Министерство образования Российской Федерации

Гуманитарный университет

А.Я. Овсянников

Линейная алгебра

Допущено Министерством образования России
в качестве учебного пособия
для студентов высших учебных заведений

Екатеринбург
2004

ББК В14
О34

А. Я. Овсянников

Линейная алгебра: Учебное пособие для студентов высших учебных заведений/ Гуманитарный университет; Екатеринбург, 2004. 293 с.

Настоящее учебное пособие представляет собой курс линейной алгебры (с элементами аналитической геометрии), читавшийся автором в течение ряда лет на коммерческом факультете Гуманитарного университета г. Екатеринбурга. Наряду с традиционным материалом о матрицах, определителях, линейных пространствах над числовыми полями и их линейных отображениях, в пособии рассматриваются неотрицательные матрицы и приближенные методы решения систем линейных уравнений.

Пособие предназначено студентам высших учебных заведений, обучающимся на специальностях экономического профиля.

ОВСЯННИКОВ А.Я.
Линейная алгебра
Редактор
Подписано в печать . Формат $60 \times 84/16$
Бумага для множительных аппаратов. Печать .
Усл. печ. л. 18, 312. Уч.-изд. л. 18, 312. Тираж 1000 экз. Заказ
Издательство Гуманитарного университета
620049 Екатеринбург, ул. Шаумяна, 25
Отпечатано с оригинал-макета в
г. Екатеринбург,

ISBN

Содержание

Предисловие

Настоящее издание представляет собой изложение курса линейной алгебры, читаемого в Гуманитарном университете г. Екатеринбурга для студентов коммерческого факультета. Оно включает, вместе с традиционным материалом, часть аналитической геометрии, относящуюся к прямым и плоскостям, а также некоторые сведения, касающиеся неотрицательных матриц, приближенного решения систем линейных уравнений и оценки погрешностей при обращении матриц и решении систем линейных уравнений. Совсем не затрагиваются вопросы, относящиеся к линейному программированию. Основной текст издания включает введение и шесть глав. Необходимые для понимания основного текста понятия и факты, касающиеся множеств, отображений, многочленов и числовых полей, приведены в гл. 7. Издание охватывает несколько больший объем материала, чем реально удается прочитать в течение года. Программа курса и распределение материала по семестрам приведены в [15].

Для хорошего усвоения материала необходимо, кроме изучения теории и разбора примеров, самостоятельное решение задач. Для удобства использования настоящего издания задачник [17] подготовлен отдельно, а в конце каждой главы указаны номера задач, которые рекомендуется решить.

Главы делятся на параграфы, нумеруемые двумя индексами, из которых первый обозначает номер главы. Параграфы, в свою очередь, делятся на пункты, нумеруемые тремя индексами, из которых первые два обозначают номер параграфа. Все утверждения нумеруются в пределах параграфа тремя индексами, из которых снова первые два обозначают номер параграфа. Выделенные в строку формулы нумеруются в пределах главы двумя индексами, первый из них—номер главы; при этом введение рассматривается как глава с номером 0. Квадратные скобки в тексте используются для указания альтернатив. Конец доказательства обозначается символом □. Впервые определяемые термины выделяются в тексте *курсивом*, а формулировки утверждений—*наклонным* шрифтом.

Не все результаты снабжены полными доказательствами. Для некоторых утверждений доказательства проведены лишь в случаях небольшой размерности. Лектор может применять этот прием шире, заменяя приведенные полные доказательства более простыми вариантами в случае небольшой размерности.

При подготовке данного издания использовались источники [1]–[14] и [19]–[25]. По сравнению с первым изданием [16] добавлены примеры вычисления определителей, включая определитель Вандермонда, сведения о матрицах, используемые в эконометрическом анализе, о характеристических многочленах и идемпотентных линейных операторах и матрицах, а также исправлены замеченные неточности и опечатки.

Автор выражает глубокую благодарность Н.Ф. Сесекину, А.Г. Гейну и рецензенту рукописи за полезные замечания.

Компьютерный макет издания подготовлен автором с использованием системы печати математических текстов LaTeX.

Введение

Здесь очень кратко описывается построение математических моделей для решения задач из различных областей науки и приводятся некоторые экономические задачи, сводящиеся к решению систем линейных уравнений. Далее излагаются элементарные сведения о системах линейных уравнений и метод Гаусса–Жордана решения таких систем последовательным исключением неизвестных.

§ 0.1. Понятие о математических моделях

Применение математики в конкретных науках (таких, как физика, химия, экономика, биология, геология) может быть схематично описано следующим образом. Математика доставляет средства отчасти построения и главным образом исследования математических моделей задач конкретной науки. Такие задачи формулируются в терминах соответствующей науки ее специалистами. Затем строится математическая модель рассматриваемого явления[1], и изучаемая задача сводится к некоторой математической задаче или комплексу задач. Здесь вместе со специалистами конкретной науки работают профессиональные математики. Построение математической модели начинается с формулирова-

[1]Общее понятие математической модели описано, например, в [24], статья "Математическая модель", с. 343–344.

ния законов, связывающих основные объекты модели. Здесь требуется широкое знание фактов, относящихся к изучаемым явлениям, и глубокое проникновение в их взаимосвязи. Эта стадия завершается записью в математических терминах сформулированных качественных представлений о связях между объектами модели. После этого исследуются математические задачи, к которым приводят математические модели. Основным результатом здесь является получение в процессе анализа модели выходных данных или теоретических следствий для дальнейшего сопоставления с результатами наблюдений изучаемых явлений. На этом этапе важную роль приобретает математический аппарат, необходимый для анализа математической модели, и вычислительная техника. Здесь работают профессиональные математики или применяется соответствующее программное обеспечение. Затем выясняется, удовлетворяет ли принятая гипотетическая модель критерию практики, т.е. выясняется, согласуются ли результаты наблюдений с теоретическими следствиями модели. Производится анализ модели в связи с накоплением данных об изучаемых явлениях и модернизация модели. Далее результаты исследования математической модели интерпретируются в терминах конкретной науки.

Мы видим, что описанная выше схема включает четыре следующие этапа и математика используется лишь во втором и третьем из них.

Рассмотрим эти этапы на простейшем примере решения конкретной экономической задачи — задачи межотраслевого баланса с двумя продуктами.

Неформальная постановка задачи. Пусть имеются две отрасли производства, которые выпускают два вида продукции, причем для производства каждого из видов расходуется некоторое количество продукции обоих видов. Например, речь может идти о добыче угля и производстве электроэнергии: для того, чтобы добыть тонну угля, нужно затратить определенное количество электроэнергии и израсходовать определенное количество угля, а чтобы выработать киловатт-час электроэнергии, нужно сжечь некоторое количество угля и затратить какое-то количество электроэнергии. Известно, какое количество продукции каждого вида нужно затратить на единицу продукции каждого вида и конечный выпуск продукции каждого вида (какое количество должно остаться по окончании производства за вычетом нужд производства). Спрашивается, какое количество продукции каждого вида должно быть запланировано к выпуску, чтобы обеспечить конечный выпуск?

Построение математической модели. Обозначим конечный выпуск продукции первого вида через y_1 и конечный выпуск продукции второго вида — через y_2. Пусть на производство единицы продукции первого вида затрачивается a_{11} единиц продукции первого вида и a_{21} единиц продукции второго вида и на производство единицы продукции второго вида затрачивается a_{12} единиц продукции первого вида и a_{22} единиц продукции второго вида. Разумеется, из соображений здравого смысла, в частности, чтобы производство не остановилось, введенные числа должны удовлетворять следующим ограничениям:

$$y_1 > 0,\ y_2 > 0, \tag{0.1}$$

$$0 \le a_{11} < 1,\ 0 \le a_{12} < 1,\ 0 \le a_{21} < 1,\ 0 \le a_{22} < 1, \tag{0.2}$$

$$a_{11} + a_{12} < 1,\ a_{21} + a_{22} < 1. \tag{0.3}$$

Обозначим планируемый выпуск продукции первого и второго типа через x_1 и x_2 соответственно. Тогда количество продукции первого вида, расходуемое на производство x_1 единиц продукции первого вида, равно $x_1 a_{11}$, а на производство x_2 единиц продукции второго вида потребуется $x_2 a_{12}$ единиц продукции первого вида. Таким образом, останется $x_1 - x_1 a_{11} - x_2 a_{12}$ единиц продукции первого вида, и мы получаем уравнение $x_1 - x_1 a_{11} - x_2 a_{12} = y_1$. Аналогично, рассматривая продукцию второго вида, приходим к уравнению $x_2 - x_1 a_{21} - x_2 a_{22} = y_2$. Итак, требуется решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_1 a_{11} - x_2 a_{12} = y_1; \\ x_2 - x_1 a_{21} - x_2 a_{22} = y_2. \end{cases} \tag{0.4}$$

Решение математической задачи математическими методами. Перепишем систему (0.4), приведя в каждом уравнении подобные члены:

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 = y_1; \\ -a_{21}x_1 + (1 - a_{22})x_2 = y_2. \end{cases} \tag{0.5}$$

Решим полученную систему линейных уравнений методом исключения неизвестных. Чтобы исключить x_2, умножим первое уравнение на $1 - a_{22}$, второе на a_{12} и сложим полученные уравнения. Слагаемые, содержащие x_2, взаимно уничтожаются, и мы получаем следующее уравнение относительно x_1:

$$((1 - a_{11})(1 - a_{22}) - a_{12}a_{21})x_1 = (1 - a_{22})y_1 + a_{12}y_2. \tag{0.6}$$

Остается убедиться, что коэффициент при x_1 отличен от нуля. Из неравенств (0.3) следует $1 - a_{11} > a_{12}$ и $1 - a_{22} > a_{21}$. Таким образом, упомянутый коэффициент больше нуля, и x_1 определяется из (0.6) однозначно, причем его значение положительно. Аналогично доказывается, что x_2 определяется из системы (0.5) однозначно, и его значение положительно. Явные выражения для x_1 и x_2 здесь для нас не важны, и выписать их предоставляется заинтересованному читателю.

Интерпретация результатов. Значения x_1 и x_2 получились, как отмечено в предыдущем пункте, положительными и могут быть взяты в качестве значений планируемого выпуска продукции первого и второго типа.

§ 0.2. Некоторые задачи, приводящие к системам линейных уравнений

Задача межотраслевого баланса с n продуктами. Задача, рассмотренная в предыдущем параграфе для двух отраслей производства и двух продуктов, реально рассматривается обычно для сотен и тысяч продуктов. Сформулируем ее в общем случае для произвольного числа n продуктов. Пусть имеются n отраслей производства, которые выпускают n видов продукции, причем для производства каждого из видов расходуется некоторое количество продукции каждого вида. При этом предполагается, что каждая отрасль производства выпускает только один продукт и нет притока продуктов извне или потока продуктов вовне. Рассматривается определенный временной интервал, например месяц. Спрашивается, какое количество продукции каждого вида должно быть запланировано к выпуску в течение месяца, чтобы обеспечить выпуск заданного количества продуктов каждого вида, предназначенных для потребления и накопления?

Обозначим конечный выпуск продукции i-го вида через y_i ($i = 1, 2, \ldots, n$). Ясно, что $y_i > 0$ при всех $i = 1, 2, \ldots, n$. Упорядоченный набор чисел $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется *вектором конечного потребления.* Пусть на производство единицы продукции j-го вида затрачивается a_{ij} единиц продукции i-го вида

$(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Мы получаем следующую таблицу чисел:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{0.7}$$

Такие таблицы называются *квадратными матрицами порядка* n. Матрица (0.7) называется *матрицей производственных затрат.* Числа в ней должны неотрицательными. Обозначим планируемый выпуск продукции i-го вида через x_i. Упорядоченный набор чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *вектором валового выпуска.* Часть произведенной продукции расходуется в процессе производства. Именно, количество продукции i-го вида, расходуемое на производство x_j единиц продукции j-го вида, равно $x_j a_{ij}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом, останется $x_i - x_1 a_{i1} - x_2 a_{i2} - \ldots - x_n a_{in}$ единиц продукции i-го вида, и мы получаем уравнение

$$x_i - x_1 a_{i1} - x_2 a_{i2} - \ldots - x_n a_{in} = y_i. \tag{0.8}$$

Итак, требуется решить систему линейных уравнений (0.8) при $i = 1, 2, \ldots, n$. Ее можно переписать следующим образом:

$$\begin{cases} (1 - a_{11})x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1\,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n = y_1; \\ -a_{11}x_1 + (1 - a_{12})x_2 - \ldots - a_{1\,n-1}x_{n-1} - a_{1n}x_n = y_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -a_{11}x_1 - a_{12}x_2 - \ldots - a_{1\,n-1}x_{n-1} + (1 - a_{1n})x_n = y_n. \end{cases} \tag{0.9}$$

Система линейных уравнений (0.9) должна иметь решение из неотрицательных чисел для любых неотрицательных $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Матрицы, удовлетворяющие этому условию, рассматриваются в п. 6.2.3.

Система линейных уравнений (0.9) с указанной выше интерпретацией матрицы A и векторов $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$

называется *простой линейной моделью производства* (или моделью Леонтьева).

Простая линейная модель обмена[1] **(модель международной торговли).**

Пусть страны $C_1, C_2, \ldots, C_n$ торгуют друг с другом, используя единую денежную единицу. Свой доход $x_j \geq 0$ в торговле страна C_j получает от продажи своих товаров как внутри себя, так и другим странам C_i. Модель замкнута, импорт и экспорт в другие страны из $C_1, C_2, \ldots, C_n$ не производится. Предположим, что часть дохода x_j, которая расходуется в стране C_j на импорт из страны C_i, является фиксированным числом a_{ij}. Мы получаем квадратную матрицу (0.7), называемую в данном случае *матрицей обмена.* В ней для всех $1 \leq i, j \leq n$ имеем

$$a_{ij} \geq 0 \text{ и } a_{1j} + a_{2j} + \ldots + a_{nj} = 1. \tag{0.10}$$

Матрицы со свойством (0.10) называются[2] *матрицами обмена.* Требуется для каждой страны C_i определить доход x_i. Этот доход складывается из доходов, полученных от продажи товаров на внутреннем и внешнем рынках. В силу сделанного предположения стоимость экспорта из C_i в C_j будет равна $a_{ij}x_j$. Поэтому суммарный доход x_i удовлетворяет уравнению

$$x_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n. \tag{0.11}$$

Таким образом, для определения доходов всех стран нужно решить систему линейных уравнений (0.11) при $i = 1, 2, \ldots, n$. Для решения таких и несколько более общих систем линейных уравнений в §4.2 излагается необходимый теоретический материал. Система линейных уравнений (0.11) при $i = 1, 2, \ldots, n$ определяет *простую линейную модель обмена.* То, что указанная система всегда имеет решение, обеспечивается теоремой 6.2.3 из п. 6.2.2.

