Понятие потенциала и потенциального векторного поля

Опр. Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(P), P \in D,$ где D – область на плоскости (в пространстве), называется потенциальным, если существует такая дифференцируемая функция $u = u(P)$, что справедливо равенство

$$\boxed{\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, u = (u'_x, u'_y)}$$

Функция $u = u(P)$ называется потенциалом поля $\vec{a} = \vec{a}(P)$.

Понятие потенциала и потенциального векторного поля

Замечание 1. Векторное поле $\vec{a} = \vec{a}(P)$, $P \in D$, где D – область на плоскости (в пространстве) является **потенциальным**, если существует такая дифференцируемая функция (потенциал) $u = u(P)$, что справедливо равенство

$$\boxed{du = (\vec{a}, \overrightarrow{dr})}$$

т.е.

$$\boxed{du = a_x dx + a_y dy} \quad \boxed{(du = a_x dx + a_y dy + a_z dz)}$$

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования (для плоскости)

Теорема 2. Пусть $\vec{a} = \vec{a}(P), P \in D, -$ гладкое векторное поле, D – односвязная область. Тогда следующие условия эквивалентны:

(1) поле $\vec{a} = \vec{a}(P) -$ *потенциально*;

(2) *интеграл* $\int_{\overset{\smile}{AB}} (\vec{a}(P), d\vec{r})$ *не зависит от пути интегрирования*;

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования)

(3) *циркуляция* $\oint_{\Gamma}(\vec{a}, d\vec{r})$ по любому замкнутому контуру Γ, лежащему в области D, *равна нулю*;

(4) *поле* $\vec{a} = \vec{a}(P)$ *безвихревое* ($\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{a} = \vec{0}$), т.е. выполняется условие

$$\frac{\partial a_y}{\partial x} = \frac{\partial a_x}{\partial y}$$

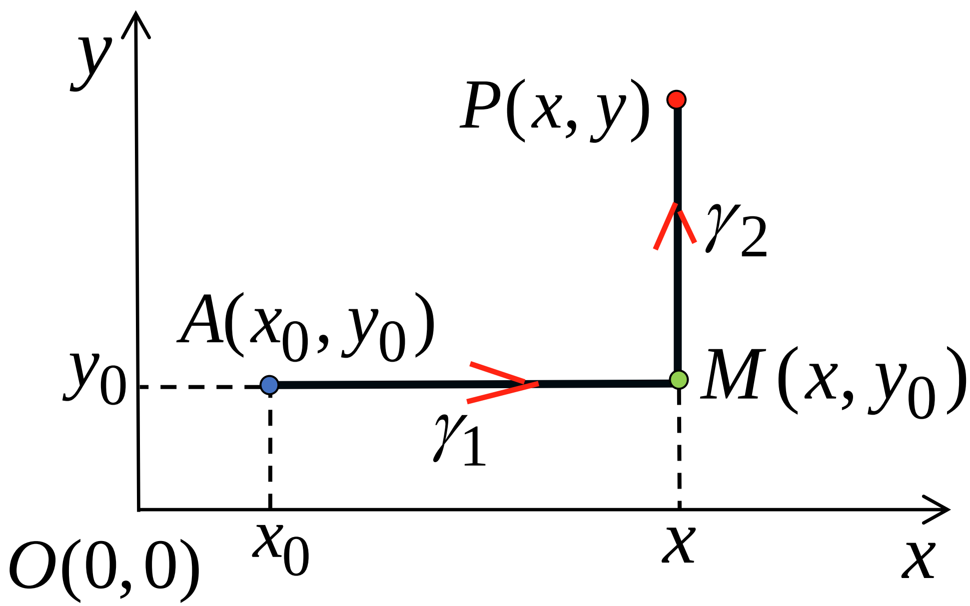
Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования (для плоскости)

$$\boxed{u(P) = \int\limits_{\overset{\smile}{AP}} a_x dx + a_y dy}$$

Кривую $\overset{\smile}{AP}$ можно выбирать произвольной, так как *интеграл не зависит от пути интегрирования*.

Обычно выбирают такую, как показано на рисунке.

Независимость криволинейного интеграла II рода от пути интегрирования (для плоскости)



Вычисление потенциала. Задача 4

Задача 4. Доказать, что поле $\vec{a} = (2xy, x^2)$ потенциально и вычислить его потенциал.

