Тема II. Линейные операторы

§ 7. Полярное разложение линейных операторов

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Постановка задачи

На прошлой лекции мы обсуждали два важных типа линейных операторов на пространстве со скалярным произведением: *изометрические* операторы и *самосопряженные* операторы.

Мы определяли через некоторые формальные условия, но из обсуждения стал ясен их содержательный геометрический смысл.

Изометрические операторы – это в точности движения, сохраняющие расстояния между точками. Они не меняют форму и размеры «твердых тел», а только поворачивают пространство вокруг начала координат или отражают его относительно каких-то подпространств.

Самосопряженные операторы – это растяжения/сжатия или проектирования вдоль каких-то взаимно перпендикулярных осей, возможно в сочетании с отражениями относительно подпространств.

Сегодня мы покажем, что произвольный линейный оператор на пространстве со скалярным произведением является произведением некоторого самосопряженного и некоторого изометрического операторов.

Итак, на пространстве со скалярным произведением любой линейный оператор сначала растягивает/сжимает или проектирует пространство вдоль взаимно перпендикулярных осей, а затем поворачивает его вокруг начала координат или отражает относительно какого-то подпространства.

Хотим представить оператор $\mathcal{A}$ в виде $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$, где $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}$, $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$.
Откуда взять такие операторы $\mathcal{B}$ и $\mathcal{U}$? Заметим, что $\mathcal{A}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{B}^* = \mathcal{U}^{-1}\mathcal{B}$.
Перемножая, получаем $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{B}\mathcal{U}\mathcal{U}^{-1}\mathcal{B} = \mathcal{B}^2$.
Итак, оператор $\mathcal{B}$ необходимо должен быть «квадратным корнем» из $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$.
Но мы не извлекали квадратные корни из операторов! Придется научиться.

Определение

Самосопряженный оператор $\mathcal{A}\colon V \to V$ называется *неотрицательным*, если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{x} \geq 0$ для любого вектора $\mathbf{x} \in V$. Если $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{x} > 0$ для любого ненулевого вектора $\mathbf{x} \in V$, оператор называется *положительным*.

$\nabla 1.$ *Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ неотрицательный.*

Доказательство. Имеем $(\mathcal{A}\mathcal{A}^*)^* = (\mathcal{A}^*)^*\mathcal{A}^* = \mathcal{A}\mathcal{A}^*$, поэтому $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ – самосопряженный оператор. Для любого вектора $\mathbf{x}$ имеем

$$((\mathcal{A}\mathcal{A}^*)\mathbf{x})\mathbf{x} = (\mathcal{A}^*(\mathcal{A}\mathbf{x}))\mathbf{x} = (\mathcal{A}\mathbf{x})(\mathcal{A}\mathbf{x}) \geq 0. \qquad \square$$

$\nabla 2.$ *Самосопряженный оператор неотрицателен тогда и только тогда, когда все его собственные значения неотрицательны.*

Доказательство. Необходимость. Пусть $\mathcal{A}$ – неотрицательный оператор, λ – его собственное значение, а $\mathbf{x}$ – собственный вектор, принадлежащий λ. Тогда $\lambda\mathbf{x}\mathbf{x} = (\lambda\mathbf{x})\mathbf{x} = (\mathcal{A}\mathbf{x})\mathbf{x} \geq 0$. Поскольку $\mathbf{x}\mathbf{x} > 0$, имеем $\lambda \geq 0$.

Достаточность. Пусть $\mathcal{A}$ – самосопряженный оператор, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – все его собственные значения, а $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ – ортонормированный базис из принадлежащих этим собственным значениям собственных векторов. Разложим произвольный вектор $\mathbf{x}$ по этому базису: $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n$. Тогда $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathbf{x} = (\mathcal{A}(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n))(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) =$ $(\lambda_1 x_1\mathbf{e}_1 + \dots + \lambda_n x_n\mathbf{e}_n)(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_n\mathbf{e}_n) = \lambda_1 x_1\overline{x_1} + \dots + \lambda_n x_n\overline{x_n} \geq 0.$ $\square$

$\nabla 3.$ *Неотрицательный оператор положителен тогда и только тогда, когда он невырожденный.*

Это сразу следует из доказательства $\nabla 2$, если учесть, что оператор невырожденный тогда и только тогда, когда все его собственные значения отличны от нуля (*объясните, почему*).

Теорема (существование и единственность квадратного корня)

Для любого неотрицательного оператора $\mathcal{A}$ существует единственный неотрицательный оператор $\mathcal{B}$ такой, что $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

Доказательство. Существование. Возьмем тот ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$, в котором оператор $\mathcal{A}$ имеет диагональную матрицу
$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$. Числа, стоящие на диагонали, суть собственные значения оператора $\mathcal{A}$, и по $\nabla 2$ все они неотрицательны. Оператор $\mathcal{B}$, имеющий в том же базисе матрицу $B := \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \sqrt{\lambda_n} \end{pmatrix}$, неотрицателен по $\nabla 2$. По построению имеем матричное равенство $B^2 = A$, откуда следует равенство операторов $\mathcal{B}^2 = \mathcal{A}$.