[1] В первом издании настоящего учебника [16] использовалось название "Задача о доходах при торговле между государствами".

[2] В издании [16] употреблялся термин "стохастическая по столбцам матрица".

§ 0.3. Метод Гаусса–Жордана решения систем линейных уравнений

0.3.1. Системы линейных уравнений

Система k линейных алгебраических уравнений с n неизвестными может быть записана так:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{0.12}$$

Здесь числа a_{ij} $(i = 1, 2, \ldots, k,\ j = 1, 2, \ldots, n)$ называются *коэффициентами* системы (0.12), числа $b_i (i = 1, 2, \ldots, k)$ — ее *свободными членами*. Они предполагаются известными. *Частным решением* системы (0.12) называется упорядоченный набор $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ чисел, такой, что при подстановке в каждое ее уравнение вместо неизвестных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ соответственно это уравнение превращается в верное равенство. Решить систему (0.12) означает найти все ее частные решения или доказать, что их не существует. Множество всех частных решений данной системы линейных уравнений называется ее *общим решением*.

Система линейных уравнений называется *совместной*, если она имеет по крайней мере одно частное решение (т.е. ее общее решение не пусто); в противном случае говорят, что система *несовместна*. Система, имеющая единственное решение, называется *определенной*, а система, имеющая более одного решения, — *неопределенной*. Мы увидим, что неопределенная система всегда имеет бесконечно много решений.

Две системы линейных уравнений называются *равносильными*, если они имеют совпадающие общие решения. Это означает, что каждое частное решение первой системы является решением второй и, обратно, каждое частное решение второй системы будет решением первой. Любые две несовместные системы по определению равносильны.

Рассмотрим следующие *элементарные преобразования* систем линейных уравнений.

I. Умножение одного уравнения системы на ненулевое число.

II. Прибавление к одному уравнению другого, умноженного на число.

Теорема 0.3.1. *Если одна система линейных уравнений получена из другой конечным числом элементарных преобразований, то такие системы равносильны.*

Доказательство. Достаточно убедиться, что одно элементарное преобразование системы линейных уравнений приводит к равносильной ей системе. Для преобразования вида I это очевидно. Рассмотрим систему линейных уравнений, полученную из системы (0.12) преобразованием вида II, а именно прибавлением к i-му уравнению j-го, умноженного на число t. Тогда все уравнения этих двух систем, кроме i-го, одинаковы, а i-е уравнение второй системы имеет вид

$$(a_{i1}+ta_{j1})x_1+(a_{i2}+ta_{j2})x_2+\ldots+(a_{in}+ta_{jn})x_n=b_i+tb_j. \quad (0.13)$$

Покажем, что каждое решение системы (0.12) является решением полученной системы. Пусть $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$ — произвольное решение системы (0.12). По определению, при подстановке чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ вместо неизвестных в любое уравнение второй системы, кроме i-го, получается верное равенство. При подстановке в левую часть i-го уравнения имеем

$$\begin{gathered}(a_{i1}+ta_{j1})c_1+(a_{i2}+ta_{j2})c_2+\ldots+(a_{in}+ta_{jn})c_n=\\ =a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\ldots+a_{in}c_n+ta_{j1}c_1+ta_{j2}c_2+\ldots+ta_{jn}c_n=\\ =b_i+tb_j,\end{gathered}$$

ибо при подстановке чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ вместо неизвестных в i-е и j-е уравнения системы (0.12) получаются верные равенства. Итак, и i-е уравнение второй системы превращается в верное равенство при подстановке чисел $c_1, c_2, \ldots, c_n$ вместо неизвестных. Доказано, что каждое решение системы (0.12) является решением второй системы. Обратное следует из того, что система (0.12) может быть получена из второй системы преобразованием типа II, а именно прибавлением к i-му уравнению j-го, умноженного на число $-t$. $\square$

0.3.2. Метод Гаусса–Жордана на примерах

Метод Гаусса–Жордана основывается на последовательной замене данной системы линейных уравнений равносильными ей системами более простого вида, получаемыми с помощью преобразований вида I или II, введенных в п. 0.3.1. В итоге получается система, где одни неизвестные выражаются через другие (тогда система неопределенная), или все неизвестные равны каким-то числам (тогда система определенная), либо получается несовместная система, равносильная данной (тогда система несовместна). Рассмотрим использование метода Гаусса–Жордана на нескольких примерах. Для удобства записи вместо системы уравнений будем рассматривать ее *расширенную матрицу*, т.е. таблицу, каждая строка которой содержит коэффициенты и свободные члены одного уравнения. Числа, из которых состоит матрица, принято называть ее *элементами*. Расширенная матрица системы (0.12) имеет вид

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} & b_k \end{array}\right).$$

Преобразования вида I и II из п. 0.3.1 применительно к расширенным матрицам систем сводятся к умножению элементов одной строки на ненулевое число и к прибавлению элементов j-й строки, умноженных на число, к элементам i-й строки. Кроме того, часто приходится переставлять строки матрицы, что очевидным образом не изменяет системы линейных уравнений. Указанные преобразования строк матрицы будем называть *элементарными.*

Пример 1. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 = 3; \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 = 7; \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 = 13. \end{cases} \tag{0.14}$$

Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее. Вторая матрица получается из первой прибавлением ко второй строке первой, умноженной на -2, и прибавлением к третьей строке первой, умноженной на -3. Третья матрица получается из второй прибавлением к первой строке второй, умноженной на -2, а к третьей — второй, умноженной на -4.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 6 & 8 & 2 & 5 & 7 \\ 9 & 12 & 3 & 10 & 13 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Запишем систему линейных уравнений, соответствующую последней расширенной матрице.

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + x_3 = 1; \\ x_4 = 1. \end{cases} \tag{0.15}$$

Системы (0.14) и (0.15) равносильны согласно теореме 0.3.1. Однако систему (0.15) можно переписать в виде

$$\begin{cases} x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2; \\ x_4 = 1, \end{cases} \tag{0.16}$$

который естественно также называть общим решением системы (0.14) (в виде системы линейных уравнений), ибо в (0.16) неизвестное x_3 выражено через x_1 и x_2, а x_4 равно 1. Чтобы получить любое частное решение системы (0.14), нужно придать неизвестным x_1 и x_2 любые значения и вычислить x_3 по первой формуле из (0.16), а x_4 положить равным 1. Примеры частных решений системы (0.14): $(0,0,1,1)$; $(1,2,-10,1)$. Общее решение системы (0.14) можно записать в виде $\{(a,b,1-3a-4b,1) \mid a,b \in \mathbb{R}\}$. В известном смысле (0.16) есть система наиболее простого вида, равносильная исходной системе (0.14).

Пример 2. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 2; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 5; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 3. \end{cases} \tag{0.17}$$

Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее. Вторая матрица получается из первой прибавлением ко второй строке первой, умноженной на -2, и перестановкой первой и второй строк. Третья получается из второй прибавлением ко второй строке первой, умноженной на -3, и к третьей строке первой, умноженной на -5. Четвертая матрица получается из третьей прибавлением к третьей строке второй, умноженной на -1.

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 7 & -4 & 1 & 3 & 5 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 3 & -5 & 2 & 4 & 2 \\ 5 & 7 & -4 & -6 & 3 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 6 & -3 & -5 & 1 \\ 0 & -23 & 11 & 19 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

Система линейных уравнений, соответствующая четвертой матрице, очевидным образом несовместна, поскольку ее последнее уравнение имеет вид $0x_1 + 0x_2 + 0x_3 + 0x_4 = -1$. Таким образом, исходная система (0.17) несовместна. Ее общее решение — пустое множество.

Пример 3. Решить систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 = 8; \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 9; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 7; \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 = 12. \end{cases} \tag{0.18}$$

Запишем расширенную матрицу системы и преобразуем ее. Вторая матрица получается из первой прибавлением к первой строке четвертой, умноженной на -1, и обнулением первых элементов второй, третьей и четвертой строк при помощи первой. Третья получается из второй умножением второй строки на $\frac{1}{5}$, прибавлением к третьей строки новой второй, умноженной на -3, и прибавлением к четвертой строке новой второй, умноженной на -4. Четвертая матрица получается из третьей прибавлением ко второй строке четвертой, умноженной на -3, умножением четвертой строки на -1, перестановкой второй и четвертой строк и отбрасыванием нулевой третьей строки. Пятая матрица получается из четвертой умножением третьей строки на $-\frac{1}{7}$ и обнулением элементов третьего столбца в первой и второй строках. Последняя матрица получается обнулением элемента в первой строке и втором столбце.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -8 & 8 \\ 4 & 3 & -9 & 9 \\ 2 & 3 & -5 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 15 & -5 & 25 \\ 0 & 9 & -3 & 15 \\ 0 & 11 & -6 & 16 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Мы видим, что система (0.18) имеет единственное решение $(3, 2, 1)$. Ее общее решение состоит из одного элемента.

В разобранных примерах расширенная матрица системы сначала приводится к ступенчатому виду, когда нули в первом, втором и других столбцах образуют “ступеньки” невозрастающей высоты, а над каждым столбиком из нулей стоит единица. Затем и над этими единицами получаются нули. На этом преобразования матрицы заканчиваются, и неизвестные, соответствующие столбцам, в которых есть только одна единица и остальные нули, могут быть выражены через другие неизвестные, чем завершается процесс решения.

0.3.3. Метод Гаусса–Жордана в общем виде

Опишем теперь метод Гаусса–Жордана в общем виде. Применим его к системе (0.12). Запишем расширенную матрицу системы, заменив для единообразия свободные члены b_i на $a_{i\,n+1}$. Предположим, что $a_{11} \neq 0$; это предположение не ограничивает общности, если принять во внимание возможность перестановки уравнений: в каком-нибудь из них коэффициент при x_1 обязательно отличен от нуля. Умножив первую строку исходной матрицы на a_{11}^{-1}, получим первую строку второй матрицы (символы вверху в скобках обозначают номер шага преобразований матрицы), так что $a_{1j}^{(1)} = a_{1j}/a_{11}$, $j = 2, \dots, n+1$. Остальные строки получаются прибавлением к i-й строке 1-й, умноженной на $-a_{i1}$ $(i = 2, \dots, k)$, т.е. $a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}a_{1j}^{(1)}$ $(i = 2, \dots, k,\ j = 2, \dots, n+1)$.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & . & . & . & . & . & . & a_{1n} & a_{1\,n+1} \\ a_{21} & . & . & . & . & . & . & a_{2n} & a_{2\,n+1} \\ a_{31} & . & . & . & . & . & . & a_{3n} & a_{3\,n+1} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ a_{k1} & . & . & . & . & . & . & a_{kn} & a_{k\,n+1} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & \dots & a_{1r_2}^{(1)} & . & . & . & . & a_{1n}^{(1)} & a_{1\,n+1}^{(1)} \\ 0 & \dots & a_{2r_2}^{(1)} & . & . & . & . & a_{2n}^{(1)} & a_{2\,n+1}^{(1)} \\ 0 & \dots & a_{3r_2}^{(1)} & . & . & . & . & a_{3n}^{(1)} & a_{3\,n+1}^{(1)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & a_{kr_2}^{(1)} & . & . & . & . & a_{kn}^{(1)} & a_{k\,n+1}^{(1)} \end{pmatrix}.$$

Обратимся к полученной матрице и найдем первый слева столбец, в котором не все элементы в строках со 2-й по k-ю равны нулю[1]. Пусть r_2 — номер этого столбца. Как и выше, без ограничения общности считаем $a_{2r_2}^{(1)} \neq 0$. Таким образом, во второй матрице элементы в строках со 2-й по k-ю и столбцах с 1-го по $(r_2 - 1)$-й равны нулю. Теперь применяем преобразования, подобные тем, что были только что описаны, к строкам второй матрицы, начиная со второй. Делим вторую строку на $a_{2r_2}^{(1)}$ и получаем нули под единицей в столбце r_2; в итоге имеем такую матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & \dots & a_{1r_2}^{(1)} & \dots & a_{1r_3}^{(1)} & . & . & a_{1n}^{(1)} & a_{1\,n+1}^{(1)} \\ 0 & \dots & 1 & \dots & a_{2r_3}^{(2)} & . & . & a_{2n}^{(2)} & a_{2\,n+1}^{(2)} \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{3r_3}^{(2)} & . & . & a_{3n}^{(2)} & a_{3\,n+1}^{(2)} \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . \\ 0 & \dots & 0 & \dots & a_{kr_2}^{(2)} & . & . & a_{kn}^{(2)} & a_{k\,n+1}^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Здесь, как и для второй матрицы, находим первый слева столбец, в котором не все элементы в строках с 3-й по k-ю равны нулю. Пусть r_3 — номер этого столбца. Применяя к третьей матрице описанные преобразования и продолжая далее применять подобные преобразования к остальным строкам получающихся матриц, через $u - 1$ шаг мы придем к следующей матрице так называемого *ступенчатого вида*:

[1]Часто оказывается, что это второй столбец, однако пример 1, разобранный в п. 0.3.2, показывает, что это не всегда так.

$$\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & \dots & a^{(1)}_{1r_2} & \dots & a^{(1)}_{1r_3} & \dots & a^{(1)}_{1r_u} & \dots & a^{(1)}_{1n} & a^{(1)}_{1\,n+1} \\
0 & \dots & 1 & \dots & a^{(2)}_{2r_2} & \dots & a^{(2)}_{2r_u} & \dots & a^{(2)}_{2n} & a^{(2)}_{2\,n+1} \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & a^{(3)}_{3r_u} & \dots & a^{(3)}_{3n} & a^{(3)}_{3\,n+1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a^{(u-1)}_{ur_u} & \dots & a^{(u-1)}_{kn} & a^{(u-1)}_{k\,n+1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}\right).$$

В последней матрице $a^{(u-1)}_{ur_u} \neq 0$, так что на месте этого элемента можно получить 1, умножив u-ю строку на $1/a^{(u-1)}_{ur_u}$, а строки с $u+1$-й по k-ю состоят целиком из нулей или отсутствуют. На этом заканчивается так называемый *прямой ход* в методе Гаусса–Жордана. Если $r_u = n+1$, то на этом вычисления заканчиваются: в системе, определяемой последней матрицей, u-е уравнение имеет вид $0x_1 + \ldots + 0x_n = a^{(u-1)}_{ur_u} \neq 0$, т.е. эта система несовместна; вместе с ней несовместна и равносильная ей система (0.12). В противном случае выполняется так называемый *обратный ход*, который состоит в обнулении элементов, расположенных над единицами в столбцах r_u, $r_{u-1}, \ldots, r_2$. Удобно делать это, начиная с последней строки. В итоге получаем следующую финальную матрицу (над некоторыми столбцами указаны их номера):

$$\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccc}
 & & r_2 & & r_3 & & r_u & & \phantom{a^{(fin)}_{1n}} & \phantom{a^{(fin)}_{1\,n+1}}
\end{array} \\
\left(\begin{array}{cccccccccc}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a^{(fin)}_{1n} & a^{(fin)}_{1\,n+1} \\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & a^{(fin)}_{2n} & a^{(fin)}_{2\,n+1} \\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & a^{(fin)}_{3n} & a^{(fin)}_{3\,n+1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & a^{(u)}_{kn} & a^{(u)}_{k\,n+1} \\
. & . & . & . & . & . & . & . & . & . \\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0
\end{array}\right)
\end{array}.$$

В системе линейных уравнений, определяемой этой матрицей, неизвестные $x_1, x_{r_2}, \ldots, x_{r_u}$ выражаются через остальные неизвестные, и процесс решения системы (0.12) методом Гаусса–Жордана завершается.

