Определение степенного ряда

Опр. Ряд вида

$$\boxed{(1)\quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots}$$

называется степенным рядом,

а значения a_n – коэффициентами степенного ряда.

Область сходимости степенного ряда

Опр. Областью сходимости степенного ряда (1) называется множество точек $x \in \mathbb{R}$ при которых ряд (1) сходится.

Опр. Число $R > 0$ такое, что при $|x| < R$ степенной ряд (1) сходится, а при $|x| > R$ ряд (1) расходится называется радиусом сходимости, а интервал $(-R, R)$ – интервалом сходимости.

Область сходимости степенного ряда

<u>Вывод</u>. Если R – радиус сходимости степенного ряда (1), то

- при $x \in (-R, R)$ ряд степенной (1) **абсолютно сходится**;
- при $x \in (-\infty, -R) \cup (R, +\infty)$ ряд **расходится**;
- в точках $x = -R, x = R$ **требуется дополнительное исследование**.

Вычисление радиуса сходимости

Теорема. Радиус сходимости степенного ряда (1) при условии $a_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ равен

$$\boxed{R = \frac{1}{d}, \text{ где } d = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$

Вычисление радиуса сходимости

<u>Теорема</u>. Радиус сходимости степенного ряда (1) при условии $a_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$ равен

$$\boxed{R = \frac{1}{q}, \text{ где } q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Область сходимости. Задача 1

Задача 1. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}=x+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{9}+\ldots+\frac{x^n}{n^2}+\ldots$$

Решение.

Вычислим радиус сходимости по теореме 2.

$$a_n=\frac{1}{n^2}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)^2}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n^2}{(n+1)^2}\Rightarrow$$

Область сходимости. Задача 1

$$d = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \left[\lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{n^2} \right] = 1 \Rightarrow$$

$$R = \frac{1}{d} = 1 \Rightarrow$$

При $x \in (-1,1)$ ряд **абсолютно сходится.**

При $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ ряд **расходится.**

Область сходимости. Задача 1

Исследуем граничные точки.

При $x = 1$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n^2} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$

и он **сходится** (как гармонический при $\alpha = 2$).

При $x = -1$ исходный ряд имеет вид $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$

и он **тоже абсолютно сходится,** т.к.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^n}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

Область сходимости. Задача 1

<u>Ответ</u>:

1. При $x \in [-1,1]$ ряд **абсолютно сходится.**
2. При $x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ ряд **расходится.**

Область сходимости. Задача 2

Задача 2. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}=x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

Решение.

Вычислим радиус сходимости по теореме 2.

$$a_n=\frac{1}{n!}\Rightarrow a_{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}\Rightarrow\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n!}{(n+1)!}=$$

Область сходимости. Задача 2

$$=\frac{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\ldots\cdot\cancel{n}}{\cancel{1}\cdot\cancel{2}\cdot\cancel{3}\cdot\ldots\cdot\cancel{n}\cdot(n+1)}=\frac{1}{n+1}$$

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=\left[\frac{1}{\infty}\right]=0\Rightarrow$$

$$R=\frac{1}{d}=\left[\frac{1}{0}\right]=\infty\Rightarrow$$

При $x\in(-\infty,+\infty)$ ряд **абсолютно сходится.**

Область сходимости. Задача 2

Ответ: при $x \in (-\infty, +\infty)$ ряд абсолютно сходится.

Область сходимости произвольного степенного ряда

Для ряда (*) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n$ нужно сделать замену

$z = x - x_0$. Ряд (*) превратится в ряд (**) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$

$$\Downarrow$$

интервал сходимости ряда (**) имеет вид

$z \in \left(-R,\ R\right)$ с центром в точке $z = 0 \Rightarrow$

Область сходимости произвольного степенного ряда

интервал сходимости ряда (*) имеет вид

$x \in \left(x_0 - R,\ \ x_0 + R \right)$ с центром в точке $x = x_0$

Алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда

Для решения задач удобно использовать

[Алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда]

(см. след. слайды; их можно не конспектировать)

Алгоритм нахождения области сходимости степенного ряда

Степенной ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n,\ a_n \neq 0$

1) Делаем замену $z = x - x_0$, рассматриваем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$

2) Находим радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$:

2.1) $R = \dfrac{1}{q}$, где $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$;   2.2) $R = \dfrac{1}{d}$, где $d = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$;

3) Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 3.1) при $z = R$;   3.2) при $z = -R$

Область сходимости. Задача 3

Задача 3. Найти область сходимости степенного ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}(x+1)^n}{3^{n+1}\sqrt{n+2}}$$

Решение. Это степенной ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-x_0)^n, \quad a_n = \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}\sqrt{n+2}} > 0, \quad x_0 = -1$$

Область сходимости. Задача 3

1) Делаем замену $z = x + 1,$ рассматриваем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1} z^n}{3^{n+1}\sqrt{n+2}}$$

2) Находим радиус сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$:

$$a_{n+1} = \frac{2^{(n+1)-1}}{3^{(n+1)+1}\sqrt{(n+1)+2}} = \frac{2^n}{3^{n+2}\sqrt{n+3}}$$

