

Тема II. Линейные операторы

§ 6. Изометрические операторы. Самосопряженные операторы

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Определение

Линейный оператор $\mathcal{U}: V_1 \rightarrow V_2$ пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *изометрическим*, если он сохраняет скалярное произведение, т.е. $\forall x, y \in V_1 \quad \langle x, y \rangle = \langle \mathcal{U}x, \mathcal{U}y \rangle$.

Ясно, что изометрический оператор сохраняет длины векторов, т.е. является *движением* в смысле элементарной геометрии. Оказывается, верно и обратное:

Теорема (о движениях)

Если линейный оператор $\mathcal{U}: V_1 \rightarrow V_2$ пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ сохраняет длины векторов, он является изометрическим.

Благодаря теореме легко приводить примеры изометрических операторов – таковыми будут всевозможные повороты и симметрии.

Доказательство. Дано, что $xx = UxUx$ для любого $x \in V_1$. Тогда для любых $x, y \in V_1$ имеем $(x + y)(x + y) = U(x + y)U(x + y)$. Из свойств скалярного произведения и линейности оператора U заключаем, что

$$xx + xy + yx + yy = UxUx + UxUy + UyUx + UyUy.$$

Отсюда

$$xy + yx = UxUy + UyUx. \quad (1)$$

Если пространства V_1 и V_2 евклидовы, то из (1) сразу следует $xy = UxUy$. Если пространства V_1 и V_2 унитарны, подставим вместо x вектор ix :

$$ixy - iyx = iUxUy - iUyUx.$$

Сократив на i , получим

$$xy - yx = UxUy - UyUx. \quad (2)$$

Складывая (1) и (2) получаем $xy = UxUy$. □

Пусть $\mathcal{U}: V_1 \rightarrow V_2$ – изометрический оператор конечномерных пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Тогда для \mathcal{U} существует сопряженный оператор $\mathcal{U}^*: V_2 \rightarrow V_1$. Комбинируя определение изометрического оператора с ключевым свойством сопряженного оператора, получаем, что для всех $x, y \in V_1$

$$x\mathcal{U}y = x\mathcal{U}(\mathcal{U}y) = x\mathcal{U}^*(\mathcal{U}y) = x(\mathcal{U}\mathcal{U}^*)y.$$

Отсюда $y = (\mathcal{U}\mathcal{U}^*)y$ по ослабленному закону сокращения, т.е. $\mathcal{U}\mathcal{U}^*$ – тождественный оператор на пространстве V_1 .

Вопрос: Можно ли утверждать, что $\mathcal{U}^*\mathcal{U}$ – тождественный оператор на V_2 ?

Пусть теперь $V_1 = V_2 = V$. Тогда из равенства $\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{E}$ вытекает, что оператор \mathcal{U} обратим и $\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^{-1}$. Поскольку \mathcal{U} и \mathcal{U}^{-1} перестановочны, *каждый изометрический оператор на конечномерном пространстве со скалярным произведением нормален.*

Изометрические операторы на евклидовом пространстве называются *ортогональными*, а изометрические операторы на унитарном пространстве называются *унитарными*. Те же термины применяют к матрицам:

- матрица A над \mathbb{R} называется *ортогональной*, если $A^{-1} = A^T$;
- матрица A над \mathbb{C} называется *унитарной*, если $A^{-1} = A^*$.

∇1. *Изометрические операторы на данном пространстве образуют группу. Эта группа называется **унитарной** в случае унитарных пространств и **ортогональной** в случае евклидовых пространств.*

В соответствии с Эрлангенской программой Клейна ортогональная группа (**группа движений**) евклидова пространства задает евклидову геометрию; если пространство трехмерно, получаем «школьную» геометрию.

∇2. *Изометрические операторы переводят ортонормированные базисы в ортонормированные базисы. Обратное, если линейный оператор переводит хотя бы один ортонормированный базис в ортонормированный базис, то он изометрический.*

Доказательство. Прямое утверждение очевидно.