Следует отметить, что описанный метод не всегда удобен при ручных вычислениях, так как иногда приходится делить на большие числа и вести вычисления с дробями. Чтобы почувствовать это, читателю рекомендуется разобрать примеры 1–3, в точности следуя приведенному алгоритму. Однако при решении систем, у которых коэффициенты и свободные члены — целые числа, используя свойства целых чисел, указанные трудности всегда можно обойти (как это было сделано в примере 2 из п. 0.3.2).

Задачи: [17], №1,2.

Глава 1

Матрицы и определители

В этой главе излагаются элементарные сведения о матрицах и определителях—важных математических объектах, играющих, в частности, существенную роль при решении и исследовании систем линейных уравнений.

§ 1.1. Матрицы

1.1.1. Понятие матрицы

Матрицей размеров $m \times k$ называется прямоугольная таблица из чисел, имеющая m строк и k столбцов. Числа, из которых состоит матрица, называются ее *элементами*[1]. Принято записывать

[1] В первом издании настоящего учебника [16] использовался термин "коэффициент".

матрицы размеров $m \times k$ в следующем виде:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mk} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Обозначать матрицы будем преимущественно заглавными латинскими буквами, полужирным шрифтом. Примеры матриц:

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \pi & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, \boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \pi \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.2}$$

$$\boldsymbol{Z} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & \pi & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Кратко будем записывать матрицу (1.1) в виде $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$. Матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$ и $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times l}$ называются *равными*, если их размеры совпадают (т.е. $m = n$, $k = l$) и элементы, стоящие на соответствующих местах, также совпадают: $a_{ij} = b_{ij}$ при всех i, j, пробегающих независимо друг от друга значения $i = 1, \ldots, m$ и $j = 1, \ldots, k$.

Множество всех матриц размеров $m \times k$ с элементами из фиксированного числового поля $\mathbb{F}$ будем обозначать через $\mathbb{F}^{m\times k}$.

Если в матрице (1.1) зафиксировать какие-либо строки и столбцы и рассмотреть матрицу, образованную элементами, стоящими на пересечении выделенных строк и столбцов, то полученная матрица называется *подматрицей* исходной матрицы. Например, в (1.2) и (1.3) матрицы $\boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{Z}$ являются подматрицами матрицы $\boldsymbol{X}$.

Матрица $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$ называется *строкой* [соответственно *столбцом*], если $m = 1$ [соответственно $k = 1$]. Строки и столбцы будем обозначать малыми буквами.

Матрица называется *квадратной*, если в ней число строк равно числу столбцов. Если матрица $\boldsymbol{A}$ имеет размеры $m \times m$, то ее называют квадратной матрицей *порядка* m и обозначают так: $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_m$. Элементы $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{mm}$ образуют *главную диагональ* квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$, а элементы $a_{m1}, a_{m-1\,2}, \ldots, a_{1m}$ — *побочную диагональ* матрицы $\boldsymbol{A}$. Квадратная матрица называется *верхнетреугольной* [соотв. *нижнетреугольной*], если все ее элементы, стоящие ниже [соотв. выше] главной диагонали, равны нулю. Квадратная матрица называется *треугольной*, если она верхнетреугольная или нижнетреугольная. Квадратная матрица называется *диагональной*, если она верхнетреугольная и нижнетреугольная, т.е. все элементы вне главной диагонали равны нулю. Квадратная матрица называется *скалярной*, если она диагональна и все элементы на главной диагонали одинаковы. Скалярная матрица порядка m с элементами 1 на главной диагонали называется *единичной матрицей порядка* m и обозначается через $\boldsymbol{E}_m$.

1.1.2. Линейные операции с матрицами

Здесь мы рассмотрим сложение матриц и умножение матрицы на число. Сложение определено только для матриц одинаковых размеров. Пусть $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{m\times k}$, $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ и $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$. *Суммой* матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ называется матрица, обозначаемая через $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ и имеющая вид $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{m\times k}$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$: $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, k$. *Произведением* матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$ и числа t называется матрица таких же размеров, как матрица $\boldsymbol{A}$, обозначаемая через $\boldsymbol{D} = t\boldsymbol{A}$ и имеющая вид $\boldsymbol{D} = (d_{ij})_{m\times k}$, каждый элемент которой получается умножением соответствующего элемента матрицы $\boldsymbol{A}$ на число t: $d_{ij} = ta_{ij}$, $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, k$. Для сложения матриц и умножения матрицы на число выполняются следующие проверяемые очевидным образом свойства.

1. Для любых матриц $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ одинаковых размеров справедливо равенство $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.

2. Для любых матриц $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ одинаковых размеров справедливо равенство $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$.

3. Существует матрица $\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}_{m\times k}$ размеров $m\times k$ такая, что для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ таких же размеров справедливо равенство $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$.

4. Для любой матрицы $\boldsymbol{A}_{m\times k}$ существует матрица $\boldsymbol{B}$ тех же размеров такая, что справедливо равенство $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}_{m\times k}$.

5. Для любых матриц $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ одинаковых размеров и любого числа t справедливо равенство $t(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=t\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{B}$.

6. Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ и любых чисел s,t справедливо равенство $(s+t)\boldsymbol{A}=s\boldsymbol{A}+t\boldsymbol{A}$.

7. Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ и любых чисел s,t справедливо равенство $s(t\boldsymbol{A})=(st)\boldsymbol{A}=t(s\boldsymbol{A})$.

8. Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ справедливо равенство $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$.

Свойства 1 и 2 следуют из соответствующих свойств сложения чисел. В свойстве 3 в качестве $\boldsymbol{O}_{m\times k}$ следует взять матрицу размеров $m\times k$ с нулевыми элементами; такая матрица называется *нулевой*. В свойстве 4 в качестве $\boldsymbol{B}$ можно взять матрицу с элементами, противоположными элементам матрицы $\boldsymbol{A}$; такая матрица называется *противоположной* матрице $\boldsymbol{A}$. Свойства 5–8 обеспечиваются соответствующими свойствами чисел.

Заметим, что скалярная матрица порядка n с числом a на главной диагонали может быть представлена как $a\boldsymbol{E}_n$, где $\boldsymbol{E}_n$— единичная матрица порядка n.

Пусть $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_s$—матрицы размеров $m\times k$, $t_1,\ldots,t_s$—некоторые числа. Матрица $t_1\boldsymbol{A}_1+\ldots+t_s\boldsymbol{A}_s$ называется *линейной комбинацией* матриц $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_s$ с элементами $t_1,\ldots,t_s$. Если матрица $\boldsymbol{B}$ равна линейной комбинации матриц $\boldsymbol{A}_1,\ldots,\boldsymbol{A}_s$ с некоторыми элементами, то говорят, что $\boldsymbol{B}$ *линейно выражается* через указанные матрицы. Обозначим через $\boldsymbol{E}^{(i,j)}_{m\times k}$ матрицу размеров

$m \times k$, у которой все элементы равны нулю, за исключением элемента на пересечении i-й строки и j-го столбца, который равен единице. Такие матрицы называются *матричными единицами* размеров $m \times k$. Для матрицы $\boldsymbol{A}_{m\times k} = (a_{ij})$ справедливо очевидное равенство (в котором используется краткое обозначение $\sum_{r=1}^{s} x_r$ для суммы $x_1 + \ldots + x_s$), которое показывает, что любая матрица размеров $m \times k$ линейно выражается через матричные единицы размеров $m \times k$:

$$\boldsymbol{A}_{m\times k} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\boldsymbol{E}_{m\times k}^{(i,j)}. \tag{1.4}$$

1.1.3. Умножение матриц

Говорят, что размеры матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times l}$ *согласованы*, если $k = n$, т.е. число столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ равно числу строк матрицы $\boldsymbol{B}$. Заметим, что при этом размеры матриц $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A}$ могут не быть согласованы. *Произведение матриц* $\boldsymbol{AB}$ определено только тогда, когда размеры матриц $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ согласованы, и по определению $\boldsymbol{AB} = (c_{ij})_{m\times l}$, где $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ik}b_{kj}$ для всех $i = 1, \ldots, m$; $j = 1, \ldots, l$. Используя краткое обозначение для суммы, элемент c_{ij} можно записать в виде

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{k} a_{ir}b_{rj}. \tag{1.5}$$

Формула (1.5) дает выражение для произведения строки $(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{ik})$ на столбец $\begin{pmatrix} b_{1j} \\ b_{2j} \\ \ldots \\ b_{kj} \end{pmatrix}$. Рассмотрим примеры.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 20 \\ 9 & 16 & 70 \\ 8 & 7 & 81 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 63 & 54 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 5 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что умножение матриц *некоммутативно*, т.е. не всегда $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA}$. Более того, оба эти произведения не всегда определены.

Умножение матриц обладает следующими свойствами[1].

9. Для любых матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{k\times l}$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{l\times n}$ справедливо равенство $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

Для доказательства необходимо воспользоваться следующим свойством суммирования: $\sum_{s=1}^{u}\sum_{t=1}^{v} x_{st} = \sum_{t=1}^{v}\sum_{s=1}^{u} x_{st}$. Пусть $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{D} = (d_{ij})_{m\times l}$, $\boldsymbol{BC} = \boldsymbol{F} = (f_{ij})_{k\times n}$, $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{G} = (g_{ij})_{m\times n}$ и $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC}) = \boldsymbol{H} = (h_{ij})_{m\times n}$. Возьмем в матрице $\boldsymbol{G}$ произвольный элемент g_{ij} и преобразуем его:

$$g_{ij} = \sum_{r=1}^{l} d_{ir}c_{rj} = \sum_{r=1}^{l}(\sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sr})c_{rj} = \sum_{r=1}^{l}\sum_{s=1}^{k} a_{is}b_{sr}c_{rj} =$$
$$\sum_{s=1}^{k}\sum_{r=1}^{l} a_{is}b_{sr}c_{rj} = \sum_{s=1}^{k} a_{is}(\sum_{r=1}^{l} b_{sr}c_{rj}) = \sum_{s=1}^{k} a_{is}f_{sj} = h_{ij}.$$

Таким образом, требуемое равенство доказано.

10. Для любых матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{k\times l}$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{k\times l}$ справедливо равенство $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) = \boldsymbol{AB} + \boldsymbol{AC}$.

11. Для любых матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{m\times k}$, $\boldsymbol{C} = (c_{ij})_{k\times l}$ справедливо равенство $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{AC} + \boldsymbol{BC}$.

[1] Нумерация этих свойств продолжает нумерацию свойств линейных операций.

12. Для любых матриц $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{k\times l}$ и любого числа t справедливы равенства $(t\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = t(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{A}(t\boldsymbol{B})$.

13. Для любой матрицы $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$ и единичных матриц $\boldsymbol{E}_k, \boldsymbol{E}_m$ справедливы равенства $\boldsymbol{AE}_k = \boldsymbol{E}_m\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

Эти свойства получаются из определения произведения матриц несложными рассуждениями, проведение которых оставляем в качестве упражнения читателю.

Рассмотрим матричную запись системы линейных уравнений в общем виде (0.12). Введем матрицу $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{k\times n}$, состоящую из элементов при неизвестных в системе (0.12) (она называется *основной матрицей* этой системы), столбец $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ неизвестных и столбец $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_k \end{pmatrix}$ свободных членов. Тогда система (0.12) записывается в матричном виде так:

$$\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}. \tag{1.6}$$

Матрица $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$, полученная приписыванием к основной матрице системы линейных уравнений столбца ее свободных членов, была названа в п. 1.3.2 расширенной матрицей системы.

Рассмотрим квадратные матрицы порядка n. Их можно складывать и умножать, в частности возводить в степень с натуральным показателем. Пусть $\boldsymbol{A}$—квадратная матрица порядка n и $f(x) = a_0x^r + a_1x^{r-1} + \ldots + a_{r-1}x + a_r$—многочлен степени r. Значение многочлена от матрицы определяется так: $f(\boldsymbol{A}) = a_0\boldsymbol{A}^r + a_1\boldsymbol{A}^{r-1} + \ldots + a_{r-1}\boldsymbol{A} + a_r\boldsymbol{E}_n$. Рассмотрим пример. Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $f(\boldsymbol{A}) =$ $= \boldsymbol{A}^2 - 3\boldsymbol{A} + 4\boldsymbol{E}_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Можно рассматривать и матричные многочлены вида $\boldsymbol{F}(x) = \boldsymbol{A}_0 x^r + \boldsymbol{A}_1 x^{r-1} + \ldots + \boldsymbol{A}_{r-1} x + \boldsymbol{A}_r$, где $\boldsymbol{A}_0, \boldsymbol{A}_1, \ldots, \boldsymbol{A}_r$ — фиксированные квадратные матрицы порядка n. Значение такого многочлена от квадратной матрицы $\boldsymbol{B}$ порядка n вычисляется по формуле $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{A}_0 \boldsymbol{B}^r + \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{B}^{r-1} + \ldots + \boldsymbol{A}_{r-1} \boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}_r$. Рассмотрим пример. Пусть $\boldsymbol{F}(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{C}) =$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

1.1.4. Транспонирование матриц и переход к сопряженной матрице

Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}$. *Транспонированной* к матрице $\boldsymbol{A}$ называется матрица, полученная из $\boldsymbol{A}$ заменой строк на столбцы. Она обозначается через $\boldsymbol{A}^\top$ и получается по формуле

$$\boldsymbol{A}^\top = (a_{ji})_{k\times m} \text{ , если } \boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m\times k}. \tag{1.7}$$

Рассмотрим примеры.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 20 \\ 9 & 16 & 70 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 16 \\ 20 & 70 \end{pmatrix}.$$

Для любой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times k}$ положим $\boldsymbol{A}^* = \overline{\boldsymbol{A}}^\top$, где через $\overline{\boldsymbol{A}}$ обозначена матрица, полученная из $\boldsymbol{A}$ заменой каждого элемента на комплексно сопряженное число[1]. Матрица $\boldsymbol{A}^*$ называется *сопряженной* к матрице $\boldsymbol{A}$. Если $\boldsymbol{A}$ — матрица из $\mathbb{R}^{n\times k}$, то ясно, что $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^\top$.