Единственность. Пусть $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ – все попарно различные собственные значения $\mathcal{A}$, т.е. $\lambda_1 = \dots = \lambda_{k_1} = \alpha_1$, $\lambda_{k_1+1} = \dots = \lambda_{k_2} = \alpha_2$, $\dots$, $\lambda_{k_{s-1}+1} = \dots = \lambda_n = \alpha_s$.

Тогда матрицу A можно представить как блочную матрицу
$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_1 & O & \dots & O \\ O & \alpha_2 E_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \alpha_s E_s \end{pmatrix}$, где $E_1, E_2, \dots, E_s$ – единичные матрицы размеров k_1, $k_2 - k_1$, $\dots n - k_{s-1}$, а через O обозначены нулевые блоки соответствующих размеров. Соответственно, матрица B имеет вид
$B = \begin{pmatrix} \sqrt{\alpha_1} E_1 & O & \dots & O \\ O & \sqrt{\alpha_2} E_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \sqrt{\alpha_s} E_s \end{pmatrix}$. Возьмем любой неотрицательный оператор $\mathcal{C}$ такой, что $\mathcal{C}^2 = \mathcal{A}$, и покажем, что $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. Пусть C – матрица оператора $\mathcal{C}$ в том же базисе; тогда $C^2 = A$. Разбив C на блоки тех же размеров, что и у матрицы A, запишем $C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1s} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2s} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{s1} & C_{s2} & \dots & C_{ss} \end{pmatrix}$. Тогда у матрицы AC блок в позиции (i, j) равен $\alpha_i C_{ij}$, а у матрицы CA в той же позиции стоит блок $C_{ij}\alpha_j = \alpha_j C_{ij}$. Поскольку $AC = C^3 = CA$, имеем $\alpha_i C_{ij} = \alpha_j C_{ij}$, т.е. $(\alpha_i - \alpha_j)C_{ij} = O$ для всех i, j, но при $i \neq j$ такое равенство возможно только, если $C_{ij} = O$.

Итак, C имеет вид $\begin{pmatrix} C_{11} & O & \dots & O \\ O & C_{22} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & C_{ss} \end{pmatrix}$. В частности, подпространство V_1, натянутое на вектора $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k_1}$, инвариантно относительно оператора $\mathcal{C}$. Заметим, что для любого вектора $\mathbf{x} = x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_{k_1}\mathbf{e}_{k_1} \in V_1$

$$\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{A}(x_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_{k_1}\mathbf{e}_{k_1}) = x_1\alpha_1\mathbf{e}_1 + \dots + x_{k_1}\alpha_1\mathbf{e}_{k_1} = \alpha_1\mathbf{x}.$$

Ограничение оператора $\mathcal{C}$ на подпространство V_1 – неотрицательный оператор с матрицей C_{11}. Выберем в V_1 ортонормированный базис $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{k_1}$ из собственных векторов этого оператора, принадлежащих собственным значениям $\gamma_1, \dots, \gamma_{k_1}$. Для каждого $j = 1, \dots, k_1$ имеем $\alpha_1\mathbf{f}_j = \mathcal{A}\mathbf{f}_j = \mathcal{C}^2\mathbf{f}_j = \mathcal{C}(\mathcal{C}\mathbf{f}_j) = \mathcal{C}(\gamma_j\mathbf{f}_j) = \gamma_j^2\mathbf{f}_j$. Отсюда $\gamma_j^2 = \alpha_1$, и так как $\gamma_j \geq 0$, имеем $\gamma_j = \sqrt{\alpha_1}$. Итак, $\gamma_1 = \dots = \gamma_{k_1} = \sqrt{\alpha_1}$. Вектора $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_{k_1}$ выражаются через $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{k_1}$, откуда $\mathcal{C}\mathbf{e}_i = \sqrt{\alpha_1}\mathbf{e}_i$ для всех $i = 1, \dots, k_1$. Блок $C_{11} = \sqrt{\alpha_1}E_1$ равен первому диагональному блоку матрицы B. Тот же аргумент работает для любого диагонального блока матрицы C, откуда $C = B$ и $\mathcal{C} = \mathcal{B}$. $\square$

Теорема (полярное разложение невырожденного оператора)

Для любого невырожденного линейного оператора $\mathcal{A}$ на унитарном (евклидовом) пространстве существует единственная пара операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{U}$ такая, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$, причем $\mathcal{B}$ – положительный оператор, а $\mathcal{U}$ – унитарный (ортогональный) оператор.

