СПИСОК ЗАДАЧ НА ПРАКТИКУМ

Задача 1*(4 балла)*. Найти геометрическое место точек пересечения диагоналей параллелограммов, вписанных в данный четырехугольник так, что стороны этих параллелограммов параллельны диагоналям четырехугольника.

Задача 2*(4 балла)*. Стороны $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{AB}$ треугольника ABC разделены точками P, Q, R в отношениях

$$\frac{\overrightarrow{BP}}{\overrightarrow{PC}} = \lambda, \frac{\overrightarrow{CQ}}{\overrightarrow{QA}} = \mu, \frac{\overrightarrow{AR}}{\overrightarrow{RB}} = \nu.$$

Пусть A', B', C' – точки пересечения пар прямых BQ и CR, CR и AP, AP и BQ.

Найти отношение площади треугольника $A'B'C'$ к площади треугольника ABC.

Задача 3*(4 балла)*. Вершины острых углов прямоугольных треуголников перемещаются по двум параллельным прямым, а вершина прямого угла – по прямой, к ним перпендикулярной. Какую линию описывает при этом основание перпендикуляра, опущенного из вершины прямого угла на гипотенузу прямоуголного треугольника?

Задача 4*(4 балла)*. Найти геометрическое место точек, сумма расстояний которых до катетов CA и CB равнобедренного прямоуголного треуголника ABC равна расстоянию до его гипотенузы AB.

Задача 5*(4 балла)*. Доказать, что шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро тетраэдра $ABCD$ и через середину противоположного ему ребра, пересекаются в одной точке.

Задача 6*(4 балла)*. Найти геометрическое место точек, делящих в одном и том же отношении отрезки с концами на двух скрещивающихся прямых.

Задача 7*(4 балла)*. К непересекающимся диагоналям куба, имеющим общее ребро, провести общий перпендикуляр. В каком отношении точки пересечения диагоналей с их общим перпендикуляром делят эти диагонали?

Задача 8*(4 балла)*. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC, а точка H обладает тем свойством, что $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$. Докажите, что H – точка пересечения высот треугольника ABC.

Задача 9*(4 балла)*. Десять векторов таковы, что длина суммы любых девяти их них меньше длины суммы всех десяти векторов. Докажите, что существует ось, проекция на которую каждого из десяти векторов положительна.

Задача 10*(4 балла)*. Дано восемь вещественных чисел a, b, c, d, e, f, g, h. Докажите, что хотя бы одно из шести чисел $ac+bd$, $ae+bf$, $ag+bh$, $ce+df$, $cg+dh$, $eg+fh$ неотрицательно.

Задача 11*(4 балла)*. Через фокус параболы проводятся всевозможные хорды. На каждой из них от фокуса в направлении более удаленного конца хорды откладывается отрезок, равный разности отрезков, на которые фокус делит хорду. Найти геометрическое место концов этих отрезков.

Задача 12*(4 балла)*. Доказать, что сумма обратных величин отрезков на которые фокус линии второго порядка делит проходящую через него хорду, есть величина постоянная.

Задача 13*(4 балла)*. Две вершины треугольника закреплены в точках A и B, а третья вершина C перемещается так, что угол при вершине A остается все время вдвое больше угла при вершине C. Найти линию, описываемую вершиной C.

Задача 14*(4 балла)*. Две вершины треугольника закреплены в фокусах гиперболы, а третья перемещается по ее ветви. Какую линию описывает при этом центр окружности, вписанной в треугольник?

Задача 15*(4 балла)*. Найти радиус наибольшей окружности, лежащей внутри линии второго порядка и касающейся этой линии в ее вершине, принадлежащей фокальной оси.

Задача 16*(4 балла)*. Доказать, что все ромбы, вписанные в один и тот же эллипс, описаны около одной и той же окружности.

Задача 17*(5 баллов)*. Доказать, что линия второго порядка, проходящая через все вершины треугольника и точку пересечения его высот, есть равносторонняя гипербола, если треугольник не прямоугольный.

Задача 18*(5 баллов)*. Доказать, что если две равносторонние гиперболы пересекаются в четырех точках, то каждая из этих точек есть точка пересения высот треугольника, образованного тремя другими точками.

Задача 19*(5 баллов)*. На плоскости нарисован эллипс. С помощью циркуля и линейки восстановите его оси.

Задача 20*(5 баллов)*. На плоскости нарисована гипербола. С помощью циркуля и линейки восстановите ее оси.

Задача 21*(5 баллов)*. На плоскости нарисована парабола. С помощью циркуля и линейки восстановите ее оси.

Задача 22*(10 баллов)*. Докажите, что существуют два равновеликих многоугольника такие, что один нельзя разрезать на куски, каждый кусок перенести параллельным переносом, и получить второй многоугольник.

Задача 23*(10 баллов)*. Докажите, что любые два равновеликих многоугольника равносоставны, т.е. один можно разрезать на куски, каждый кусок перенести параллельным переносом и поворотом, и получить второй многоугольник.

Задача 24*(15 баллов)*. Докажите, что в трехмерном пространстве существуют равновеликие, но не равносоставные многогранники.

Задача 25*(5 баллов)*.Медианы треугольника ABC разрезают его на 6 треугольников. Докажите, что центры описанных окружностей этих треугольников лежат на одной окружности.

Задача 26*(6-10 баллов)*. а) На плоскости даны n векторов, длина каждого из которых равна 1. Сумма всех n векторов равна нулевому вектору. Докажите, что векторы можно занумеровать так, чтобы при всех k = 1, 2, ..., n выполнялось следующее условие: длина суммы первых k векторов не превышает 3.

б) Докажите аналогичное утверждение для n векторов с суммой 0, длина каждого из которых не превосходит 1.

в) Можно ли заменить число 3 в пункте а) меньшим? Постарайтесь улучшить оценку и в пункте б).

Задача 27*(4 балла)*. Сетка линий состоит из концентрических окружностей с радиусами 1, 2, 3, 4,... и центром в точке O, прямой l, проходящей через точку O, и всевозможных касательных к окружностям, параллельных l. Вся плоскость разбита этими линиями на клетки, которые раскрашены в шахматном порядке. В цепочке точек каждые две соседние точки являются противоположными вершинами тҷмной клетки. Докажите, что все точки такой бесконечной цепочки лежат на одной параболе (поэтому рисунок словно соткан из светлых и тҷмных парабол).

Задача 28*(10 баллов)*. Существует ли выпуклый N-угольник, все стороны которого равны, а все вершины лежат на параболе y = x2, если а) N = 2011; б) N = 2012?