

# Тема II: Многочлены

## §2. Рациональные дроби

М.В.Волков

Уральский федеральный университет  
Институт естественных наук и математики  
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2021/2022 учебный год

Пусть  $D$  – область с 1 (не обязательно ООР). Хотим расширить  $D$  до поля.

Построение схоже с построением поля рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  из кольца  $\mathbb{Z}$ .

Итак, пусть  $M := \{(a, b) \in D \times D \mid b \neq 0\}$ . Определим на  $M$  отношение  $\equiv$ :

$$(a, b) \equiv (c, d) \iff ad = bc.$$

Проверим, что  $\equiv$  – отношение эквивалентности.

**Рефлексивность** очевидна:  $(a, b) \equiv (a, b)$ , ибо  $ab = ba$ .

**Симметричность** очевидна:  $ad = bc$  равносильно  $cb = da$ , т.е.  $(a, b) \equiv (c, d)$  равносильно  $(c, d) \equiv (a, b)$ .

**Транзитивность**. Пусть  $(a, b) \equiv (c, d) \equiv (e, f)$ , т.е.  $ad = bc$  и  $cf = de$ .

Умножив 1-е равенство на  $f$ , а 2-е на  $b$ , получим  $adf = bcf$  и  $bcf = bde$ .

Отсюда  $adf = bde$ ; на  $d \neq 0$  можно сократить, так как  $D$  – область.

Итак,  $af = be$ , т.е.  $(a, b) \equiv (e, f)$ .

Классы эквивалентности  $\equiv$  будем называть **дробями**.

Дробь, содержащую пару  $(a, b) \in M$ , обозначаем  $\frac{a}{b}$ .

Имеем  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \iff ad = bc$ . В частности,  $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$  при любом  $c \neq 0$ .

Множество всех дробей обозначим через  $F$ . Оно и станет искомым полем.

## Поле частных области целостности (2)

Определим на  $F$  операции  $+$  и  $\cdot$  и проверим аксиомы поля.

Определим сложение правилом

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} := \frac{ad + bc}{bd},$$

а умножение – правилом

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} := \frac{ac}{bd}.$$

Необходимо удостовериться, что эти определения *корректны*, т.е. что если  $\frac{a}{b} = \frac{a_1}{b_1}$  и  $\frac{c}{d} = \frac{c_1}{d_1}$ , то  $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1}$  и  $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a_1}{b_1} \cdot \frac{c_1}{d_1}$ . Это легко.

Роль нуля в  $F$  играет дробь  $\frac{0}{1}$  (или любая равная ей дробь  $\frac{0}{b}$  с  $b \neq 0$ ):

$$\frac{a}{b} + \frac{0}{1} = \frac{a \cdot 1 + b \cdot 0}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}.$$

Роль единицы в  $F$  играет дробь  $\frac{1}{1}$  (или любая равная ей дробь  $\frac{b}{b}$  с  $b \neq 0$ ):

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{1}{1} = \frac{a \cdot 1}{b \cdot 1} = \frac{a}{b}.$$

## Поле частных области целостности (3)

Противоположной к дроби  $\frac{a}{b}$  будет дробь  $\frac{-a}{b}$ :  $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{ab - ba}{bb} = \frac{0}{bb}$ .

При  $a \neq 0$  обратной к дроби  $\frac{a}{b}$  будет дробь  $\frac{b}{a}$ :  $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = \frac{ab}{ba} = \frac{ab}{ab}$ .

Все остальные аксиомы поля устанавливаются прямыми вычислениями.

Итак,  $F$  – поле. Область  $D$  отождествим с подкольцом в  $F$ , состоящим из всех дробей вида  $\frac{a}{1}$ . Поле  $F$  называется *полем частных* области  $D$ .

Важные частные случаи этой конструкции:

- поле рациональных чисел  $\mathbb{Q}$  есть поле частных кольца  $\mathbb{Z}$ ;
- *поле рациональных функций*  $F(x)$  есть поле частных кольца многочленов  $F[x]$ .

Рациональные функции над  $\mathbb{R}$ , т.е. дроби вида  $\frac{f(x)}{g(x)}$ , где  $f(x)$  и  $g(x) \neq 0$  – многочлены с действительными коэффициентами, играют важную роль в курсе математического анализа, в частности, в теории интегрирования.

## Определение

Рациональная дробь  $\frac{f}{g}$  называется *правильной*, если  $\deg f < \deg g$  и  $f \neq 0$ .