Доказательство. *Существование*. По $\nabla 1$ и $\nabla 3$ оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ положительный. Квадратный корень $\mathcal{B}$ из $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ также будет положительным оператором. Пусть $\mathcal{U} := \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$; тогда ясно, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$, и остается проверить, что $\mathcal{U}$ – унитарный (ортогональный) оператор. Действительно, $\mathcal{U}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{B}^{-1}$, так как $\mathcal{B}^{-1}$ – самосопряженный оператор и $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{A}^*\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{B}^{-1}\mathcal{B}^2\mathcal{B}^{-1} = \mathcal{E}$. Итак, $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$.

Единственность. Мы уже отмечали, что если $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$, где $\mathcal{B}$ – неотрицательный, а $\mathcal{U}$ – изометрический операторы, то $\mathcal{B}$ необходимо будет квадратным корнем из $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Если $\mathcal{B}$ – положительный оператор, то $\mathcal{U}$ однозначно определяется из равенства $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$ как $\mathcal{B}^{-1}\mathcal{A}$. $\square$

Следствие

Любая невырожденная матрица над полем $\mathbb{C}$ однозначно представима как произведение эрмитовой и унитарной матриц.

Используя те же рассуждения, можно разложить любой невырожденный линейный оператор в произведение изометрического и положительного:

Теорема (дуальный вариант полярного разложения)

Для любого невырожденного линейного оператора $\mathcal{A}$ на унитарном (евклидовом) пространстве существует единственная пара операторов $\mathcal{C}$ и $\mathcal{V}$ такая, что $\mathcal{A} = \mathcal{V}\mathcal{C}$, причем $\mathcal{C}$ – положительный оператор, а $\mathcal{V}$ – унитарный (ортогональный) оператор.

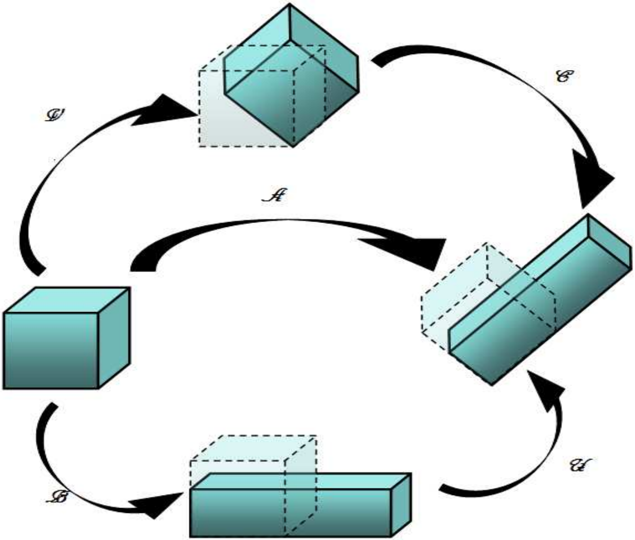
Докажите этот вариант самостоятельно. *Подсказка*: примените reverse engineering и поймите, какой оператор необходимо взять в роли $\mathcal{C}$.

Замечание 1. Из того, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U} = \mathcal{V}\mathcal{C}$, **не следует**, вообще говоря, что $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ и $\mathcal{U} = \mathcal{V}$.

Замечание 2. Полярное разложение невырожденного оператора напоминает представление ненулевого комплексного числа в тригонометрической форме – как произведение положительного действительного числа и комплексного числа с модулем 1.

Замечание 3. Полярное разложение раскрывает геометрический смысл произвольного невырожденного линейного преобразования.

Иллюстрация



Теорема (полярное разложение произвольного оператора)

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ на унитарном (евклидовом) пространстве существует пара операторов $\mathcal{B}$ и $\mathcal{U}$ такая, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$, где $\mathcal{B}$ – однозначно определяемый неотрицательный оператор, а $\mathcal{U}$ – унитарный (ортогональный) оператор.

Доказательство опирается на следующую лемму.

Лемма (о метрически равных операторах)

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы на пространстве V со скалярным произведением и $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathcal{B}\mathbf{x}\mathcal{B}\mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда существует изометрический оператор $\mathcal{U}$ такой, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$.

