

Тема II. Линейные операторы

§ 2. Собственные вектора и собственные значения

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Определение

Пусть V — векторное пространство над полем F , а \mathcal{A} — линейный оператор на V . Вектор $x \in V$ называется *собственным вектором* оператора \mathcal{A} , если $x \neq 0$ и существует скаляр $\lambda \in F$ такой, что

$$\mathcal{A}x = \lambda x. \quad (*)$$

Скаляр $\lambda \in F$, для которого существует вектор $x \in V$ такой, что $x \neq 0$ и выполнено равенство (*), называют *собственным значением* оператора \mathcal{A} .

При этом говорят, что собственный вектор x *принадлежит собственному значению* λ .

Пусть \mathcal{A} — линейный оператор, действующий в векторном пространстве V над полем F . Зафиксируем некоторый базис пространства V и обозначим через A матрицу оператора \mathcal{A} в этом базисе. Для произвольного вектора $x \in V$ обозначим через x столбец его координат в выбранном базисе. Равенство $\mathcal{A}x = \lambda x$ равносильно матричному равенству $Ax = \lambda x$. Если E — единичная матрица того же порядка, что и A , это равенство можно переписать в виде $Ax = \lambda Ex$ или $Ax - \lambda Ex = 0$, где 0 — нулевой столбец. Последнее равенство можно переписать в виде системы линейных однородных уравнений с параметром λ :

$$(A - \lambda E)x = 0. \quad (\star)$$

Выводы:

- *собственными векторами оператора \mathcal{A} являются вектора, координатные столбцы которых суть ненулевые решения системы (\star) , и только они;*
- *собственными значениями оператора \mathcal{A} являются те значения параметра λ , при которых система (\star) имеет ненулевые решения, и только они.*

Если $\dim V = n$, в системе $(A - \lambda E)x = 0$ по n уравнений и неизвестных. Такая система имеет ненулевые решения, если и только если ранг матрицы $A - \lambda E$ строго меньше n , т.е. если и только если $\det(A - \lambda E) = 0$.

Если $A = (a_{ij})$, то $\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} -$

многочлен n -й степени от λ . Он называется *характеристическим многочленом* матрицы A .

Замечание

Характеристические многочлены подобных матриц равны.

Доказательство. Пусть $B = T^{-1}AT$. Тогда

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda E) &= \det(T^{-1}AT - \lambda E) = \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET) \\ &= \det(T^{-1}(A - \lambda E)T) = \det(T^{-1}) \det(A - \lambda E) \det T \\ &= \det(A - \lambda E) \det(T^{-1}) \det T = \det(A - \lambda E) \det(T^{-1}T) \\ &= \det(A - \lambda E). \end{aligned}$$



Характеристический многочлен оператора (2)

Поскольку все матрицы одного и того же линейного оператора подобны между собой, у всех них один и тот же характеристический многочлен.

Он называется *характеристическим многочленом оператора*.

Таким образом, собственные значения линейного оператора – это в точности корни его характеристического многочлена.

Замечания и примеры. 1) У линейного оператора на n -мерном пространстве не более n собственных значений (так как у многочлена n -й степени не более n корней).

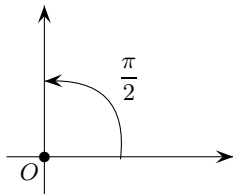
2) Характеристический многочлен матрицы $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ есть

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \dots (a_{nn} - \lambda).$$

Поэтому собственные значения оператора, матрица которого в некотором базисе диагональна, суть диагональные элементы этой матрицы.

Вопрос: каковы соответствующие собственные вектора?

3) Матрица поворота плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$ равна $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.



Ее характеристический многочлен $\begin{vmatrix} -\lambda & -1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$ не имеет

действительных корней. Следовательно, у поворота плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$ нет собственных значений и векторов (что геометрически очевидно).

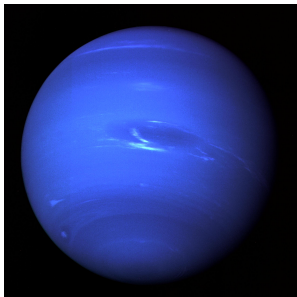
5) У любого линейного оператора обычного трехмерного пространства есть собственный вектор. Геометрически это отнюдь не очевидно, но сразу следует из наличия действительного корня у многочленов третьей степени.