## Замечание

*Любая рациональная дробь является либо многочленом, либо суммой многочлена и правильной дроби.*

*Доказательство.* Рассмотрим произвольную рациональную дробь  $\frac{f}{g}$ . Если многочлен  $f$  делится на многочлен  $g$ , т.е.  $f = gh$  для некоторого многочлена  $h$ , то  $\frac{f}{g} = h$ . В противном случае поделим  $f$  на  $g$  с остатком:  $f = qg + r$ , где  $\deg r < \deg g$  и  $r \neq 0$ . Тогда  $\frac{f}{g} = q + \frac{r}{g}$ , причем дробь  $\frac{r}{g}$  правильная. □

Рациональная дробь  $\frac{f}{g}$  называется *простейшей*, если существуют многочлен  $p$ , неприводимый над полем  $F$ , и натуральное число  $n$  такие, что  $g = p^n$  и  $\deg f < \deg p$ .

*Примеры* простейших дробей из  $\mathbb{R}(x)$ :  $\frac{1}{x+1}$ ,  $\frac{2x}{x^2+1}$ ,  $\frac{3x+2}{(x^2+x+1)^3}$ .

А вот дроби  $\frac{2x}{x^2-1}$ ,  $\frac{3x^2+2}{(x^2+x+1)^3}$  правильные, но не простейшие (объясните, почему).

## Теорема о рациональных дробях

*Любая правильная дробь из  $F(x)$ , где  $F$  – произвольное поле, может быть представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями. Это представление единственно с точностью до порядка слагаемых.*

Так, для дробей из примеров выше

$$\frac{2x}{x^2-1} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x-1},$$

$$\frac{3x^2+2}{(x^2+x+1)^3} = \frac{3}{(x^2+x+1)^2} - \frac{3x+1}{(x^2+x+1)^3}.$$

**Доказательство. Существование.** Доказательство разобьем на два шага. На первом шаге докажем, что правильная дробь может быть представлена как сумма правильных дробей, у каждой из которых знаменатель есть степень неприводимого многочлена. На втором шаге докажем, что правильная дробь, знаменатель которой – степень неприводимого многочлена, представима как сумма простейших дробей.

Итак, пусть  $\frac{f}{g}$  – правильная дробь. Разложим ее знаменатель  $g$  в произведение неприводимых многочленов:  $g = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$ .

**Шаг 1.** Докажем индукцией по  $n$ , что

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1}{p_1^{k_1}} + \frac{f_2}{p_2^{k_2}} + \cdots + \frac{f_n}{p_n^{k_n}} \quad (1)$$

для некоторых многочленов  $f_1, f_2, \dots, f_n$  таких, что  $\deg f_i < \deg p_i^{k_i}$  для всех  $i = 1, 2, \dots, n$ .

**База индукции** очевидна: если  $n = 1$ , то равенство (1) выполнено при  $f_1 = f$ .

## Теорема о рациональных дробях (3)

*Шаг индукции.* Пусть  $n > 1$ . Положим  $g_1 = p_1^{k_1}$  и  $g_2 = p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n}$ . Многочлены  $g_1$  и  $g_2$  взаимно просты. По свойству взаимно простых многочленов существуют многочлены  $u$  и  $v$  такие, что  $ug_1 + vg_2 = 1$ .

Следовательно,  $f = fug_1 + fvg_2$ . Разделим  $fu$  на  $g_2$  с остатком:

$fu = qg_2 + r$ , где  $\deg r < \deg g_2$ . Имеем:

$f = fug_1 + fvg_2 = (qg_2 + r)g_1 + fvg_2 = rg_1 + (qg_1 + fv)g_2$ , откуда

$$f - rg_1 = (qg_1 + fv)g_2. \quad (2)$$

Положим  $f_1 := qg_1 + fv$  и  $f_2 := r$ . Тогда  $f = f_2g_1 + f_1g_2$ , откуда

$$\frac{f}{g} = \frac{f_1g_2 + f_2g_1}{g_1g_2} = \frac{f_1}{g_1} + \frac{f_2}{g_2}.$$

По предположению индукции правильная дробь  $\frac{f_2}{g_2}$  представима как сумма правильных дробей, у которых знаменатели суть степени неприводимых многочленов. Чтобы завершить шаг 1, осталось проверить, что дробь и  $\frac{f_1}{g_1}$  является правильной, т.е. что  $\deg f_1 < \deg g_1$ . Последнее неравенство равносильно неравенству  $\deg f_1 + \deg g_2 < \deg g_1 + \deg g_2$ . Но  $\deg f_1 + \deg g_2 = \deg(f_1g_2) = \deg(qg_1 + fv)g_2 \stackrel{(2)}{=} \deg(f - rg_1) \leq \max\{\deg f, \deg(rg_1)\}$ .



Итак, для завершения шага 1 достаточно установить, что  $\deg f < \deg g_1 + \deg g_2$  и  $\deg(rg_1) < \deg g_1 + \deg g_2$ . Оба этих неравенства проверяются легко:  $\deg f < \deg g = \deg(g_1g_2) = \deg g_1 + \deg g_2$  и  $\deg(rg_1) = \deg r + \deg g_1 < \deg g_2 + \deg g_1$ .