Вывод теоремы из леммы. По $\nabla 1$ оператор $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$ неотрицательный. Пусть $\mathcal{B}$ – квадратный корень из $\mathcal{A}\mathcal{A}^*$. Для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ имеем

$$\mathcal{A}\mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathbf{x}(\mathcal{A}^*(\mathcal{A}\mathbf{y})) = \mathbf{x}((\mathcal{A}\mathcal{A}^*)\mathbf{y}) = \mathbf{x}(\mathcal{B}^2\mathbf{y}) = \mathcal{B}\mathbf{x}\mathcal{B}\mathbf{y}.$$

По лемме $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$ для некоторого изометрического оператора $\mathcal{U}$. $\square$

Лемма (о метрически равных операторах)

Пусть $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ – линейные операторы на пространстве V со скалярным произведением и $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{y} = \mathcal{B}\mathbf{x}\mathcal{B}\mathbf{y}$ для всех $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V$. Тогда существует изометрический оператор $\mathcal{U}$ такой, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$.

Доказательство. Заметим, что из равенства $\mathcal{A}\mathbf{x}\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathcal{B}\mathbf{x}\mathcal{B}\mathbf{x}$ следует, что $\mathcal{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{B}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, т.е. $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}$. По теореме о сумме ранга и дефекта ранги $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ равны. Выберем в $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ некоторый ортонормированный базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$, где r – ранг $\mathcal{A}$. Пусть $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r \in V$ – какие-то вектора со свойством $\mathcal{A}\mathbf{h}_i = \mathbf{e}_i$ для каждого $i = 1, \dots, r$. Положим $\mathbf{f}_i := \mathcal{B}\mathbf{h}_i$; тогда $\mathbf{f}_i\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \begin{cases} 1 & \text{при } i = j, \\ 0 & \text{при } i \neq j. \end{cases}$

Поэтому вектора $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r$ образуют ортонормированный базис в $\operatorname{Im}\mathcal{B}$.

Выберем в ортогональном дополнении $(\operatorname{Im}\mathcal{A})^\perp$ подпространства $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ какой-то ортонормированный базис $\mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n$, а в ортогональном дополнении $(\operatorname{Im}\mathcal{B})^\perp$ – какой-то ортонормированный базис $\mathbf{f}_{r+1}, \dots, \mathbf{f}_n$.

Тогда $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r, \mathbf{e}_{r+1}, \dots, \mathbf{e}_n$ и $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_r, \mathbf{f}_{r+1}, \dots, \mathbf{f}_n$ – два ортонормированных базиса пространства V. Оператор $\mathcal{U}$, переводящий второй из них в первый, будет унитарным. Покажем, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$.

Напомним, что мы зафиксировали вектора $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ со свойством $\mathcal{A}\mathbf{h}_i = \mathbf{e}_i$ для каждого $i = 1, \dots, r$. Эти вектора линейно независимы, поскольку линейно независимы их образы $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_r$. Дополним систему $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r$ базисом $\operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}$ до базиса $\mathbf{h}_1, \dots, \mathbf{h}_r, \mathbf{h}_{r+1}, \dots, \mathbf{h}_n$ всего пространства V (это конструкция из доказательства теоремы о сумме ранга и дефекта). Разложим произвольный вектор $\mathbf{x} \in V$ по этому базису:

$$\mathbf{x} = x_1\mathbf{h}_1 + \cdots + x_r\mathbf{h}_r + x_{r+1}\mathbf{h}_{r+1} + \cdots + x_n\mathbf{h}_n$$

и подсчитаем $\mathcal{A}\mathbf{x}$ и $(\mathcal{B}\mathcal{U})\mathbf{x}$.

$$\begin{aligned}\mathcal{A}\mathbf{x} &= \mathcal{A}(x_1\mathbf{h}_1 + \cdots + x_n\mathbf{h}_n) = \text{ (так как } \mathbf{h}_{r+1}, \dots, \mathbf{h}_n \in \operatorname{Ker}\mathcal{A} = \operatorname{Ker}\mathcal{B}) \\ &= x_1\mathcal{A}\mathbf{h}_1 + \cdots + x_r\mathcal{A}\mathbf{h}_r = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_r\mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathcal{B}\mathcal{U})\mathbf{x} &= \mathcal{U}(\mathcal{B}\mathbf{x}) = \mathcal{U}(\mathcal{B}(x_1\mathbf{h}_1 + \cdots + x_n\mathbf{h}_n)) = \\ &= \mathcal{U}(x_1\mathcal{B}\mathbf{h}_1 + \cdots + x_r\mathcal{B}\mathbf{h}_r) = \mathcal{U}(x_1\mathbf{f}_1 + \cdots + x_r\mathbf{f}_r) = \\ &= x_1\mathcal{U}\mathbf{f}_1 + \cdots + x_r\mathcal{U}\mathbf{f}_r = x_1\mathbf{e}_1 + \cdots + x_r\mathbf{e}_r.\end{aligned}$$

Итак, $\mathcal{A}\mathbf{x} = (\mathcal{B}\mathcal{U})\mathbf{x}$ для любого $\mathbf{x} \in V$, т.е. $\mathcal{A} = \mathcal{B}\mathcal{U}$. $\square$