т.е. такую функцию $u = u(x, y)$ такую, что

$$du = a_x dx + a_y dy = 2xydx + x^2 dy$$

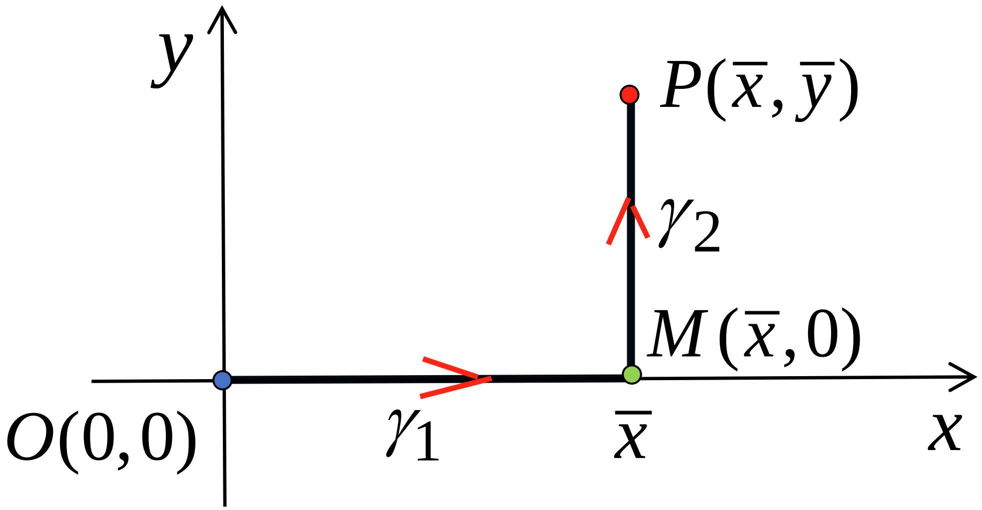
Вычисление потенциала. Задача 4

Решение.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial a_y}{\partial x} = \left(x^2\right)'_x = 2x \\[2ex] \dfrac{\partial a_x}{\partial y} = \left(2xy\right)'_y = 2x \end{array}\right| \Rightarrow$$ поле $\vec{a} = (a_x, a_y)$ потенциально

Зафиксируем точку $P(\bar{x}, \bar{y})$. «Проложим» наиболее простой путь от точки $O(0,0)$ до точки $P(\bar{x}, \bar{y})$.

Вычисление потенциала. Задача 4



$$OM:\begin{cases} x = t \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \end{cases} \qquad MP:\begin{cases} x = \overline{x} \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \end{cases}$$

$$0 \to t \to \overline{x} \qquad\qquad 0 \to t \to \overline{y}$$

Вычисление потенциала. Задача 4

$$u(\overline{x},\overline{y}) = \int\limits_{\overset{\cup}{OP}} 2xydx + x^2dy =$$

$$= \int\limits_{\overset{\cup}{OM}} 2xydx + x^2dy + \int\limits_{\overset{\cup}{MP}} 2xydx + x^2dy =$$

$$= \int\limits_0^{\overline{x}} (2\cdot t\cdot 0dt + t^2\cdot 0) + \int\limits_0^{\overline{y}} \left(2\overline{x}t\cdot 0 + \overline{x}^2dt\right) =$$

Вычисление потенциала. Задача 4

$$= 0 + \int_0^{\bar{y}} \bar{x}^2 dt = \bar{x}^2 \int_0^{\bar{y}} dt = \bar{x}^2 t \Big|_0^{\bar{y}} = \bar{x}^2 \bar{y}$$

$$u(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{x}^2 \bar{y} \;\Rightarrow\; u(x, y) = x^2 y$$