Пусть V – пространство со скалярным произведением размерности n и оператор $U: V \rightarrow V$ таков, что для какого-то ортонормированного базиса e_1, \dots, e_n (1) в V система векторов Ue_1, \dots, Ue_n (2) также образует ортонормированный базис в V . Выразим произвольный вектор $x \in V$ через базис (1): $x = x_1e_1 + \dots + x_n e_n$. Применив U , получим выражение вектора Ux через базис (2): $Ux = x_1Ue_1 + \dots + x_nUe_n$. Вычисляя x, x через координаты в базисе (1) и Ux, Ux через координаты в базисе (2), получим одно и то же выражение $x_1\overline{x_1} + \dots + x_n\overline{x_n}$. Итак, $x, x = Ux, Ux$, т.е. U сохраняет длины. Поэтому U – изометрический оператор. \square

На матричном языке $\nabla 2$ означает, что в унитарном (евклидовом) пространстве матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому будет унитарной (ортогональной).

$\nabla 3$. Собственные значения изометрического оператора по модулю равны 1.

Доказательство. Пусть \mathcal{U} – унитарный оператор, λ – его собственное значение, а x – собственный вектор, принадлежащий λ . Тогда

$$xx = \mathcal{U}x\mathcal{U}x = (\lambda x)(\lambda x) = \lambda\bar{\lambda}xx.$$

Отсюда $\lambda\bar{\lambda} = 1$, т.е. $|\lambda|^2 = 1$ и $|\lambda| = 1$.

Если \mathcal{U} – ортогональный оператор, то его комплексификация – унитарный оператор с той же матрицей и теми же собственными значениями. \square

Обратное утверждение к $\nabla 3$, вообще говоря, неверно. Например,

у матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ оба собственных значения равны 1, но A

не является ортогональной, так как $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \neq A^T$.

Мы вскоре увидим, что для нормальных операторов $\nabla 3$ обратимо.

Теорема (строение унитарного оператора)

Линейный оператор \mathcal{A} на унитарном пространстве V унитарен тогда и только тогда, когда в V существует ортонормированный базис, в котором матрица оператора \mathcal{A} диагональна, причем все диагональные элементы по модулю равны 1.

Доказательство. Необходимость получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на унитарном пространстве с [∇3](#).

Достаточность. Если матрица A оператора \mathcal{A} в каком-то ортонормированном базисе диагональна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора \mathcal{A}^* равна эрмитово сопряженной к A матрице $A^* = \overline{A^T}$ и, следовательно, тоже диагональна. Вычисляя произведение AA^* , получим диагональную матрицу, у которой на диагонали стоят произведения вида $\lambda\bar{\lambda}$, где λ – диагональный элемент матрицы A . Поскольку $|\lambda| = 1$, имеем $\lambda\bar{\lambda} = 1$, откуда $AA^* = E$. Итак, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$, т.е. \mathcal{A} – унитарный оператор. □

Следствие

Если все собственные значения нормального оператора на унитарном пространстве по модулю равны 1, то оператор унитарен.

Теорема (строение ортогонального оператора)

Линейный оператор A на евклидовом пространстве V ортогонален тогда и только тогда, когда в V есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора A блочно-диагональна с диагональными блоками либо размера 1 и вида ± 1 , либо размера 2 и вида $\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix}$.

Доказательство. Необходимость получается, если скомбинировать теорему о строении нормального оператора на евклидовом пространстве с [§3](#).

Достаточность. Для действительных матриц эрмитово сопряжение сводится к транспонированию. Легко проверяется, что каждый блок блочно-диагональной матрицы из формулировки теоремы при умножении на транспонированный блок дает единичную матрицу (*проверьте!*).
Значит, матрица оператора A ортогональна. □

Следствие

Если все собственные значения нормального оператора на евклидовом пространстве по модулю равны 1, то оператор ортогонален.