6) В силу основной теоремы алгебры комплексных чисел у любого оператора на любом конечномерном пространстве над полем \mathbb{C} есть собственные значения и собственные вектора.

Подытожим: чтобы найти собственные значения и собственные вектора линейного оператора \mathcal{A} , нужно:

- 1) Взять матрицу A оператора \mathcal{A} в некотором базисе.
- 2) Вычислить характеристический многочлен $\det(A - \lambda E)$.
- 3) Найти корни характеристического многочлена $\lambda_1, \dots, \lambda_k$.
- 4) Для каждого корня λ_i найти ненулевые решения системы линейных однородных уравнений $(A - \lambda_i E)x = 0$.

Шаги 1 и 4 понятны. Для шагов 2 и 3 имеются достаточно эффективные численные методы (для шага 2 – *метод Фаддеева–Леверрье*, для шага 3 – например, *метод Ньютона*).



Теорема

Собственные вектора, принадлежащие попарно различным собственным значениям, линейно независимы.

Доказательство. Индукция по числу k векторов. База $k = 1$ обеспечивается тем, что собственный вектор по определению ненулевой. Пусть $k > 1$ и $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_k$ – собственные вектора оператора \mathcal{A} , принадлежащие попарно различным собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$. Предположим, что для некоторых $s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, s_k$

$$s_1 \mathbf{x}_1 + s_2 \mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + s_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \quad (1)$$

Применив к этому равенству оператор \mathcal{A} , получим

$$s_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + s_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1} \lambda_{k-1} \mathbf{x}_{k-1} + s_k \lambda_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}. \quad (2)$$

Умножим (1) на λ_k и вычтем из (2). Получим

$$s_1 (\lambda_1 - \lambda_k) \mathbf{x}_1 + s_2 (\lambda_2 - \lambda_k) \mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1} (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

По предположению индукции $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ линейно независимы.

Из линейной независимости векторов $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{k-1}$ и равенства

$$s_1(\lambda_1 - \lambda_k)\mathbf{x}_1 + s_2(\lambda_2 - \lambda_k)\mathbf{x}_2 + \dots + s_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k)\mathbf{x}_{k-1} = \mathbf{0}.$$

закключаем, что $s_1(\lambda_1 - \lambda_k) = s_2(\lambda_2 - \lambda_k) = \dots = s_{k-1}(\lambda_{k-1} - \lambda_k) = 0$. Поскольку скаляры $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{k-1}, \lambda_k$ попарно различны, получаем, что $s_1 = s_2 = \dots = s_{k-1} = 0$. Но тогда $s_k \mathbf{x}_k = \mathbf{0}$, откуда, учитывая, что $\mathbf{x}_k \neq \mathbf{0}$ (поскольку вектор \mathbf{x}_k собственный), получаем, что $s_k = 0$. \square

Следствие

Если у линейного оператора \mathcal{A} на n -мерном векторном пространстве V имеется n различных собственных значений, то в V существует базис из собственных векторов оператора \mathcal{A} .

Операторы с n различными собственными значениями называют *операторами простой структуры*.

В базисе из собственных векторов оператора его матрица диагональна, причем по диагонали идут собственные значения, которым принадлежат вектора базиса. Поэтому операторы, допускающие такой базис, называют *приводимыми к диагональному виду* или *диагонализируемыми*.

Из отмеченного выше следствия вытекает, что операторы простой структуры диагонализуемы.

Обратное, разумеется, неверно: например, тождественный оператор и нулевой оператор диагонализуемы, так как у каждого из них любой ненулевой вектор собственный.

Бывают ли недиагонализуемые операторы? Конечно, некоторые операторы недиагонализуемы из-за нехватки собственных значений. Например, оператор поворота плоскости на угол $\frac{\pi}{2}$ недиагонализуем.

Но бывают и недиагонализуемые операторы, у которых есть собственные значения.

Пример. Рассмотрим оператор дифференцирования \mathcal{D} на пространстве квадратных трехчленов над \mathbb{R} . Матрица оператора \mathcal{D} в стандартном

базисе $1, x, x^2$ равна $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Ее характеристический многочлен

$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3$ имеет корень $\lambda = 0$ кратности 3. Собственные вектора

оператора \mathcal{D} , принадлежащие 0, суть ненулевые константы, поэтому у \mathcal{D} нет базиса из собственных векторов.