Тема II: Линейные операторы

§ 4. Сопряженный оператор

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Пусть $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ – линейный оператор пространств со скалярным произведением над полем $F \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$.

В каждом из пространств V_1 и V_2 – свое скалярное произведение. Для наглядности полезно (временно) использовать разные обозначения для произведений в V_1 и в V_2: будем обозначать произведение векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_1$ через $\mathbf{x} \circ_1 \mathbf{y}$, а произведение векторов $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$ – через $\mathbf{p} \circ_2 \mathbf{q}$.

Возьмем произвольный вектор $\mathbf{r} \in V_2$ и свяжем с ним отображение

$$\Phi_{\mathbf{r}}\colon V_1 \to F,$$

определенное правилом $\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) := \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r}$. Отображение $\Phi_{\mathbf{r}}$ – линейный функционал на пространстве V_1. Действительно,

$$\begin{aligned}
\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= \mathscr{A}(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}} \\
&= (\mathscr{A}\mathbf{x} + \mathscr{A}\mathbf{y}) \circ_2 \mathbf{r} && \text{в силу линейности } \mathscr{A} \\
&= \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} + \mathscr{A}\mathbf{y} \circ_2 \mathbf{r} && \text{свойство скалярного произведения} \\
&= \Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) + \Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{y}) && \text{по определению } \Phi_{\mathbf{r}}.
\end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $\Phi_{\mathbf{r}}(\lambda x) = \lambda\Phi_{\mathbf{r}}(\mathbf{x})$ для любого $\lambda \in F$.

Построение сопряженного оператора. Ключевое тождество.

Пусть пространство V_1 конечномерно. По теореме о строении линейного функционала существует однозначно определяемый вектор $\mathbf{a} \in V_1$ такой, что $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathbf{a}$ для каждого $\mathbf{x} \in V_1$. Сопоставляя вектору $\mathbf{r}$ вектор $\mathbf{a}$, получаем отображение из V_2 в V_1. Это отображение называется *сопряженным оператором* к $\mathscr{A}$ и обозначается через $\mathscr{A}^*$.

Построение дает *ключевое тождество для сопряженного оператора*:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{A}^*\mathbf{r}. \qquad (\dagger)$$

Как мы увидим дальше, ключевое тождество – мощный и исключительно полезный инструмент. Именно оно применяется во всех рассмотрениях, связанных с сопряженными операторами; построение же нужно только для того, чтобы обосновать, что сопряженный оператор существует.

Замечание. Тождество $(\dagger)$ *однозначно определяет* сопряженный оператор, т.е. если для оператора $\mathscr{B}\colon V_2 \to V_1$ равенство $\mathscr{A}\mathbf{x} \circ_2 \mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{B}\mathbf{r}$ выполнено при всех $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{r} \in V_2$, то $\mathscr{B} = \mathscr{A}^*$.

Доказательство. Если $\mathbf{x} \circ_1 \mathscr{A}^*\mathbf{r} = \mathbf{x} \circ_1 \mathscr{B}\mathbf{r}$ для всех $\mathbf{x}$, то $\mathscr{A}^*\mathbf{r} = \mathscr{B}\mathbf{r}$ (ослабленный закон сокращения). Это и означает, что $\mathscr{A}^* = \mathscr{B}$. □

Линейность сопряженного оператора

Вернемся к привычному обозначению $\mathbf{xy}$ для скалярного произведения векторов $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ любого пространства. Тождество $(\dagger)$ тогда запишется так:

$$\forall \mathbf{x} \in V_1 \ \forall \mathbf{r} \in V_2 \quad \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{r} = \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{r}. \qquad (\dagger)$$

Теорема (линейность сопряженного оператора)

Пусть $\mathscr{A} : V_1 \to V_2$ – линейный оператор пространств со скалярным произведением. Тогда сопряженный оператор $\mathscr{A}^* : V_2 \to V_1$ линеен.