Из определения операций с матрицами легко вывести следующие свойства, показывающие, как транспонирование и переход к сопряженной матрице взаимодействуют с этими операциями[2].

14. Для любых матриц $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ одинаковых размеров справедливы равенства $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{A}^\top + \boldsymbol{B}^\top$, $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{A}^* + \boldsymbol{B}^*$.

15. Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ и любого комплексного числа t справедливы равенства $(t\boldsymbol{A})^\top = t\boldsymbol{A}^\top$, $(t\boldsymbol{A})^* = \bar{t}\boldsymbol{A}^*$.

16. Для любых матриц $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ согласованных размеров справедливы равенства $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^\top = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}^\top$, $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B})^* = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{A}^*$.

17. Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ справедливы равенства $(\boldsymbol{A}^\top)^\top = \boldsymbol{A}$ и $(\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{A}$.

Матрица называется *симметрической* [*эрмитовой*], если она совпадает со своей транспонированной [сопряженной]. Легко понять, что симметрическая [эрмитова] матрица является квадратной и ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, совпадают [являются комплексно сопряженными числами]. Очевидно, что сумма двух симметрических [эрмитовых] матриц одного порядка и произведение симметрической [эрмитовой] матрицы на [действительное] число являются симметрическими [эрмитовыми] матрицами.

1.1.5. Матричные уравнения

Матричным уравнением называется уравнение одного из видов

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{X} = \boldsymbol{B} \text{ или } \boldsymbol{X}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}, \tag{1.8}$$

[1]Напомним, что через $\bar{z}$ обозначается комплексное число, сопряженное с числом z.

[2]Мы продолжаем нумерацию свойств матриц.

где $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$,$\boldsymbol{D}$ — известные матрицы; $\boldsymbol{X}$ — неизвестная матрица. Разумеется, матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{X}$ в первом уравнении, $\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{C}$ во втором должны быть согласованных размеров, а число строк в матрицах $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$, равно как и число столбцов в матрицах $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$, должно быть одинаковым. С помощью транспонирования обеих частей уравнения $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{D}$, используя свойство 15, получаем, что указанное уравнение равносильно следующему уравнению: $\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{X}^\top = \boldsymbol{D}^\top$. Таким образом, достаточно научиться решать матричные уравнения вида $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Такие уравнения сводятся к нескольким системам линейных уравнений (число систем равно числу столбцов матрицы $\boldsymbol{B}$) с одинаковой основной матрицей. Это легко усмотреть из матричной записи системы линейных уравнений (1.6). Удобно решать все системы одновременно с помощью метода Гаусса–Жордана. Если по крайней мере одна система оказывается несовместной, то матричное уравнение не имеет решения. Если все системы совместны и по крайней мере одна из них неопределенная, то матричное уравнение имеет бесконечно много решений. Если все системы определенные, то матричное уравнение имеет единственное решение. Рассмотрим примеры.

1. Решить матричное уравнение $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица $\boldsymbol{X}$ имеет размеры 3×2, т.е. может быть записана с неопределенными элементами в виде

$$\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Для отыскания неизвестных элементов имеем две системы линейных уравнений (для каждого из столбцов матрицы $\boldsymbol{X}$) с одинаковой основной матрицей ($\boldsymbol{A}$) и разными столбцами свободных членов (они образуют матрицу $\boldsymbol{B}$). Для решения преобразуем расширенную матрицу, полученную приписыванием к матрице $\boldsymbol{A}$ матрицы $\boldsymbol{B}$:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Запишем по последней матрице две системы линейных уравнений: $\begin{cases} x_{11} - x_{21} = -1; \\ x_{21} + x_{31} = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_{12} - x_{22} = -2; \\ x_{22} + x_{32} = 1. \end{cases}$ Из них находим выражения элементов x_{11}, x_{31} матрицы $\boldsymbol{X}$ через x_{21}, а элементы x_{12}, x_{32} выражаем через x_{22}: $x_{11} = x_{21} - 1$, $x_{31} = -x_{21} + 1$, $x_{12} = x_{22} - 2$, $x_{32} = -x_{22} + 1$. Значения элементов x_{21}, x_{22} можно выбирать произвольно. Таким образом, рассматриваемое матричное уравнение имеет бесконечно много решений: $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} x_{21} - 1 & x_{22} - 2 \\ x_{21} & x_{22} \\ -x_{21} + 1 & -x_{22} + 1 \end{pmatrix}$ при всех $x_{21}, x_{22} \in \mathbb{R}$.

2. Решить матричное уравнение $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица $\boldsymbol{X}$ имеет размеры 2×2. Преобразуем матрицу $\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$. Мы видим, что системы для каждого из столбцов матрицы $\boldsymbol{X}$ несовместны, т.е. матричное уравнение не имеет решения.

3. Решить матричное уравнение $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$, где

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица $\boldsymbol{X}$ имеет размеры 2×2. Преобразуем матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Мы видим, что матричное уравнение имеет единственное решение $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Читателю предлагается проверить, что если при решении матричного уравнения $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ с квадратной матрицей $\boldsymbol{A}$ порядка n матрица $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{B})$ элементарными преобразованиями строк приводится к виду $(\boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{C})$ с единичной матрицей слева, то матричное уравнение имеет единственное решение $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{C}$.

1.1.6. Обратная матрица

В этом разделе рассматриваются только квадратные матрицы фиксированного порядка n. Матрица $\boldsymbol{A}$ называется *обратимой*, если существует такая матрица $\boldsymbol{B}$, что

$$\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}_n. \tag{1.9}$$

Лемма 1.1.1. *Для обратимой матрицы $\boldsymbol{A}$ существует единственная матрица $\boldsymbol{B}$ со свойствами (1.9).*

Доказательство. Допустим, что матрицы $\boldsymbol{B}_1$ и $\boldsymbol{B}_2$ таковы, что $\boldsymbol{AB}_1 = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$ и $\boldsymbol{AB}_2 = \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$. Тогда, используя свойства 13 и 9 умножения матриц, а также последние равенства, имеем $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_1\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{B}_1(\boldsymbol{AB}_2) = (\boldsymbol{B}_1\boldsymbol{A})\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{B}_2 = \boldsymbol{B}_2$, т.е. $\boldsymbol{B}_1 = \boldsymbol{B}_2$, что и требуется доказать. $\square$

Для обратимой матрицы $\boldsymbol{A}$ единственная матрица $\boldsymbol{B}$, удовлетворяющая равенствам (1.9), называется *обратной* и обозначается через $\boldsymbol{A}^{-1}$. Операция взятия обратной матрицы обладает следующими свойствами[1].

18. Если матрица $\boldsymbol{A}$ обратима и t—ненулевое число, то матрица $t\boldsymbol{A}$ обратима и $(t\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{t}\boldsymbol{A}^{-1}$.

19. Если матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ обратимы, то матрица $\boldsymbol{AB}$ обратима и $(\boldsymbol{AB})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$.

Эти свойства непосредственно выводятся из определения обратимой матрицы и свойств умножения матриц.

20. Если матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n обратима, а $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ — произвольные матрицы размера $n \times k$, то из $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ следует $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

Для доказательства умножим равенство $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{AC}$ слева на $\boldsymbol{A}^{-1}$, получим $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB}) = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AC})$, откуда $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{E}_n\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{C}$. Таким образом, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$, что и требуется.

Аналогично доказывается следующее свойство.

21. Если матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n обратима, а $\boldsymbol{B}$,$\boldsymbol{C}$ — произвольные матрицы размера $m \times n$, то из $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{CA}$ следует $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$.

22. Матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n обратима тогда и только тогда, когда когда обратима транспонированная к ней матрица $\boldsymbol{A}^\top$ [согласованная с ней матрица $\boldsymbol{A}^*$], и при этом $(\boldsymbol{A}^{-1})^\top = (\boldsymbol{A}^\top)^{-1}$ [$(\boldsymbol{A}^{-1})^* = (\boldsymbol{A}^*)^{-1}$].

Это свойство легко выводится из свойства 16 (см. с. 36).

Для нахождения обратной матрицы можно решить матричное уравнение $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{E}_n$. В качестве примера см. пример 3 в п. 1.1.5.

Предложение 1.1.1. *Если квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n обратима и матрица $\boldsymbol{B}$ имеет n строк, то матричное уравнение $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$ имеет единственное решение $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$.*

Доказательство. Имеем $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}) = (\boldsymbol{AA}^{-1})\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$, т.е. матрица $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ есть решение уравнения $\boldsymbol{AX} = \boldsymbol{B}$. Пусть

[1] Их нумерация продолжает начатую ранее.

$\boldsymbol{C}$ — произвольное решение этого уравнения. Тогда $\boldsymbol{AC} = \boldsymbol{B}$. Умножая обе части этого равенства слева на $\boldsymbol{A}^{-1}$, получаем $\boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AC}) = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, откуда $(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A})\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$, что и требуется доказать. □

В случае, когда для обратимой матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n известна обратная, иногда приходится вычислять обратную для матрицы $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A} + \boldsymbol{XRY}$, где $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{R}$ — матрицы размеров $n \times r$, $r \times n$, $r \times r$ соответственно, причем матрица $\boldsymbol{R}$ обратимая. Если $\boldsymbol{B}$ обратимая, то справедливо равенство

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{X}(\boldsymbol{R}^{-1} + \boldsymbol{YA}^{-1}\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{YA}^{-1}. \tag{1.10}$$

Пусть r намного меньше, чем n. В этом случае найти обратные для матриц $\boldsymbol{R}$ и $\boldsymbol{R}^{-1} + \boldsymbol{YA}^{-1}\boldsymbol{X}$ существенно легче, чем для $\boldsymbol{B}$. Если обратная матрица $\boldsymbol{A}^{-1}$ находится легко, то использование формулы (1.10) дает преимущества по сравнению с прямым вычислением обратной матрицы $\boldsymbol{B}^{-1}$.

Если $r = 1$, то матрицы $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{R}$ имеют размеры $n \times 1$, $1 \times n$, 1×1 соответственно. Считая, что $\boldsymbol{R}$ состоит из одного элемента 1, формулу (1.10) перепишем в виде

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1} - \frac{1}{(1 + \boldsymbol{YA}^{-1}\boldsymbol{X})}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{XYA}^{-1}. \tag{1.11}$$

В частности, если $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$ и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{xy}^\top$ для некоторых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{F}^{1\times n}$, то при условии, что $1 + \boldsymbol{yx}^\top \neq 0$, имеем

$$\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{E}_n - \frac{1}{1 + \boldsymbol{yx}^\top}\boldsymbol{xy}^\top.$$

1.1.7. След квадратной матрицы

Для квадратной матрицы $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})$ порядка n ее *следом* $\mathsf{tr}(\boldsymbol{A})$ называется сумма элементов, стоящих на главной диагонали:

$$\mathsf{tr}(\boldsymbol{A}) = \alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn}.$$

Читателю предлагается проверить следующее утверждение.

Предложение 1.1.2. *Для любых квадратных матриц* $\boldsymbol{A}$,$\boldsymbol{B}$ *порядка* n *и любого числа* γ *справедливы равенства*

$$\mathsf{tr}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) = \mathsf{tr}(\boldsymbol{A}) + \mathsf{tr}(\boldsymbol{B}); \tag{1.12}$$

$$\mathsf{tr}(\gamma\boldsymbol{A}) = \gamma\,\mathsf{tr}(\boldsymbol{A}); \tag{1.13}$$

$$\mathsf{tr}(\boldsymbol{A}^\top) = \mathsf{tr}(\boldsymbol{A}); \tag{1.14}$$

$$\mathsf{tr}(\boldsymbol{E}_n) = n; \tag{1.15}$$

$$\mathsf{tr}(\boldsymbol{AB}) = \mathsf{tr}(\boldsymbol{BA}). \tag{1.16}$$

Заметим, что формула (1.16) остается справедливой и в случае, когда матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют размеры $k\times m$ и $m\times k$ соответственно, т.е. не являются квадратными, а их произведения $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{BA}$ являются квадратными матрицами различного порядка.

Пусть $\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}^{n\times 1}$. Тогда $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\top\in\mathbb{F}^{n\times n}$ и $\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{a}\in\mathbb{F}^{1\times 1}$, т.е. последняя матрица состоит из одного элемента. Из (1.16) получаем

$$\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{a} = \mathsf{tr}(\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{a}) = \mathsf{tr}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}^\top).$$

Пусть $\boldsymbol{A}=(\alpha_{ij})\in F^{n\times n}$ и $\boldsymbol{a}_i$ $(i=1,2,\ldots,n)$ — столбцы матрицы $\boldsymbol{A}$. Тогда

$$\mathsf{tr}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}) = \sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{a}_i^\top\boldsymbol{a}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}^2.$$

1.1.8. Блочные матрицы

Под разбиением матрицы на блоки понимается полное расчленение ее на непересекающиеся подматрицы (блоки) такое, что любой элемент матрицы попадает в один и только один из этих блоков. Для простоты будем предполагать, что разбиение квадратной матрицы $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$ порядка n осуществляется так: $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{pmatrix}$, причем размеры блоков фиксированы. В формулах, приведенных ниже, предполагается, что квадратные матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ имеют одинаковый порядок и одинаковым образом разбиты на блоки. Эти формулы проверяются непосредственным вычислением.

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21}+\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}+\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}; \tag{1.17}$$

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{pmatrix}; \tag{1.18}$$

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{A}_{11}^{-1} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})^{-1} & \boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{C}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1} & -\boldsymbol{C} \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

$$\text{где } \boldsymbol{C} = (\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12} - \boldsymbol{A}_{22})^{-1}.$$

В формуле (1.19) предлагается один из нескольких возможных способов разбиения обратной к данной матрице $\boldsymbol{A}$; все матрицы, для которых в упомянутой формуле выписаны обратные, предполагаются квадратными и обратимыми.