Следствие (теорема Шаля)

Любое движение трехмерного пространства есть комбинация параллельного переноса с одним из следующих движений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ – тождественное преобразование;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ – симметрия относительно плоскости;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ – симметрия относительно прямой;}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \text{ – симметрия относительно точки;}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ – поворот вокруг оси на угол } \varphi;$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \text{ – композиция поворота вокруг оси на угол } \varphi \text{ и симметрии.}$$

Определение

Линейный оператор \mathcal{A} на пространстве V со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ называется *самосопряженным*, если он равен своему сопряженному, т.е. если $\mathcal{A}x \cdot y = x \cdot \mathcal{A}y$ для любых $x, y \in V$.

Матрицы самосопряженных операторов в ортонормированных базисах равны своим эрмитово сопряженным. Действительные матрицы с таким свойством называются *симметрическими*, а комплексные – *эрмитовыми*.

∇4. *Собственные значения самосопряженного оператора действительны.*

Доказательство. Пусть \mathcal{A} – самосопряженный оператор на унитарном пространстве, λ – его собственное значение, а x – собственный вектор, принадлежащий λ . Тогда

$$\lambda x \cdot x = (\lambda x) \cdot x = (\mathcal{A}x) \cdot x = x \cdot (\mathcal{A}x) = x \cdot (\lambda x) = \bar{\lambda} x \cdot x.$$

Отсюда $\lambda = \bar{\lambda}$, т.е. λ – действительное число. Если \mathcal{U} – самосопряженный оператор на евклидовом пространстве, оператор, его комплексификация – самосопряженный оператор на унитарном пространстве с той же матрицей и теми же собственными значениями. \square

Теорема (строение самосопряженного оператора)

Линейный оператор A на пространстве V со скалярным произведением самосопряжен тогда и только тогда, когда в V есть ортонормированный базис, в котором матрица оператора A диагональна и действительна.

Доказательство. Необходимость. Самосопряженный оператор нормален. Остается применить теоремы о строении нормального оператора и $\nabla 4$.

Достаточность. Если матрица A оператора A в ортонормированном базисе диагональна и действительна, то в этом базисе матрица сопряженного оператора A^* тоже равна A . Значит, $A = A^*$. □

В качестве следствия отметим частичное обращение наблюдения $\nabla 4$:

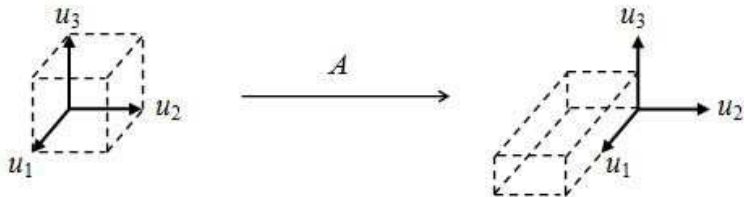
Следствие

Если все собственные значения нормального оператора действительны, то оператор самосопряжен.

Вопрос: Верно ли обращение наблюдения $\nabla 4$ в общем случае?

Геометрический смысл самосопряженного оператора довольно прост – это растяжение или сжатие вдоль нескольких взаимно перпендикулярных осей, возможно в сочетании с отражением.

На рисунке вектора ортонормированного базиса u_1, u_2, u_3 принадлежат собственным значениям 2, -1 и $\frac{1}{2}$.



В физике (квантовой механике) самосопряженные операторы – это *наблюдаемые*, а их собственные значения – это те результаты, которые могут быть зарегистрированы при наблюдении.

Переводя доказанные результаты на матричный язык и комбинируя их с теоремой о замене матрицы, получаем два важных следствия:

Следствие об эрмитовых матрицах

*Квадратная матрица A над полем \mathbb{C} эрмитова тогда и только тогда, когда существуют унитарная матрица U и действительная диагональная матрица D , что $D = U^*AU$.*

Следствие о симметрических матрицах

Квадратная матрица A над полем \mathbb{R} симметрична тогда и только тогда, когда существуют ортогональная матрица U и диагональная матрица D такие, что $D = U^T AU$. □