Доказательство. Пусть $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in V_2$; проверим, что $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$. Возьмем произвольный вектор $\mathbf{x} \in V_1$. Имеем

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}\left(\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}\right) &= \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{q} && \text{свойство скалярного произведения}\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p} + \mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{q} && \text{тождество } (\dagger)\\
&= \mathscr{A}\mathbf{x}(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{свойство скалярного произведения}\\
&= \mathbf{x}\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) && \text{тождество } (\dagger).
\end{aligned}$$

Отсюда $\mathscr{A}^*(\mathbf{p}+\mathbf{q}) = \mathscr{A}^*\mathbf{p} + \mathscr{A}^*\mathbf{q}$ (ослабленный закон сокращения). Сходным образом проверяется, что $\mathscr{A}^*(\lambda\mathbf{p}) = \lambda\mathscr{A}^*\mathbf{p}$ для всех $\lambda \in F$. □

Укажем основные свойства взятия сопряженного оператора.

$\nabla 1$: $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$;

$\nabla 2$: $(\alpha\mathscr{A})^* = \overline{\alpha}\mathscr{A}^*$;

$\nabla 3$: $(\mathscr{A} + \mathscr{B})^* = \mathscr{A}^* + \mathscr{B}^*$;

$\nabla 4$: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$.

Доказательство свойства $\nabla 1$. Заметим, что $(\mathscr{A}^*)^*$ отображает V_1 в V_2. Применяя тождество $(\dagger)$ к оператору $\mathscr{A}^*$, получаем

$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \mathbf{p}\,(\mathscr{A}^*)^*\,\mathbf{x}$$

для всех $\mathbf{p} \in V_2$ и $\mathbf{x} \in V_1$. С другой стороны,

$$\mathscr{A}^*\mathbf{p}\mathbf{x} = \overline{\mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{p}} \overset{(\dagger)}{=} \overline{\mathscr{A}\mathbf{x}\mathbf{p}} = \mathbf{p}\mathscr{A}\mathbf{x}.$$

Итак, $\mathbf{p}\,(\mathscr{A}^*)^*\,\mathbf{x} = \mathbf{p}\mathscr{A}\mathbf{x}$ для всех $\mathbf{p}$ и $\mathbf{x}$, откуда $(\mathscr{A}^*)^*\,\mathbf{x} = \mathscr{A}\mathbf{x}$ (ослабленный закон сокращения). Это и означает, что $(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}$. □

Свойства $\nabla 2$ и $\nabla 3$ докажите самостоятельно.

Обсудим свойство $\nabla 4$: $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$. Здесь рассматриваются три векторных пространства V_1, V_2 и V_3, причем $\mathscr{A}$ – линейный оператор из V_2 в V_3, а $\mathscr{B}$ – линейный оператор из V_1 в V_2. Соответственно, $\mathscr{B}^*$ – оператор из V_2 в V_1, а $\mathscr{A}^*$ – оператор из V_3 в V_2.

Возьмем произвольные вектора $\mathbf{x} \in V_1$ и $\mathbf{s} \in V_3$. Тогда

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\,\mathbf{x}\mathbf{s} \overset{(\dagger)}{=} \mathbf{x}\,(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s}.$$

С другой стороны,

$$(\mathscr{A}\mathscr{B})\,\mathbf{x}\mathbf{s} = \mathscr{A}\,(\mathscr{B}\mathbf{x})\,\mathbf{s} \overset{(\dagger)}{=} \mathscr{B}\mathbf{x}\mathscr{A}^*\mathbf{s} \overset{(\dagger)}{=} \mathbf{x}\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\mathbf{s}.$$

Итак, $\mathbf{x}\,(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s} = \mathbf{x}\mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\mathbf{s}$ для всех $\mathbf{x}$ и $\mathbf{s}$, откуда $(\mathscr{A}\mathscr{B})^*\,\mathbf{s} = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*\mathbf{s}$ (ослабленный закон сокращения). Это и значит, что $(\mathscr{A}\mathscr{B})^* = \mathscr{B}^*\mathscr{A}^*$. $\square$