1.1.9. Представления некоторых сумм с помощью матриц

С помощью матриц удобно представлять суммы величин и работать с такими суммами. Зафиксируем натуральное число n. В пространстве столбцов $\mathbb{F}^n = \mathbb{F}^{n\times 1}$ зафиксируем столбец $\boldsymbol{i}$, состоящий из единиц. Для любого столбца $\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ из $\mathbb{F}^n$ имеем

$$\boldsymbol{i}^\top \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i.$$

Далее,

$$\boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Обозначим через $\bar{x}$ среднее элементов вектора $\boldsymbol{x}$: $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$. Рассмотрим столбец $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}\bar{x}$. Имеем $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}\bar{x} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{i}(\frac{1}{n}\boldsymbol{i}^\top \boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E}_n\boldsymbol{x} - \frac{1}{n}(\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}^\top)\boldsymbol{x} = (\boldsymbol{E}_n - \frac{1}{n}\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}^\top)\boldsymbol{x}$. Обозначим через $\boldsymbol{M}_0$ матрицу $\boldsymbol{E}_n - \frac{1}{n}\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}^\top$. Эта матрица имеет числа $1 - \frac{1}{n}$ на главной диагонали, а остальные ее элементы — числа $-\frac{1}{n}$. Матрица $\boldsymbol{M}_0$ весьма полезна при вычислении сумм квадратов отклонений.

Читателю предлагается проверить, что $\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{i} = \boldsymbol{o}$, где $\boldsymbol{o}$ — нулевой столбец. Так как матрица $\boldsymbol{M}_0$ симметрическая, отсюда следует, что $\boldsymbol{i}^\top \boldsymbol{M}_0 = \boldsymbol{o}^\top$. Сумма всех отклонений от среднего равна нулю: $\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x}) = \boldsymbol{i}^\top(\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{i}^\top \boldsymbol{M}_0)\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}^\top \boldsymbol{x} = 0$.

Сумма квадратов всех отклонений от среднего равна

$$\begin{gathered}\textstyle\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = (\boldsymbol{x} - \bar{x}\boldsymbol{i})^\top(\boldsymbol{x} - \bar{x}\boldsymbol{i}) = \\ = (\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x})^\top(\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{M}_0^\top \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{M}_0^2\boldsymbol{x}.\end{gathered}$$

Непосредственное вычисление показывает, что $\boldsymbol{M}_0^2 = \boldsymbol{M}_0$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{M}_0\boldsymbol{x}.$$

Матрица $\boldsymbol{A}$ называется *идемпотентной*, если $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. Матрица $\boldsymbol{M}_0$ является идемпотентной.

§ 1.2. Определители

В этом параграфе рассматриваются только квадратные матрицы.

1.2.1. Понятие определителя

Пусть $\boldsymbol{A}$ — квадратная матрица порядка n. *Определителем* матрицы $\boldsymbol{A}$ называется число, обозначаемое $\mathsf{det}(\boldsymbol{A})$ и определяемое по индукции следующим образом:

если $n = 1$, то $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = a_{11}$, где a_{11} — единственный элемент матрицы $\boldsymbol{A}$;

пусть определители матриц порядка $n-1$ уже определены; тогда по определению

$$\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}, \tag{1.20}$$

где a_{ij} — элементы матрицы $\boldsymbol{A}$; A_{ij} — *алгебраические дополнения* элементов a_{ij}: по определению A_{ij} есть определитель подматрицы матрицы $\boldsymbol{A}$, полученной вычеркиванием из нее i-й строки и j-го столбца (и имеющей порядок $n-1$), если сумма $i+j$ — четное число, и есть противоположное число к указанному определителю, если $i+j$ — нечетное число.

Формула (1.20) определяет *разложение определителя по первой строке.*

С использованием элементов матрицы определитель записывается так:

$$\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}. \tag{1.21}$$

Выведем формулы для определителей второго и третьего порядков. Имеем $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$, так как при вычеркивании из матрицы порядка 2 первой строки и первого столбца остается матрица порядка 1 с элементом a_{22}, так что $A_{11} = a_{22}$; аналогично $A_{12} = -a_{21}$ (так как $2 + 1 = 3$ — нечетное число, A_{12} равно противоположному числу к a_{21}). Итак,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1.22}$$

Применяя эту формулу, развернем определитель третьего порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31}.$$

Таким образом, получаем следующую формулу:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} -$$

$$- a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \tag{1.23}$$

Для запоминания способа образования слагаемых со знаками "плюс" и "минус" используется следующее мнемоническое правило. Слагаемые со знаком "+" образуются умножением элементов определителя, соединенных отрезками прямых на диаграмме рис. 1 слева, а слагаемые со знаком "−" — справа.

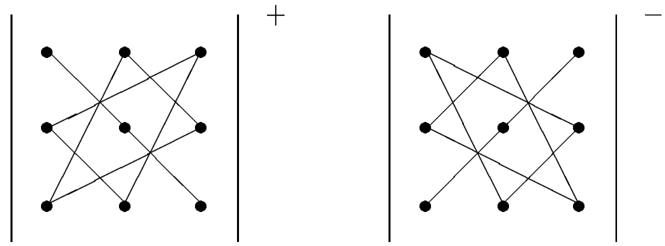

Рис. 1

Явные выражения для определителей порядка выше третьего на практике не употребляются, поскольку число слагаемых в определителе порядка 4 равно 24, а в определителе порядка n оно равно $n! = 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$ (это можно доказать индукцией по порядку определителя).

1.2.2. Свойства определителей

Рассмотрим определитель матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n [см. (1.21)]. *Минором* этого определителя называется определитель меньшего порядка, получаемый из исходного вычеркиванием нескольких строк и такого же количества столбцов. Минор, полученный вычеркиванием строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ и столбцов с номерами $j_1, \ldots, j_k$, является определителем порядка $n-k$ и обозначается через $M_{i_1,\ldots,i_k\, j_1,\ldots,j_k}$. Алгебраическое дополнение элемента a_{ij} может выражено формулой

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \tag{1.24}$$

Теорема 1.2.1. *Определитель порядка $n > 1$ равен сумме произведений элементов первого столбца на их алгебраические дополнения, т.е. имеет место формула разложения определителя по первому столбцу:*

$$\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}. \tag{1.25}$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n (порядку определителя). Для $n = 2$ и $n = 3$ утверждение непосредственно следует из формул (1.22) и (1.23). Пусть $n > 3$, и оно доказано для всех определителей порядка, не превосходящего $n - 1$. Согласно формуле (1.20) имеем $\det(\boldsymbol{A}) = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}$. Убедимся, что $a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1}$; этим требуемое будет доказано. Так как $A_{1i} = (-1)^{1+i}M_{1i}$ и M_{1i} — определитель порядка $n - 1$, для него формула (1.25) уже доказана, и, разлагая его по первому столбцу, мы имеем $M_{1i} = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}(-1)^j M_{1,j\;1,i}$. Отсюда

$$a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n} = \sum_{i=2}^{n} a_{1i}(-1)^{1+i} \sum_{j=2}^{n} a_{j1}(-1)^j M_{1,j\;1,i}. \quad (1.26)$$

Аналогично, разлагая минор M_{i1} по первой строке, получаем $M_{i1} = \sum_{j=2}^{n} a_{j1}(-1)^j M_{1,i\;1,j}$, откуда

$$a_{21}A_{21} + \ldots + a_{n1}A_{n1} = \sum_{i=2}^{n} a_{i1}(-1)^{1+i} \sum_{j=2}^{n} a_{1j}(-1)^j M_{1,i\;1,j}. \quad (1.27)$$

Сравнивая правые части равенств (1.26) и (1.27), заключаем, что они состоят из одинаковых слагаемых, т.е. совпадают. Итак, равенство (1.25) доказано для определителя порядка n. □

Следствие 1.2.1. *Определитель транспонированной матрицы равен определителю исходной матрицы, т.е.* $\det(\boldsymbol{A}^\top) = \det(\boldsymbol{A})$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n (порядку определителя). Для $n = 1$ утверждение очевидно. Пусть $n > 1$, и оно доказано для всех определителей порядка, не превосходящего $n - 1$. Тогда $M_{i1} = (M'_{1i})^\top$, где через M'_{1i} обозначен минор определителя $\det(\boldsymbol{A}^\top)$, и, разлагая транспонированный определитель по первой строке, мы придем к правой части равенства (1.25), чем завершается доказательство следствия. □

Таким образом, строки и столбцы определителя “равноправны”, т.е. любое свойство, справедливое для строк, выполняется и для столбцов и наоборот. Поэтому ниже все свойства формулируются и доказываются лишь для строк, а используются в дальнейшем как для строк, так и для столбцов.

Рассуждениями, подобными приведенным в теореме 1.2.1, может быть доказана следующая формула разложения определителя по произвольной строке:

$$\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = a_{i1}A_{i1} + \ldots + a_{in}A_{in}. \tag{1.28}$$

Следующие свойства определителей легко выводятся по индукции из формул (1.28).

1. *Определитель, содержащий нулевую строку, равен нулю.*

2. *При перестановке двух строк в определителе получается определитель, равный противоположному числу к исходному определителю.*

3. *Определитель, содержащий две одинаковые строки, равен нулю.*

4. *Общий множитель всех элементов одной строки определителя можно вынести за знак определителя.*

5. *Определитель, содержащий две пропорциональных строки, равен нулю.*

6. *Если в определителе какая-либо строка представлена в виде суммы двух строк, то определитель равен сумме двух определителей, получаемых из исходного заменой упомянутой строки строками–слагаемыми.*

7. *Определитель не изменится, если к некоторой его строке прибавить другую строку, умноженную на число.*

8. *Если в определителе некоторая строка есть линейная комбинация других строк, то определитель равен нулю*[1].

[1] В следствии 3.2.1 (см. п. 3.2.2) доказывается, что верно и обратное к этому утверждение.

9. *Сумма произведений элементов одной строки определителя на алгебраические дополнения к элементам другой строки равна нулю.*

Пусть M — минор определителя $\det(\boldsymbol{A})$, стоящий на пересечении строк с номерами $i_1 < \ldots < i_k$ и столбцов с номерами $j_1 < \ldots < j_k$. *Дополнительным минором* к M называется минор

$$N = M_{i_1,\ldots,i_k\, j_1,\ldots,j_k},$$

полученный вычеркиванием из исходного определителя указанных строк и столбцов. *Алгебраическим дополнением* к M называется число $(-1)^{s(M)}N$, где $s(M) = i_1 + \ldots + i_k + j_1 + \ldots + j_k$.

Следующее утверждение обобщает формулы разложения определителя по произвольной строке и произвольному столбцу. Доказательство его мы опускаем.

Теорема 1.2.2. *Зафиксируем строки $i_1, \ldots, i_k$ в определителе порядка n. Этот определитель равен сумме произведений всевозможных миноров, стоящих в выбранных строках, на их алгебраические дополнения.*

Квадратная матрица $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ порядка n называется *полураспавшейся*, если в ней имеются m первых [соотв. последних] строк и k последних [соотв. первых] столбцов, на пересечении которых стоит нулевая матрица, и $m + k = n$. Полураспавшаяся матрица очевидным образом является блочной, и ее можно представить в одном из видов $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$ или $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{B} & \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D} \end{pmatrix}$, где $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{D}$ — квадратные подматрицы; $\boldsymbol{O}$ — нулевая подматрица. Говорят, что $\boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{C}$ *стоят на главной диагонали* полураспавшейся матрицы.

Из теоремы 1.2.2 вытекает такое утверждение.

Следствие 1.2.2. *Определитель полураспавшейся матрицы равен произведению миноров, стоящих на ее главной диагонали.*

В самом деле, применяя теорему 1.2.2 к тем строкам блочной матрицы, которые содержат нулевую подматрицу, и используя тот факт, что все миноры, за исключением стоящего на главной диагонали, содержат нулевой столбец и поэтому равны нулю, а алгебраическое дополнение к этому минору равно другому минору, стоящему на главной диагонали, получаем требуемое.

С помощью следствия 1.2.2 может быть доказана следующая

Теорема 1.2.3. *Определитель произведения двух квадратных матриц порядка n равен произведению определителей этих матриц.*

1.2.3. Критерий обратимости матрицы

Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля.

Теорема 1.2.4. *Матрица является обратимой тогда и только тогда, когда она невырожденная.*

Доказательство. Пусть квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n обратима. Тогда по определению существует матрица $\boldsymbol{B}$ такая, что $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}_n$. По теореме 1.2.3, учитывая, что $\mathsf{det}(\boldsymbol{E}_n) = 1$, имеем $1 = \mathsf{det}(\boldsymbol{AB}) = \mathsf{det}(\boldsymbol{A})\mathsf{det}(\boldsymbol{B})$, откуда непосредственно следует, что $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) \neq 0$, т.е. матрица $\boldsymbol{A}$ является невырожденной.

Обратно, предположим, что квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n невырожденная. Рассмотрим матрицу, составленную следующим образом из алгебраических дополнений элементов определителя $\mathsf{det}(\boldsymbol{A})$:

$$\tilde{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.29}$$

Она называется *присоединенной матрицей* матрицы $\boldsymbol{A}$. Положим $\boldsymbol{B} = \frac{1}{\mathsf{det}(\boldsymbol{A})}\tilde{\boldsymbol{A}}$ и покажем, что $\boldsymbol{B}$ является матрицей, обратной к $\boldsymbol{A}$. В самом деле, используя равенство (1.28) при $i = 1, \ldots, n$ и свойство 9 определителей, легко убедиться, что $\boldsymbol{A}\tilde{\boldsymbol{A}} = \mathsf{det}(\boldsymbol{A})\boldsymbol{E}_n$, откуда в силу свойства 12 умножения матриц вытекает $\boldsymbol{AB} = \boldsymbol{E}_n$. Для проверки равенства $\boldsymbol{BA} = \boldsymbol{E}_n$ необходимо провести аналогичные рассуждения с заменой равенств (1.28) и свойства 9 определителей на их аналоги для столбцов. Таким образом, теорема доказана. □

Теорема 1.2.4 дает еще один способ нахождения обратной матрицы[2]. Этот способ особенно удобен для матриц второго порядка, так как можно выписать следующую формулу для обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{1.30}$$

Для матриц порядка n указанный способ требует вычисления n^2 определителей порядка $n - 1$, поэтому на практике для матриц порядка больше 3 он не применяется.

1.2.4. Крамеровские системы линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *крамеровской*, если число уравнений в ней равно числу неизвестных. Рассмотрим крамеровскую систему линейных уравнений в общем виде.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{1.31}$$

[2]Первый способ см. в п. 1.1.6.

Введем следующие определители для этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Здесь Δ называется *главным определителем* системы (1.31), а определитель Δ_i получается из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов уравнений и называется *определителем при неизвестном* x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Теорема 1.2.5. *Если главный определитель Δ крамеровской системы линейных уравнений отличен от нуля, то она является определенной и ее единственное решение есть* $(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta})$.