**Шаг 2.** Докажем индукцией по  $k$ , что каждая правильная дробь вида  $\frac{f}{p^k}$ , где  $p$  – неприводимый многочлен, равна сумме простейших дробей.

Если  $k = 1$ , то  $\frac{f}{p}$  – уже простейшая дробь, и все доказано.

Пусть  $k > 1$ . Разделим  $f$  на  $p$  с остатком:  $f = qp + r$ , где  $\deg r < \deg p$ , а  $\deg qp = \deg f < \deg p^k$ , откуда  $\deg q < \deg p^{k-1}$ . Тогда

$$\frac{f}{p^k} = \frac{qp + r}{p^k} = \frac{q}{p^{k-1}} + \frac{r}{p^k}.$$

Дробь  $\frac{r}{p^k}$  либо равна 0 (если  $r = 0$ ), либо простейшая, а дробь  $\frac{q}{p^{k-1}}$  правильная и равна сумме простейших дробей по предположению индукции.

**Единственность.** Предположим, что некоторая правильная дробь двумя разными способами представлена в виде суммы простейших дробей с разными знаменателями:

$$\frac{a_1}{p_1^{k_1}} + \dots + \frac{a_m}{p_m^{k_m}} = \frac{b_1}{q_1^{\ell_1}} + \dots + \frac{b_n}{q_n^{\ell_n}}.$$

Перенеся все слагаемые в левую часть равенства и выполнив сложение дробей с одинаковыми знаменателями, получим равенство вида

$$\frac{s_1}{t_1} + \dots + \frac{s_r}{t_r} = 0,$$

где все слагаемые являются простейшими дробями с разными знаменателями. Заметим, что  $r > 1$  (простейшая дробь не равна 0 по определению). Пусть  $t_1 = p^k$  для некоторого неприводимого многочлена  $p$ . Будем считать, что слагаемые пронумерованы так, что для каждого  $i = 2, \dots, r$  либо  $t_i = p^\ell$ , где  $\ell < k$ , либо  $t_i$  – степень неприводимого многочлена, отличного от  $p$ . Обозначим через  $Q$  наименьший общий знаменатель всех слагаемых второго типа, т.е. слагаемых, знаменатели которых – степени неприводимых многочленов, отличных от  $p$ . По свойствам неприводимых многочленов  $Q$  и  $p$  взаимно просты.

## Теорема о рациональных дробях (6)

Умножим обе части равенства  $\frac{s_1}{p^k} + \frac{s_2}{t_2} + \dots + \frac{s_r}{t_r} = 0$  на  $p^{k-1}Q$ . Получим равенство вида  $\frac{s_1Q}{p} + R = 0$ , где  $R$  – некоторый многочлен. Отсюда  $s_1Q = -pR$ . Таким образом, многочлен  $p$  делит  $s_1Q$ . Напомним, что  $p$  и  $Q$  взаимно просты. По свойствам взаимно простых многочленов отсюда вытекает, что  $p$  делит  $s_1$ . Но это невозможно, так как дробь  $\frac{s_1}{p^k}$  является простейшей, и потому  $\deg s_1 < \deg p$ . □

Утверждение об единственности важно потому, что оно позволяет находить разложение правильной дроби в сумму простейших с помощью *метода неопределенных коэффициентов*. Если известно представление знаменателя правильной дроби  $\frac{f}{g}$  в виде произведения неприводимых множителей, то можно предсказать вид простейших дробей, которые могут появиться в разложении дроби  $\frac{f}{g}$ , записать это разложение с неопределенными коэффициентами, а потом найти эти коэффициенты, приведя дроби в разложению к общему знаменателю  $g$  и приравняв числитель полученной дроби к  $f$ .

Разложим в сумму простейших правильную дробь  $\frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1} \in \mathbb{R}(x)$ .

$x^4 - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + 1)$  – представление знаменателя в виде произведения неприводимых множителей над  $\mathbb{R}$ . Отсюда

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1} &= \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 1} + \frac{Cx + D}{x^2 + 1} = \\ &= \frac{A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)}{x^4 - 1}. \end{aligned}$$

Итак,  $3x^2 + 2 = A(x + 1)(x^2 + 1) + B(x - 1)(x^2 + 1) + (Cx + D)(x^2 - 1)$ .

Подставляя  $x = 1$ , находим  $5 = 4A$ , т.е.  $A = \frac{5}{4}$ . Аналогично, подставляя

$x = -1$ , находим  $5 = -4B$ , т.е.  $B = -\frac{5}{4}$ . Приравнявая коэффициенты при

$x^3$ , имеем  $0 = A + B + C$ , откуда  $C = 0$ . Наконец, приравнявая свободные члены, имеем  $2 = A - B - D$ , откуда  $D = \frac{1}{2}$ . Окончательно,

$$\frac{3x^2 + 2}{x^4 - 1} = \frac{5}{4(x - 1)} - \frac{5}{4(x + 1)} + \frac{1}{2(x^2 + 1)}.$$