Область сходимости. Задача 3

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\dfrac{2^n}{3^{n+2}\sqrt{n+3}}}{\dfrac{2^{n-1}}{3^{n+1}\sqrt{n+2}}}=\frac{2^n\cdot 3^{n+1}\sqrt{n+2}}{2^{n-1}\cdot 3^{n+2}\sqrt{n+3}}=\frac{2\sqrt{n+2}}{3\sqrt{n+3}}$$

$$d=\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n+2}}{3\sqrt{n+3}}=\left[\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{n}}{3\sqrt{n}}\right]=\frac{2}{3}$$

$$R=\frac{1}{d}=\frac{3}{2}\Rightarrow$$

Область сходимости. Задача 3

При $z \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ряд **абсолютно сходится.**

При $z \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, +\infty\right)$ ряд **расходится.**

Область сходимости. Задача 3

3) Исследуем ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ 3.1) при $z = R$;

3.2) при $z = -R$

3.1) Исследуем ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}\sqrt{n+2}} \left(\frac{3}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}\sqrt{n+2}} \frac{3^n}{2^n} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6\sqrt{n+2}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{6\sqrt{n}} \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$$ расходится $\left(\alpha = \frac{1}{2}\right)$

Область сходимости. Задача 3

$\Rightarrow$ Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n$ расходится

$\Rightarrow$ 3.2) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n$ не сходится абсолютно,

$$\left(\begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} |a_n(-R)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |(-1)^n a_n R^n| = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^n \text{ расходится} \\ a_n > 0,\, R > 0 \end{array} \right)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (-R)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}\sqrt{n+2}} \left(-\frac{3}{2}\right)^n =$$

Область сходимости. Задача 3

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{n-1}}{3^{n+1}\sqrt{n+2}} (-1)^n \frac{3^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6\sqrt{n+2}}$$

Применим признак Лейбница:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n b_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{6\sqrt{n+2}} \Rightarrow b_n = \frac{1}{6\sqrt{n+2}}$$

$$1)\ b_n > 0;\ \ 2)\ b_n \downarrow;\ \ 3)\ b_n \to 0\ \Rightarrow$$

Область сходимости. Задача 3

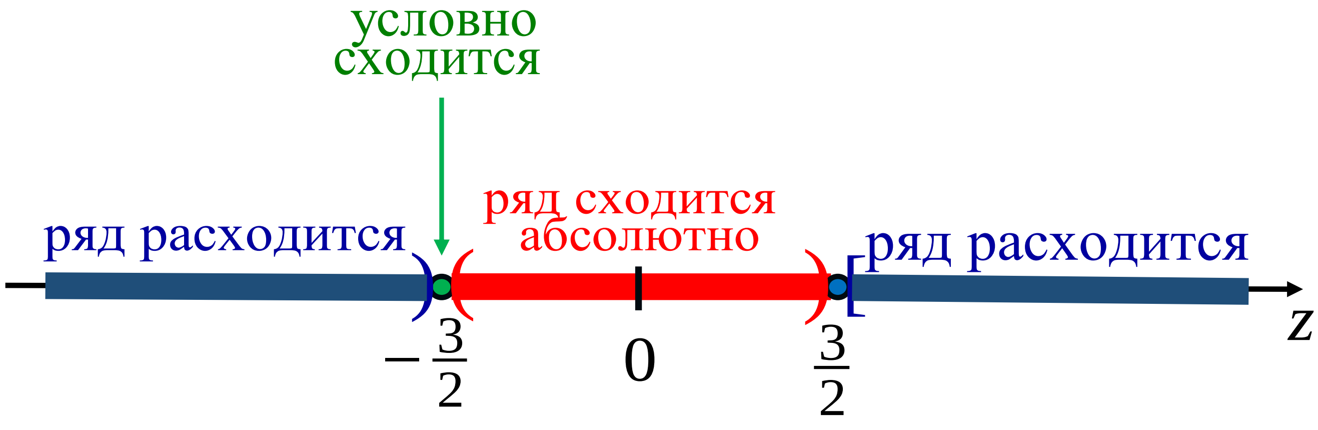
Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-R)^n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{6\sqrt{n+2}}$ сходится по признаку Лейбница

$\Rightarrow$ ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(-R)^n$ сходится условно.

Область сходимости. Задача 3

Промежуточный ответ:

1. При $z \in \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right)$ ряд **абсолютно сходится.**
2. При $z \in \left(-\infty, -\frac{3}{2}\right) \cup \left[\frac{3}{2}, +\infty\right)$ ряд **расходится.**
3. При $z = -\frac{3}{2}$ ряд **условно сходится.**



Область сходимости. Задача 3

<u>Ответ</u>:

1. При $x \in \left(-\frac{5}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ряд **абсолютно сходится.**
2. При $x \in \left(-\infty, -\frac{5}{2}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right)$ ряд **расходится.**
3. При $x = -\frac{5}{2}$ ряд **условно сходится.**