Доказательство. Запишем систему (1.31) в матричном виде:

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}. \tag{1.32}$$

Пусть $\Delta \neq 0$. Так как $\Delta = \mathsf{det}(\boldsymbol{A})$, в силу теоремы 1.2.4 матрица $\boldsymbol{A}$ обратима. Согласно предложению 1.1.1 матричное уравнение (1.32) имеет единственное решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{b}$. Применяя для обратной матрицы формулу из доказательства теоремы 1.2.4, имеем $\boldsymbol{x} = \frac{1}{\mathsf{det}(\boldsymbol{A})}\tilde{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{b}$. Расписывая это матричное равенство, получаем систему равенств

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1}}{\mathsf{det}(\boldsymbol{A})}, \\ x_2 &= \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \ldots + b_n A_{n2}}{\mathsf{det}(\boldsymbol{A})}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \ldots + b_n A_{nn}}{\mathsf{det}(\boldsymbol{A})}. \end{aligned}$$

В знаменателях правых частей полученных равенств стоит определитель Δ, а в числителях — определители $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, разложенные соответственно по первому, второму и так далее, n-му столбцу. Этим требуемое доказано. □

1.2.5. Примеры вычисления определителей

1. Определитель треугольной матрицы. Разлагая исходный определитель и все получающиеся затем определители по первому столбцу, получаем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \ldots = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2. Определитель Вандермонда. Пусть n — натуральное число, $a_1, a_2 \ldots, a_n$ — произвольные числа. *Определителем Вандермонда* называется следующий определитель порядка n:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{1.33}$$

Докажем, что при любом n определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей $a_i - a_j$, где $1 \le j < i \le n$. Воспользуемся индукцией по n. При $n = 2$ очевидно, что $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$. Пусть утверждение уже доказано для определителей Вандермонда порядка $n-1$. Преобразуем определитель (1.33) следующим образом: для каждого $k = n, n-1, \ldots, 2$ из k-й его строки вычтем $k-1$-ю, умноженную на a_1. Тогда

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разлагая полученный определитель по первому столбцу, мы получим определитель $n-1$-го порядка. Вынося из k-го столбца множитель $a_k - a_1$ при $k = 2, \ldots, n$, приходим к равенству

$$d = (a_2-a_1)(a_3-a_1)\cdots(a_n-a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}. \quad (1.34)$$

Последний множитель является определителем Вандермонда порядка $n-1$. Применяя предположение индукции, из формулы (1.34) получаем требуемое.

Из полученного результата следует, что *определитель Вандермонда порядка n, построенный на числах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, равен нулю тогда и только тогда, когда $a_j = a_k$ при некоторых $1 \le j < k \le n$.*

3. Для данных чисел a, b вычислить следующий определитель порядка n:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \ldots & b \\ b & a & b & \ldots & b \\ b & b & a & \ldots & b \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b & b & b & \ldots & a \end{vmatrix}.$$

Преобразуем его, прибавив к 1-й строке последовательно 2-ю, 3-ю и все остальные, затем вынося из первой строки общий множитель $a+(n-1)b$ и прибавляя ко всем строкам, начиная со второй, первую строку, умноженную на $-b$. Наконец, воспользуемся примером 1.

$$\begin{vmatrix} a+(n-1) & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} =$$

$$(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} =$$

$$(a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1))(a-b)^{n-1}.$$

4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$.

Сначала все строки прибавляем к первой, затем выносим общий множитель 15 из первой строки. Далее вычитаем первую строку, умноженную на подходящее число, из остальных, а после этого разлагаем определитель по первому столбцу. Затем вычитаем третью строку из четвертой, вторую из третьей, первую из второй и дважды разлагаем полученный определитель по первой строке.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 15 & 15 & 15 & 15 & 15 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} =$$

$$= 15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & -3 & -2 & -1 \\ 0 & -4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 & -1 \\ 1 & -3 & -2 & -1 \\ -4 & -3 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 15(-1)(-1)^{4+1}\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -5 & 0 & 0 \\ -5 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 15\begin{vmatrix} 0 & 0 & -5 \\ 0 & -5 & 0 \\ -5 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 15(-5)(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & -5 \\ -5 & 0 \end{vmatrix} = 1875.$$

5. Вычислить определитель, пользуясь теоремой 1.2.2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}(-1)^{1+1+1+3+3+1+3+3}\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -2.$$

Выбираем первую и третью строки и применяем теорему 1.2.2 к этим строкам.

Задачи: [17], №3–22.

Глава 2

Элементы аналитической геометрии

§ 2.1. Векторная алгебра

2.1.1. Понятие вектора

Направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$ называется отрезок, концы которого образуют упорядоченную пару (A, B) точек (не обязательно различных) в пространстве; при этом точка A называется его *началом*, а точка B — *концом*. *Длиной* направленного отрезка называется расстояние между его началом и концом. Если начало и конец направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$ не совпадают, то луч, исходящий из точки A и включающий точку B, определяет *направление* на прямой, проходящей через точки A и B. На каждой прямой определены два взаимно противоположных направления. Прямая называется *ориентированной прямой*, или *осью*, если на ней задано направление с помощью направленного отрезка ненулевой длины, лежащего на этой прямой. Изображаются направленные отрезки следующим образом.

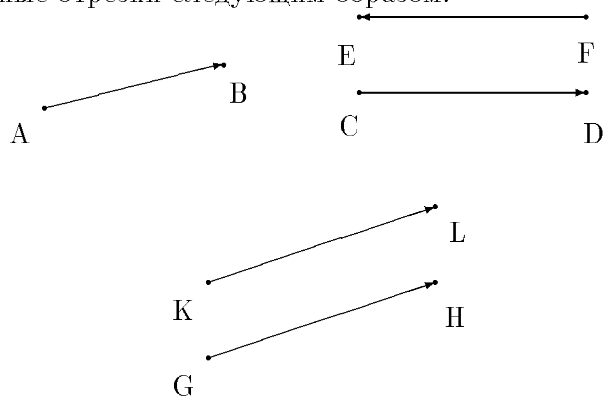

Рис. 2

Говорят, что два направленных отрезка $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ *сонаправлены* [*антинаправлены*], если они либо параллельны, либо лежат на одной прямой и имеют одинаковые [противоположные] направления.

Вектором называется множество всех сонаправленных отрезков одинаковой длины. Любой направленный отрезок, принадлежащий вектору, называется его *изображением*. На рис. 2 направленные отрезки $\overrightarrow{GH}$ и $\overrightarrow{KL}$ суть изображения одного вектора. Для любой точки A пространства и данного вектора существует единственное изображение этого вектора с началом в точке A; поэтому можно представлять себе вектор как направленный отрезок, начало которого может находиться в любой точке пространства. Эта точка называется *точкой приложения* вектора. Следовательно, вектор может быть приложен к любой точке. Обозначаются векторы так: $\vec{a}, \vec{b}$ и т.д. Вектор, определяемый направленным отрезком $\overrightarrow{AA}$ (с совпадающими началом и концом), называется *нулевым* и обозначается через $\vec{0}$.

Так как все изображения вектора имеют одинаковую длину, естественно назвать *длиной* вектора длину любого его изображения. Каждый ненулевой вектор однозначно определяется длиной и направлением. Нулевой вектор имеет длину 0, а его направление не определено. Длина вектора $\vec{a}$ обозначается через a или через $|\vec{a}|$.

Два вектора равны, если они имеют совпадающие изображения. Можно сказать, что $\vec{a} = \vec{b}$, если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ имеют одинаковые длины и (если длина больше нуля) одинаковые направления.

Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *сонаправленными* (обозначение: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$) [соответственно *антинаправленными*, обозначение: $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$)], если существуют их сонаправленные [антинаправленные] изображения. На рис. 3 имеем $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, $\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{c}$.

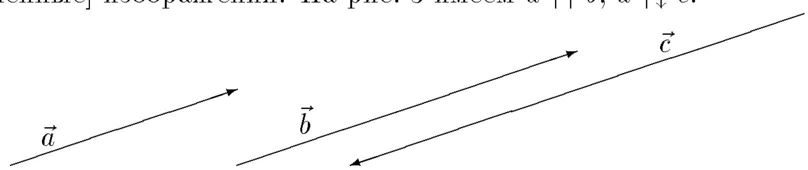

Рис. 3

Два вектора называются *коллинеарными*, если либо по крайней мере один из них — нулевой вектор, либо они сонаправлены или антинаправлены. Говорят, что вектор *коллинеарен* прямой [*компланарен* плоскости], если существует изображение этого вектора, лежащее на этой прямой [плоскости].

2.1.2. Линейные операции с векторами

Под *линейными операциями* понимаются сложение векторов и умножение вектора на скаляр. *Суммой* двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор, получаемый следующим образом (см. рис. 4). От некоторой точки отложим изображение вектора $\vec{a}$, а от его конца отложим изображение вектора $\vec{b}$. Тогда направленный отрезок, направленный из начала изображения $\vec{a}$ в конец изображения $\vec{b}$, определяет вектор $\vec{c}$, который и будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Легко проверить, что вектор $\vec{c}$ определен корректно, так как определяющий его направленный отрезок не зависит от выбора точки приложения вектора $\vec{a}$. Обозначение для суммы: $\vec{a}+\vec{b}$. Такой способ вычисления суммы называется нахождением суммы двух векторов *по правилу треугольника.*

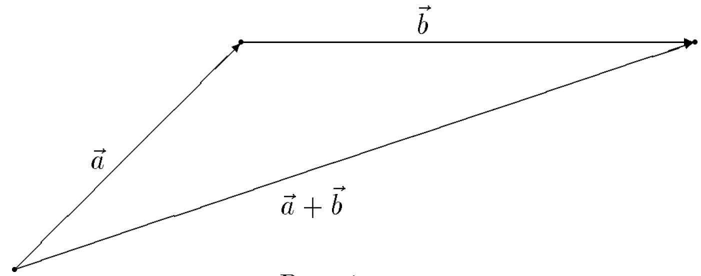

Рис. 4

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны, то можно складывать их и по правилу параллелограмма: отложить оба вектора от общего начала и построить на них параллелограмм; вектор, направленный из общего начала по диагонали в вершину параллелограмма, и будет суммой (см. рис. 5).

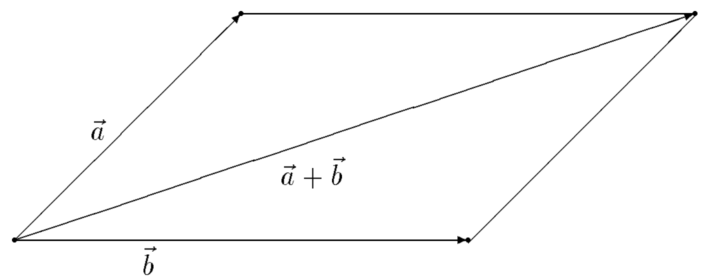

Рис. 5

Сложение векторов имеет следующие свойства, сходные со свойствами сложения чисел.

1. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо равенство $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$.

2. Для любых векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{c}$ справедливо равенство $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

3. Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо равенство $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

4. Для любого вектора $\vec{a}$ существует вектор $\vec{b}$ такой, что $\vec{a}+\vec{b}=\vec{0}$.

Доказательства двух первых свойств получаются перебором возможных случаев расположения векторов $\vec{a},\vec{b}$ (и $\vec{c}$ для свойства 2) и применением простейших геометрических соображений. Свойства 3 и 4 очевидны. Вектор $\vec{b}$ в свойстве 4 получается из вектора $\vec{a}$ изменением направления на противоположное; при этом у направленного отрезка, изображающего вектор $\vec{a}$, начало и конец меняются ролями. Ясно, что вектор $\vec{b}$ однозначно определяется по вектору $\vec{a}$ в свойстве 4; он называется *противоположным* к вектору $\vec{a}$ и обозначается через $-\vec{a}$. На рис. 2 имеем $\overrightarrow{FE}=-\overrightarrow{CD}$.

Произведением вектора $\vec{a}$ на число t называется вектор, обозначаемый через $t\vec{a}$ и определяемый по правилу

$$t\vec{a}=\begin{cases}\vec{0}, & \text{если } t=0 \text{ или } \vec{a}=\vec{0};\\ \vec{c},\ \text{где } \vec{c}\uparrow\uparrow\vec{a} \text{ и } |\vec{c}|=t|\vec{a}|, & \text{если } t>0 \text{ и } \vec{a}\neq\vec{0};\\ \vec{c},\ \text{где } \vec{c}\uparrow\downarrow\vec{a} \text{ и } |\vec{c}|=-t|\vec{a}|, & \text{если } t<0 \text{ и } \vec{a}\neq\vec{0}.\end{cases}$$

На рис. 3 для вектора $\vec{a}$ изображены векторы $\vec{b}=\frac{3}{2}\vec{a}$ и $\vec{c}=$ $=-2\vec{a}$. Из определения вектора $t\vec{a}$ следует, что

$$|t\vec{a}|=|t||\vec{a}|$$

для всех векторов $\vec{a}$ и всех $t\in\mathbb{R}$. Умножение векторов на число вместе со сложением обладают следующими свойствами[1].

5. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и любого числа t справедливо $t(\vec{a}+\vec{b})=t\vec{b}+t\vec{a}$.

6. Для любого вектора $\vec{a}$ и любых чисел t,s справедливо $(t+s)\vec{a}=t\vec{a}+s\vec{a}$.

[1]Нумеруя эти свойства, мы продолжаем нумерацию свойств сложения векторов.

7. Для любого вектора $\vec{a}$ и любых чисел t, s справедливо $t(s\vec{a}) = (ts)\vec{a} = s(t\vec{a})$.

8. Для любого вектора $\vec{a}$ справедливо $1\vec{a} = \vec{a}$.

Доказательства свойств 5–7 получаются перебором возможных случаев расположения векторов $\vec{a}, \vec{b}$ и знаков чисел t, s. Свойство 8 очевидно.

Обращаем внимание читателя на то, что линейные операции с матрицами (см. п. 1.1.2) и с векторами обладают одинаковыми свойствами. Это объясняется тем, что матрицы фиксированных размеров, равно как и векторы (коллинеарные прямой, компланарные плоскости или все векторы в пространстве), образуют так называемое *линейное пространство*[2] над полем $\mathbb{R}$.

Доказательство следующего утверждения будет несложным упражнением для читателя.

