb{R} = \text{char } \mathbb{C} = 0$, а $\text{char } \mathbb{F}_p = p$.

Нетрудно доказать, что характеристика всякого поля равна либо нулю, либо простому числу (*упражнение*).

Решение: Пусть $\text{char } F = n$. Имеем $n > 1$, поскольку в поле $1 \neq 0$. Возьмем простой делитель p числа n . Тогда $n = pk$ для некоторого $k < n$ и

$$0 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ раз}} = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{p \text{ раз}} \cdot \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{k \text{ раз}}.$$

В поле нет делителей нуля, поэтому один из сомножителей равен 0.

Второй сомножитель не равен 0, так как $k < n$, а n – минимальное число с тем свойством, что $\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ раз}} = 0$. Значит, первый сомножитель

равен 0, и из минимальности n следует, что $n = p$. □

Определение

Пусть $f(x) = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1} x^{n-1} + \dots + \alpha_0$ – многочлен над кольцом R . Если $n > 0$, то *производной* многочлена $f(x)$ называется многочлен $n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1} x^{n-2} + \dots + \alpha_1$, обозначаемый через $f'(x)$. Если $n = 0$, то по определению $f'(x) = 0$.

Для многочленов над полем \mathbb{R} производная многочлена в нашем смысле совпадает с производной многочлена как функции от одной переменной в смысле математического анализа.

Степень производной многочлена степени n не обязательно равна $n - 1$. Например, для многочлена $f(x) = x^p$ над полем \mathbb{F}_p имеем $f'(x) = px^{p-1} = 0$, поскольку $\text{char } \mathbb{F}_p = p$.

Замечания:

- а) для любого многочлена f над любым кольцом R выполнено неравенство $\deg f' \leq \deg f - 1$,
- б) если f – многочлен степени > 0 над полем характеристики 0, то $\deg f' = \deg f - 1$.

Лемма о свойствах производной

Если $f(x)$ и $g(x)$ — многочлены над кольцом R , $\alpha \in R$, а $m \in \mathbb{N}$, то:

- 1) $(\alpha f)' = \alpha f'$,
- 2) $(f + g)' = f' + g'$,
- 3) $(fg)' = f'g + fg'$,
- 4) $(f^m)' = mf^{m-1}f'$.

Доказательство. 1) и 2) непосредственно вытекают из определений.

3) В силу свойств 1) и 2) свойство 3) достаточно доказать в случае, когда $f(x) = x^n$, а $g(x) = x^m$ для некоторых n и m . В самом деле, в этом случае

$$\begin{aligned}(fg)' &= (x^{n+m})' = (n+m)x^{n+m-1}, \\ f'g &= nx^{n-1} \cdot x^m = nx^{n+m-1}, \quad \text{и} \\ fg' &= x^n \cdot mx^{m-1} = mx^{n+m-1}.\end{aligned}$$

Следовательно, $f'g + g'f = (n+m)x^{n+m-1} = (fg)'$.

4) выводится из 3) индукцией по m . □

Лемма о производной неприводимого многочлена

Если p – неприводимый многочлен и $p' \neq 0$, то $\text{НОД}(p, p') = 1$.

Доказательство. Положим $d = \text{НОД}(p, p')$. Тогда $p = dq$ и $p' = dr$ для некоторых многочленов q и r . Если $\deg q = 0$, то

$$\deg p = \deg dq = \deg d + \deg q = \deg d \leq \deg p \leq \deg p - 1.$$

Полученное противоречие показывает, что $\deg q \neq 0$, и потому $q \notin F$. Следовательно, $d \in F$. Раз $d \neq 0$, заключаем, что d ассоциирован с 1. \square

Замечание. Условие $p' \neq 0$ в формулировке леммы *существенно*. Приведем пример неприводимого многочлена p , для которого оно не выполняется. Рассмотрим поле $\mathbb{F}_2(y)$ рациональных функций от y над двухэлементным полем \mathbb{F}_2 . Многочлен $p(x) = x^2 + y$ неприводим над $\mathbb{F}_2(y)$ по обобщенному критерию Эйзенштейна. Однако $p'(x) = 2x = 0$, так как $\text{char } \mathbb{F}_2 = 2$.