Пусть $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$ – базис V_1, а $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$ – базис V_2. Матрица линейного оператора $\mathscr{A}\colon V_1 \to V_2$ состоит из координат векторов $\mathscr{A}\mathbf{e}_1, \ldots, \mathscr{A}\mathbf{e}_k$ в базисе $\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n$, записанных по столбцам:

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell.$$

Если базис $\{\mathbf{f}_j\}$ – ортонормированный, умножив справа на $\mathbf{f}_j$, получим

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \left(\sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell\right)\mathbf{f}_j = \sum_{\ell=1}^{n} \alpha_{\ell i}\mathbf{f}_\ell\mathbf{f}_j = \alpha_{ji}.$$

Оператор $\mathscr{A}^*\colon V_2 \to V_1$ – тоже линейный, и его матрица состоит из координат векторов $\mathscr{A}^*\mathbf{f}_1, \ldots, \mathscr{A}^*\mathbf{f}_n$ в базисе $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k$:

$$\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \sum_{\ell=1}^{k} \beta_{\ell j}\mathbf{e}_\ell.$$

Если базис $\{\mathbf{e}_i\}$ – ортонормированный, умножив слева на $\mathbf{e}_i$, получим

$$\mathbf{e}_i\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i\left(\sum_{\ell=1}^{k} \beta_{\ell j}\mathbf{e}_\ell\right) = \sum_{\ell=1}^{k} \overline{\beta_{\ell j}}\mathbf{e}_i\mathbf{e}_\ell = \overline{\beta_{ij}}.$$

Матрица сопряженного оператора (2)

Итак, если оба базиса $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k$ и $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ ортонормированные, то

$$\mathscr{A}\mathbf{e}_i\mathbf{f}_j = \alpha_{ji} \quad \text{и} \quad \mathbf{e}_i\mathscr{A}^*\mathbf{f}_j = \overline{\beta_{ij}}.$$

Но левые части этих равенств одинаковы в силу $(\dagger)$. Отсюда $\alpha_{ji} = \overline{\beta_{ij}}$. Это можно переписать как $\beta_{ij} = \overline{\alpha_{ji}}$. Мы видим, что матрица сопряженного оператора $\mathscr{A}^*$ получается, если матрицу исходного оператора $\mathscr{A}$ транспонировать и заменить каждый элемент его сопряженным. Матрица, получаемая из данной матрицы A транспонированием и заменой каждого элемента на сопряженный, называется *эрмитово сопряженной* к матрице A и обозначается через A^*: если $A = (a_{ij})_{k\times n}$, то $A^* := (\overline{a_{ji}})_{n\times k}$.

Итак, установлен следующий весьма полезный факт:

Предложение (матрица сопряженного оператора)

Если линейный оператор $\mathscr{A}: V_1 \to V_2$ имеет в ортонормированных базисах пространств V_1 и V_2 матрицу A, то сопряженный ему оператор $\mathscr{A}^*: V_2 \to V_1$ имеет в тех же базисах матрицу A^*.

Случай $V_1 = V_2$

Во всех рассмотрениях выше не исключался случай, когда пространства V_1 и V_2 – это одно и то же пространство V. В этом важном частном случае сопоставление каждому линейному оператору $\mathscr{A}: V \to V$ его сопряженного оператора становится дополнительной *унарной операцией* в кольце всех линейных операторов пространства V.

Наличие такой дополнительной операции позволяет:

- выделить важные типы линейных операторов – прежде всего, *самосопряженные* (когда $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}$) и *унитарные/ортогональные* (когда $\mathscr{A}^* = \mathscr{A}^{-1}$);
- описать устройство произвольных линейных операторов пространств со скалярным произведением.