Предложение 2.1.1. *Для того чтобы два вектора были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы один из них мог быть получен с помощью умножения другого на подходящее число. Если два ненулевых вектора коллинеарны, то каждый из них может быть получен с помощью умножения другого на подходящее число.*

Как и в случае матриц, *линейной комбинацией* векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ с коэффициентами $t_1, t_2, \ldots, t_k$ называется вектор

$$t_1\vec{a_1} + t_2\vec{a_2} + \ldots + t_k\vec{a_k}.$$

Если вектор $\vec{b}$ является линейной комбинацией векторов $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$ с некоторыми коэффициентами, то говорят, что $\vec{b}$ *линейно выражается* через векторы $\vec{a_1}, \vec{a_2}, \ldots, \vec{a_k}$.

Говорят, что три вектора *компланарны*, если существуют их изображения, лежащие в одной плоскости, или, что равносильно, они компланарны одной и той же плоскости.

[2]Определение этого понятия см. в 3.1.1.

Предложение 2.1.2. *Три вектора компланарны тогда и только тогда, когда один из них линейно выражается через остальные два.*

Доказательство. Рассмотрим три компланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, то вектор $\vec{c}$ может быть разложен по ним, как показано выше. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Согласно предложению 2.1.1 либо $\vec{a} = t\vec{b}$, либо $\vec{b} = t\vec{a}$ для некоторого числа t. Тогда, очевидно, $\vec{a} = t\vec{b} + 0\vec{c}$ или $\vec{b} = t\vec{a} + 0\vec{c}$.

Обратно, если вектор $\vec{a}$ линейно выражается через $\vec{b}$, $\vec{c}$, то из определения линейных операций с векторами следует, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ компланарны. □

В силу предложения 2.1.2, если три вектора некомпланарны, то ни один из них не может быть представлен в виде линейной комбинации двух других векторов.

Ортом называется вектор длины 1. Легко убедиться, что для любого ненулевого вектора $\vec{a}$ сонаправленный с ним орт $\vec{e}_{\vec{a}}$ имеет вид

$$\vec{e}_{\vec{a}} = \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}. \tag{2.1}$$

2.1.3. Компоненты и проекции векторов

Существуют три вида проектирования точки:

а) проектирование на плоскости на данную прямую параллельно данной прямой,

б) проектирование в пространстве на данную плоскость параллельно данной прямой,

в) проектирование в пространстве на данную прямую параллельно данной плоскости (см. рис. 6).

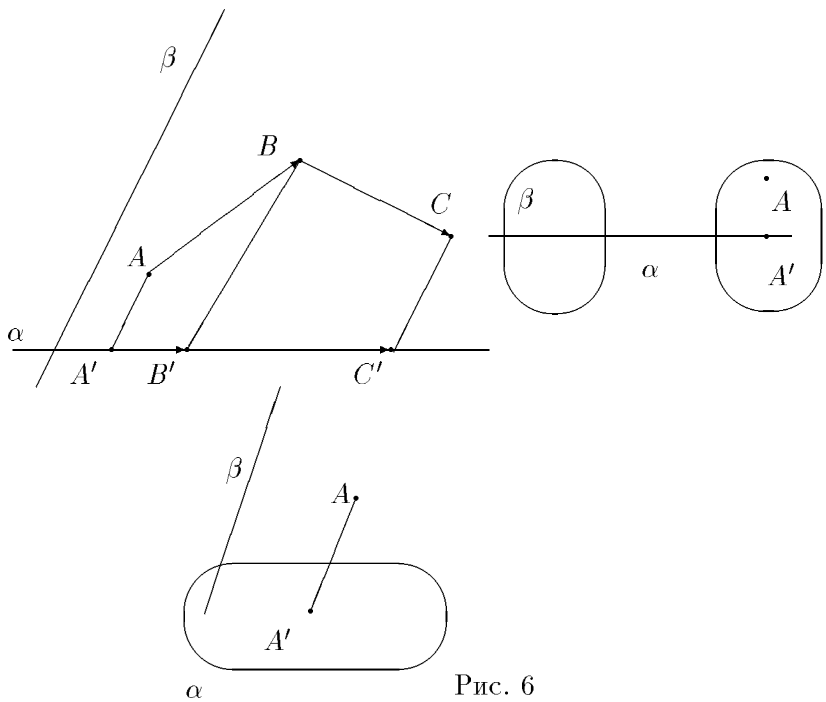

Рис. 6

В соответствии с этими способами проектирования точки получаются три вида проектирования вектора. Легко понять, что при проектировании каким-либо способом начала и конца изображения данного вектора $\vec{a}$ получается изображение вектора $\vec{\text{ком}}_{\alpha,\beta}\vec{a}$, называемого *компонентой*[1] вектора $\vec{a}$ на прямую или плоскость α параллельно прямой или плоскости β. Очевидно также, что при замене любого из объектов α, β параллельным ему компонента любого вектора не изменяется. Далее, справедливы свойства компонент, выражаемые формулами

$$\vec{\text{ком}}_{\alpha,\beta}(\vec{a}+\vec{b}) = \vec{\text{ком}}_{\alpha,\beta}\vec{a} + \vec{\text{ком}}_{\alpha,\beta}\vec{b}; \qquad (2.2)$$

[1] В первом издании настоящего учебника [16] для этого понятия был использован другой употребительный термин — “вектор-проекция”; см. там определение на с. 56.

$$\vec{\textsf{ком}}_{\alpha,\beta}(t\vec{a}) = t\vec{\textsf{ком}}_{\alpha,\beta}\vec{a}. \tag{2.3}$$

Их доказательства получаются несложными рассуждениями с рассмотрением всех возможных случаев, один из которых (для равенства (2.2)) показан на рис. 6.

Ясно, что на любой оси можно задать направление с помощью коллинеарного ей ненулевого вектора. Таким образом, на любой прямой можно задать два направления с помощью двух противоположных ненулевых векторов. (см. рис. 7).

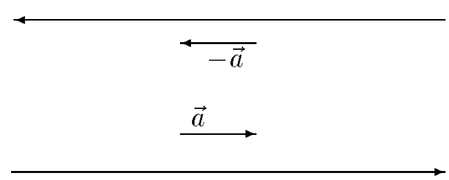

Рис. 7

Рассмотрим проектирование векторов на ось коллинеарно прямой (см. рис. 8). Ясно, что компонента зависит лишь от исходного вектора $\vec{c}$ (определяемого направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$), вектора, задающего направление на оси ($\vec{a}$) и произвольного ненулевого вектора, коллинеарного прямой, определяющей проектирование ($\vec{b}$). В этом случае обозначим компоненту через $\vec{\textsf{ком}}_{a||b}\vec{c}$ и будем называть ее *компонентой* вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{a}$ коллинеарно вектору $\vec{b}$.

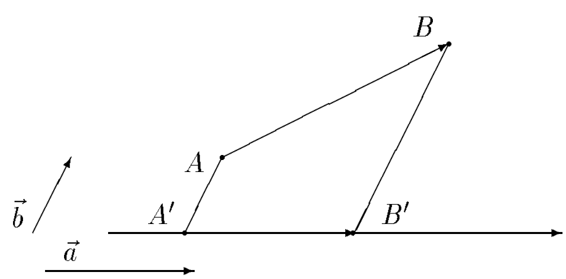

Рис. 8

Проекцией, или *алгебраическим значением проекции* вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{a}$ коллинеарно вектору $\vec{b}$, называется *число* $\mathsf{пр}_{a||b}\vec{c}$, определяемое формулой

$$\mathsf{пр}_{a||b}\vec{c} = \begin{cases} |\vec{\mathsf{ком}}_{a||b}\vec{c}|, & \text{если } (\vec{\mathsf{ком}}_{a||b}\vec{c}) \uparrow\uparrow \vec{a}; \\ -|\vec{\mathsf{ком}}_{a||b}\vec{c}|, & \text{если } (\vec{\mathsf{ком}}_{a||b}\vec{c}) \uparrow\downarrow \vec{a}. \end{cases}$$

Между проекцией и компонентой вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{a}$ коллинеарно вектору $\vec{b}$ имеется связь, выражаемая следующей формулой:

$$\vec{\mathsf{ком}}_{a||b}\vec{c} = (\mathsf{пр}_{a||b}\vec{c})(\frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a}) = \frac{\mathsf{пр}_{a||b}\vec{c}}{|\vec{a}|}\vec{a}. \tag{2.4}$$

Эта формула следует из определения проекций и формулы (2.1).

Для проекции векторов справедливы следующие аналоги свойств (2.2) и (2.3):

$$\mathsf{пр}_{c||d}(\vec{a} + \vec{b}) = \mathsf{пр}_{c||d}\vec{a} + \mathsf{пр}_{c||d}\vec{b}; \tag{2.5}$$

$$\mathsf{пр}_{c||d}(t\vec{a}) = t\mathsf{пр}_{c||d}\vec{a}. \tag{2.6}$$

Доказательства этих свойств легко выводятся из (2.2) и (2.3).

Углом между ненулевыми векторами называется наименьший из двух углов, которые образуют изображения этих векторов, отложенные от общего начала. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается через $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}})$. Он заключен в пределах от нуля до π, включая границы.

Пусть векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$ перпендикулярны. Положим $\vec{\mathsf{ком}}_{\vec{b}}\vec{a} = \vec{\mathsf{ком}}_{\vec{b}||\vec{c}}\vec{a}$ [соответственно $\mathsf{пр}_{\vec{b}}\vec{a} = \mathsf{пр}_{\vec{b}||\vec{c}}\vec{a}$]. Будем называть их *ортогональной* компонентой [соответственно проекцией] вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$. Для ортогональных компоненты и проекции справедливы свойства (2.2)–(2.6). Кроме того, легко вывести следующую формулу для ортогональной проекции:

$$\mathsf{пр}_{\vec{b}}\vec{x} = |\vec{x}| \cos(\widehat{\vec{x}, \vec{b}}). \tag{2.7}$$

2.1.4. Базис. Координаты вектора

Рассмотрим все векторы, коллинеарные некоторому фиксированному ненулевому вектору. Ясно, что все такие векторы коллинеарны некоторой прямой l. Обозначим это множество через V_l. *Базисом на прямой* называется любой ненулевой вектор, коллинеарный этой прямой. Пусть $\vec{a}$ — такой вектор. Любой вектор $\vec{x}$ из V_l может быть представлен в виде $\vec{x} = t\vec{a}$, где t — некоторое число, однозначно определяемое по вектору $\vec{x}$. Это число называется *координатой вектора* $\vec{x}$ в базисе $\mathbf{A} = \{\vec{a}\}$ и будет обозначаться через $[\vec{x}]_{\mathbf{A}}$. Легко проверить, что выполняются следующие свойства координат: для любых векторов $\vec{x}$, $\vec{y}$, коллинеарных данной прямой, и любого числа s справедливы равенства

$$[\vec{x} + \vec{y}]_{\mathbf{A}} = [\vec{x}]_{\mathbf{A}} + [\vec{y}]_{\mathbf{A}}, \tag{2.8}$$

$$[s\vec{x}]_{\mathbf{A}} = s[\vec{x}]_{\mathbf{A}}. \tag{2.9}$$

Через V_α обозначим множество всех векторов, компланарных плоскости α. Ясно, что любые векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ из V_α компланарны.

Базисом на плоскости α называется упорядоченная пара неколлинеарных векторов, компланарных плоскости α. Пусть $\mathbf{B} = (\vec{b}_1, \vec{b}_2)$ — такая пара. Любой вектор $\vec{x}$ из V_α может быть следующим образом *разложен по базису* $\mathbf{B}$ (см. рис. 9).

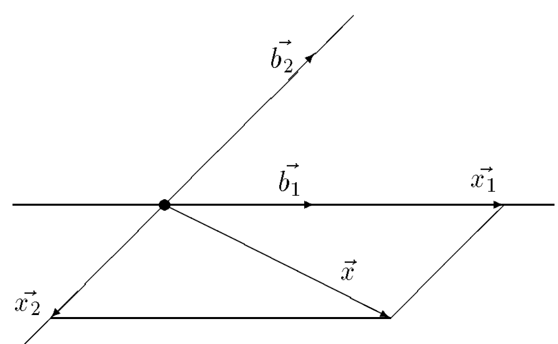

Рис. 9

Отложим изображения векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{x}$ от общего начала и через конец изображения вектора $\vec{x}$ проведем прямые, коллинеарные векторам $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ до пересечения с прямыми, проведенными через изображения этих векторов. Получим изображения векторов $\vec{x}_1$ и $\vec{x}_2$. Ясно, что

$$\vec{x} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2 \tag{2.10}$$

и $\vec{x}_1 = \vec{\mathsf{ком}}_{b_1 || b_2} \vec{x}$, $\vec{x}_2 = \vec{\mathsf{ком}}_{b_2 || b_1} \vec{x}$. Учитывая сказанное выше о базисе на прямой и рассматривая в качестве базисов на соответствующих прямых векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$, получаем

$$\vec{x}_1 = t_1 \vec{b_1}, \ \vec{x}_2 = t_2 \vec{b_2} \tag{2.11}$$

для некоторых чисел t_1, t_2. Эти числа называются *координатами вектора* $\vec{x}$ в базисе B. Их записывают в виде строки или столбца, сначала t_1, затем t_2 (порядок существен!). Положим

$$[\vec{x}]_{\mathbf{B}} = (t_1, t_2)^\top. \tag{2.12}$$

Договоримся умножать строку векторов на столбец чисел по обычным правилам умножения строки на столбец (см. равенство (1.5) в п. 1.1.3): в результате получается линейная комбинация векторов строки с коэффициентами столбца, т.е.

$$(\vec{c_1}, \vec{c_2}, \ldots, \vec{c_n}) \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \\ \ldots \\ t_n \end{pmatrix} = t_1 \vec{c_1} + t_2 \vec{c_2} + \ldots + t_n \vec{c_n}. \tag{2.13}$$

Итак, если рассматривать базис $\mathbf{B}$ как строку $(\vec{b}_1, \vec{b}_2)$, а координаты вектора $\vec{x}$ в базисе $\mathbf{B}$ в виде столбца (2.12), то из равенств (2.10) и (2.11) следует

$$\vec{x} = t_1 \vec{b}_1 + t_2 \vec{b}_2; \tag{2.14}$$

последнее равенство может быть записано в виде

$$\vec{x} = \mathbf{B}[\vec{x}]_{\mathbf{B}}. \tag{2.15}$$

Числа t_1 и t_2 определяются по вектору $\vec{x}$ однозначно. В самом деле, пусть $\vec{x} = s_1\vec{b}_1 + s_2\vec{b}_2$ для некоторых $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$. Тогда из (2.14) получаем $t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 = s_1\vec{b}_1 + s_2\vec{b}_2$, откуда $(t_1 - s_1)\vec{b}_1 + (t_2 - s_2)\vec{b}_2 = \vec{0}$. Если $t_1 \neq s_1$ или $t_2 \neq s_2$, то один из векторов $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ можно выразить через другой (например, при $t_1 \neq s_1$ имеем $\vec{b}_1 = \frac{s_2 - t_2}{t_1 - s_1}\vec{b}_2$); в силу предложения 2.1.1 векторы $\vec{b}_1$ и $\vec{b}_2$ оказываются коллинеарными. Так как по условию эти векторы неколлинеарны, заключаем, что $t_1 = s_1$ и $t_2 = s_2$.