Предложение о неприводимых множителях многочлена и его производной

Пусть F – поле характеристики 0, а p – неприводимый множитель кратности k многочлена $f \in F[x]$. Если $k = 1$, то p не делит f' . Если $k > 1$, то p является неприводимым множителем многочлена f' кратности $k - 1$.

Доказательство. Обозначим через g произведение всех неприводимых множителей многочлена f , отличных от p , и старшего коэффициента многочлена f . Тогда $f = p^k g$ и $p \nmid g$. Раз $\text{char } F = 0$, то $p' \neq 0$ и по лемме о производной неприводимого многочлена имеем $\text{НОД}(p, p') = 1$.

Из свойств взаимно простых многочленов заключаем, что p не делит $p'g$. Если $k = 1$, то $f = pg$, и потому $f' = (pg)' = p'g + pg'$. Если бы p делил f' , то p делил бы и $p'g = f' - pg'$. Итак, если $k = 1$, то p не делит f' . Пусть теперь $k > 1$. Тогда

$$f' = (p^k g)' = (p^k)'g + p^k g' = kp^{k-1} p'g + p^k g' = p^{k-1}(kp'g + pg').$$

Видно, что p^{k-1} делит f' . Осталось проверить, что p не делит $kp'g + pg'$. Предположим, что p делит $kp'g + pg'$. Тогда, очевидно, p делит и $kp'g$. Поскольку $\text{char } F = 0$, в F есть элемент α , обратный к $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{k \text{ раз}} \neq 0$.

Умножив $kp'g$ на α , получим, что p делит $p'g$, что невозможно. □

Пусть $f = \alpha p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_m^{k_m}$ — разложение на неприводимые множители многочлена f над полем F нулевой характеристики и $k = \max_i \{k_i\}$. Обозначим через d_j , $j = 1, 2, \dots, k$, произведение всех тех неприводимых множителей многочлена f , кратность которых равна j , т.е. $d_j := \prod_{k_i=j} p_i$. (Если множителей какой-то кратности j нет, полагаем $d_j := 1$.) Тогда

$$f = \alpha d_1 d_2^2 d_3^3 \cdots d_k^k,$$

поскольку неприводимые множители из d_1 входят в разложение f по одному разу, множители из d_1 — по два раза и т.д. Из предложения о неприводимых множителях многочлена и его производной вытекает, что

$$f_1 := \text{НОД}(f, f') = d_2 d_3^2 \cdots d_k^{k-1}.$$

Многочлен $g_1 := \frac{f}{\alpha f_1} = d_1 d_2 \cdots d_k = p_1 p_2 \cdots p_m$ есть произведение всех попарно различных неприводимых множителей f . Применяя эту же процедуру к многочлену f_1 , можно найти многочлены

$$f_2 := \text{НОД}(f_1, f_1') = d_3 \cdots d_k^{k-2} \quad \text{и} \quad g_2 := \frac{f_1}{f_2} = d_2 \cdots d_k.$$

Разделив g_1 на g_2 , найдем d_1 . Продолжая этот процесс, можно **отделить кратные множители** многочлена f , т.е. найти все многочлены d_2, \dots, d_k .

По следствию теоремы Безу α является корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $(x - \alpha) \mid f(x)$, т.е. когда двучлен $x - \alpha$ служит одним из неприводимых множителей многочлена $f(x)$.

Если $x - \alpha$ – множитель кратности $k > 1$ для $f(x)$, то α называют **кратным корнем**, а число k – **кратностью** этого корня.

Следствием проведенных выше рассмотрений является полезный факт:

Замечание (исключение кратных корней)

Пусть f – многочлен на поле характеристики 0. Многочлен $\frac{f}{\text{НОД}(f, f')}$ имеет те же корни, что и f , но не имеет кратных корней. В частности, если $\text{НОД}(f, f') = 1$, то сам многочлен f не имеет кратных корней.