Проверка: $u'_x(x, y) = 2xy = a_x;$

$$u'_y(x, y) = x^2 = a_y.$$

Ответ: $u(x, y) = x^2 y.$

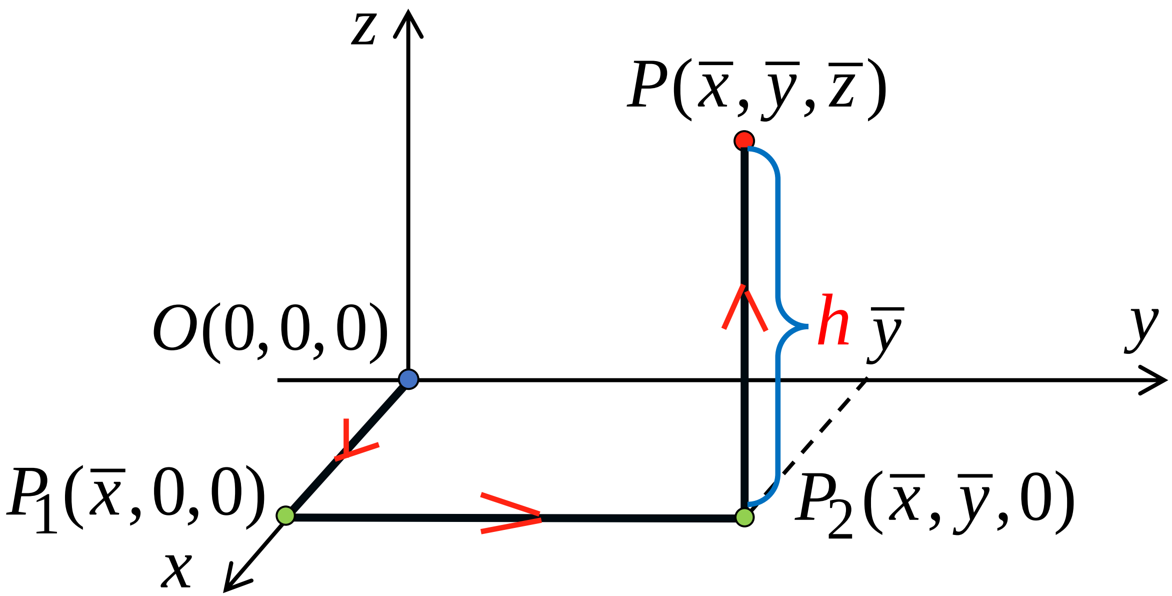
Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5

Задача 5. (*III* способ: при помощи потенциала). Найти работу силу тяжести поднятия груза массы $m = 1$ по винтовой лестнице радиуса R шага 1 на высоту h.

Решение: $\vec{a} = m\vec{g} = (0, 0, -g)$

Сначала найдем потенциал гравитационного поля $\vec{a}$. Для этого «проложим путь» от т. $O(0,0,0)$ до произвольной т. $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$.

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5



Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5

$$OP_1: \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = dt \\ dy = 0 \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$0 \to t \to \bar{x}$$

$$P_1P_2: \begin{cases} x = \bar{x} \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = dt \\ dz = 0 \end{cases}$$

$$0 \to t \to \bar{y}$$

$$P_2P: \begin{cases} x = \bar{x} \\ y = \bar{y} \\ z = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = 0 \\ dy = 0 \\ dz = dt \end{cases}$$

$$0 \to t \to \bar{z}$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5

$$u(\overline{x},\overline{y},\overline{z}) = \int\limits_{\overset{\cup}{OP}} (\vec{a}, d\vec{r}) = \int\limits_{\overset{\cup}{OP}} 0 \cdot dx + 0 \cdot dy - gdz =$$

$$= -\int\limits_{\overset{\cup}{OP}} gdz = -\left(\int\limits_{\overset{\cup}{OP_1}} gdz + \int\limits_{\overset{\cup}{P_1P_2}} gdz + \int\limits_{\overset{\cup}{P_1P}} gdz \right) =$$

Вычисление криволинейного интеграла. Задача 5

$$= -\left(\int_0^{\overline{x}} g \cdot 0 + \int_0^{\overline{y}} g \cdot 0 + \int_0^{\overline{z}} g \cdot dt \right) = -\int_0^{\overline{z}} g \cdot dt = -g\overline{z}$$

потенциал: $u(x, y, z) = -gz$

Работа силы тяжести поднятия груза массы $m = 1$ на высоту h:

$$A = \int_{\overset{\smile}{AB}} (\vec{a}, d\vec{r}) = u(B) - u(A) = -gz\Big|_0^h = -gh = -mgh$$