Докажем, что для столбцов координат векторов на плоскости выполняются свойства (2.8) и (2.9). Проверим первое из них; второе доказывается аналогично. Пусть $\vec{x}, \vec{y}$ — два вектора, компланарные данной плоскости и $[\vec{x}]_B = (t_1, t_2)^\top, [\vec{y}]_{\mathbf{B}} = (u_1, u_2)^\top$ — их столбцы координат. Тогда в силу (2.14) имеем $\vec{x} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2$ и $\vec{y} = u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2$. Складывая эти равенства, получаем $\vec{x} + \vec{y} = t_1\vec{b}_1 + t_2\vec{b}_2 + u_1\vec{b}_1 + u_2\vec{b}_2 = (t_1 + u_1)\vec{b}_1 + (t_2 + u_2)\vec{b}_2$, откуда в силу единственности координат следует, что первая координата вектора $\vec{x} + \vec{y}$ равна $t_1 + u_1$, а вторая равна $t_2 + u_2$. Равенство (2.8) в рассматриваемом случае доказано.

Базисом в пространстве называется упорядоченная тройка некомпланарных векторов. Как и выше, мы рассматриваем ее как строку векторов. Следующее утверждение аналогично доказанным выше (но не сформулированным явно) утверждениям о базисах на прямой и на плоскости.

Теорема 2.1.1. *Пусть* $\mathbf{C}=(\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3)$ *— базис в пространстве. Для любого вектора* $\vec{x}$ *существуют однозначно определенные числа* t_1, t_2, t_3 *такие, что* $\vec{x} = t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + t_3\vec{c}_3$*; они называются* координатами *вектора* $\vec{x}$ *в базисе* $\mathbf{C}$ *и обозначаются (столбцом)* $[\vec{x}]_{\mathbf{C}}$. *Для столбцов координат суммы векторов* $\vec{x}$ *и* $\vec{y}$ *и произведения вектора* $\vec{x}$ *на число* t *справедливы формулы (2.8) и (2.9).*

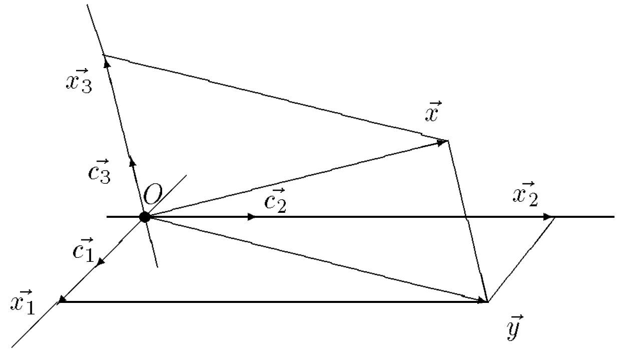

Рис. 10

Доказательство. Необходимо разложить произвольный вектор $\vec{x}$ пространства по трем некомпланарным векторам $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ (см. рис. 10). Для этого все векторы приводим к общему началу, скажем, к точке O и проводим прямые через точку O коллинеарно векторам $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ и плоскости через пары, составленные из этих прямых. Через конец изображения вектора $\vec{x}$ проводим прямую, коллинеарную вектору $\vec{c}_3$, до пересечения с плоскостью векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2$. Возьмем изображения векторов $\vec{y}$ на этой плоскости и $\vec{x}_3$ на прямой, проходящей через изображение $\vec{c}_3$; тогда $\vec{x} = \vec{y} + \vec{x}_3$. Вектор $\vec{y}$ коллинеарен плоскости векторов $\vec{c}_1, \vec{c}_2$; следовательно, можно разложить его по этим векторам и мы получаем $\vec{y} = \vec{x}_1 + \vec{x}_2$. Векторы $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ коллинеарны векторам $\vec{c}_1, \vec{c}_2, \vec{c}_3$ соответственно, поэтому для некоторых чисел t_1, t_2, t_3 имеем $\vec{x}_1 = t_1\vec{c}_1$, $\vec{x}_2 = t_2\vec{c}_2$, $\vec{x}_3 = t_3\vec{c}_3$. Равенство $\vec{x} = t_1\vec{c}_1 + t_2\vec{c}_2 + t_3\vec{c}_3$ доказано. Единственность координат и их свойства доказываются так же, как для случая плоскости. □

Укажем критерии коллинеарности и компланарности векторов в координатах, вытекающие из предложений 2.1.1, 2.1.2 и свойств 5, 8 определителей (см. п. 1.2.2, а также следствие 3.2.1 в п. 3.2.2 ниже).

Предложение 2.1.3. *Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда столбцы их координат в некотором базисе (на плоскости или в пространстве) пропорциональны, т.е. в матрице, составленной из этих столбцов, любой минор второго порядка равен нулю.*

Три вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда определитель матрицы, составленной из столбцов координат этих векторов в некотором базисе в пространстве, равен нулю.

В дальнейшем важную роль будут играть следующие частные случаи базисов на плоскости и в пространстве. Базис называется *ортонормированным*, если в нем все векторы имеют длину 1 и любые два различных вектора перпендикулярны. Стандартные обозначения для векторов ортонормированного базиса — $\vec{\imath}, \vec{\jmath}$ на плоскости и $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$ в пространстве.

2.1.5. Системы координат

Декартовой системой координат на прямой, на плоскости или в пространстве называется совокупность из фиксированной точки (называемой *началом координат* и обозначаемой O) и базиса на данной прямой, плоскости или в пространстве. *Радиус-вектором* любой точки M на данной прямой, плоскости или в пространстве называется вектор $\overrightarrow{OM}$, одно из изображений которого направлено из начала координат в точку M. *Координатами* точки M в данной системе координат называются координаты ее радиус-вектора в базисе системы координат. Таким образом, если в пространстве система координат задана началом O и базисом $C = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$, то произвольная точка M имеет координаты (x_M, y_M, z_M) такие, что $\overrightarrow{OM} = x_M\vec{a} + y_M\vec{b} + z_M\vec{c}$. Мы будем записывать точку с координатами в виде $M(x_M, y_M, z_M)$.

Декартова система координат называется *прямоугольной*, если ее базис является ортонормированным. В дальнейшем мы будем рассматривать только прямоугольные декартовы системы координат.

Отнесем базисные векторы к началу координат и проведем через начало координат прямые, коллинеарные базисным векторам. Эти прямые называются *осями координат.* В пространстве имеются *ось абсцисс* (Ox), *ось ординат* (Oy) и *ось аппликат* (Oz). На плоскости ось аппликат отсутствует. Координаты точки в (прямоугольной декартовой) системе координат есть ортогональные проекции ее радиус-вектора на оси координат.

Рассмотрим две простые задачи о координатах точки[1]. Зафиксируем в пространстве систему координат $O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$.

Координаты вектора. Пусть из точки $M(x_M, y_M, z_M)$ в точку $N(x_N, y_N, z_N)$ проведен вектор $\vec{a}$. Найти его координаты.

Чтобы найти решение, заметим, что $\overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OM} + \vec{a}$ (см. рис. 11), откуда $\vec{a} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}$. По теореме 2.1.1 в силу определения координат точки имеем следующие формулы для координат x_a, y_a, z_a вектора $\vec{a}$:

$$x_a = x_N - x_M;\ y_a = y_N - y_M;\ z_a = z_N - z_M. \tag{2.16}$$

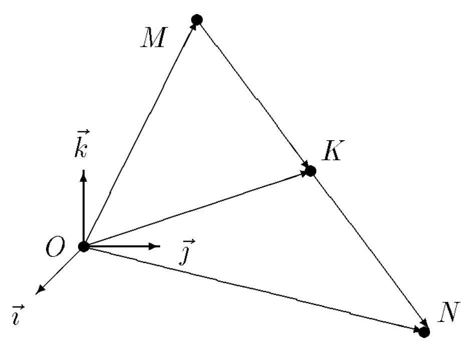

Рис. 11

[1] Читателю предлагается проделать на плоскости и на прямой то, что сейчас будет проделано в пространстве.

Координаты точки, делящей направленный отрезок в данном отношении. Пусть точки $M(x_M, y_M, z_M)$ и $N(x_N, y_N, z_N)$ различны. Говорят, что точка K *делит направленный отрезок* $\overrightarrow{MN}$ *в отношении* λ, если $\overrightarrow{MK} = \lambda\,\overrightarrow{KN}$. Из этого определения непосредственно следует, что точка K лежит на прямой, проведенной через M и N и K не может совпадать с N; число λ может быть как положительным (тогда K лежит между M и N), так и отрицательным (тогда K лежит вне отрезка $[M, N]$), но оно не может быть равно -1. При $K = M$ имеем $\lambda = 0$. Требуется по данным точкам $M(x_M, y_M, z_M)$, $N(x_N, y_N, z_N)$ и данному числу $\lambda \neq -1$ найти координаты точки K, делящей отрезок $\overrightarrow{MN}$ в отношении λ.

Заметим, что $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{KN}$ (см. рис. 11). Найдем вектор $\overrightarrow{KN}$. Имеем $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MK} + \overrightarrow{KN} = \lambda\,\overrightarrow{KN} + \overrightarrow{KN} = (1+\lambda)\,\overrightarrow{KN}$, откуда $\overrightarrow{KN} = \frac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{MN}$. Подставляя полученное значение $\overrightarrow{KN}$ в выражение для $\overrightarrow{OK}$, видим, что

$$\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{ON} - \tfrac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \tfrac{1}{1+\lambda}(\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM}) =$$
$$= \tfrac{1}{1+\lambda}\,\overrightarrow{OM} + \tfrac{\lambda}{1+\lambda}\,\overrightarrow{ON},$$

откуда получаются следующие формулы для координат точки K:

$$x_K = \frac{x_M + \lambda x_N}{\lambda + 1};\ y_K = \frac{y_M + \lambda y_N}{\lambda + 1};\ z_K = \frac{z_M + \lambda z_N}{\lambda + 1}. \qquad (2.17)$$

2.1.6. Скалярное произведение

Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, обозначаемое через $\vec{a}\vec{b}$ и вычисляемое по формуле

$$\vec{a}\vec{b} = \begin{cases} 0, & \text{если } \vec{a} = \vec{0} \text{ или } \vec{b} = \vec{0}; \\ |\vec{a}||\vec{b}| \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Принимая во внимание формулу (2.7), получаем выражение скалярного произведения через проекции векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ друг на друга:

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|\,\text{пр}_{\vec{a}}\vec{b} \text{ при } \vec{a} \neq \vec{0}; \tag{2.18}$$

$$\vec{a}\vec{b} = |\vec{b}|\,\text{пр}_{\vec{b}}\vec{a} \text{ при } \vec{b} \neq \vec{0}. \tag{2.19}$$

В следующем утверждении собраны свойства скалярного произведения векторов.

Предложение 2.1.4. *Пусть $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — произвольные векторы, t — произвольное число. Тогда справедливы следующие равенства:*

1) $\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{a}$; 2) $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$;

3) $(t\vec{a})\vec{b} = t(\vec{a}\vec{b})$; 4) $\vec{a}^2 = \vec{a}\vec{a} = |\vec{a}|^2$.

Доказательство. Справедливость утверждений 1) и 4) непосредственно следует из определения скалярного произведения. Утверждения 2) и 3) доказываются сходным образом, и мы докажем лишь первое из них. Если $\vec{c} = \vec{0}$, то равенство в п. 2) очевидно. Пусть $\vec{c} \neq \vec{0}$. В силу формулы (2.18) и свойства проекций (2.6) имеем $(\vec{a}+\vec{b})\vec{c} = (\text{пр}_{\vec{c}}(\vec{a}+\vec{b}))|\vec{c}| = (\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a} + \text{пр}_{\vec{c}}\vec{b})|\vec{c}| = (\text{пр}_{\vec{c}}\vec{a})|\vec{c}| + (\text{пр}_{\vec{c}}\vec{b})|\vec{c}| = \vec{a}\vec{c} + \vec{b}\vec{c}$, что и требуется доказать. □

Два вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю. Из определения скалярного произведения следует, что векторы ортогональны тогда и только тогда, когда либо один из них равен нулевому вектору, либо угол между ними равен $\pi/2$, т.е. они перпендикулярны.

Найдем выражение для скалярного произведения в координатах. Пусть даны координаты векторов[1] $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ и $\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$. Имеем $\vec{a} = x_a\vec{\imath} + y_a\vec{\jmath} + z_a\vec{k}$ и $\vec{b} = x_b\vec{\imath} + y_b\vec{\jmath} + z_b\vec{k}$.

[1] Для краткости и удобства записи будем писать $\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$ вместо $[\vec{a}]^\top = (x_a, y_a, z_a)$.

Учитывая, что скалярные квадраты базисных векторов равны 1 и различные базисные векторы взаимно перпендикулярны, получаем в соответствии с предложением 2.1.4
$\vec{a}\vec{b} = (x_a\vec{\imath} + y_a\vec{\jmath} + z_a\vec{k})(x_b\vec{\imath} + y_b\vec{\jmath} + z_b\vec{k}) = x_a x_b \vec{\imath}^2 + x_a y_b \vec{\imath}\vec{\jmath} + x_a z_b \vec{\imath}\vec{k} + {}$ $+ y_a x_b \vec{\imath}\vec{\jmath} + y_a y_b \vec{\jmath}^2 + y_a z_b \vec{\jmath}\vec{k} + z_a x_b \vec{\imath}\vec{k} + z_a y_b \vec{\jmath}\vec{k} + zaz_b \vec{k}^2 = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$. Таким образом,

$$\vec{a}\vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b. \tag{2.20}$$

С помощью формул (2.20) и (2.18), а также определения скалярного произведения и предложения 2.1.4 г) получаем следующие формулы:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}; \tag{2.21}$$

$$\text{если } \vec{a} \neq \vec{0}, \text{ то } \mathsf{пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}}; \tag{2.22}$$

если $\vec{a} \neq \vec{0}$ и $\vec{b} \neq \vec{0}$, то

$$\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \frac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}. \tag{2.23}$$

В частности, условие ортогональности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ в координатах имеет вид

$$x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0. \tag{2.24}$$

Рассмотрим произвольный ненулевой вектор $\vec{a}$ и найдем косинусы углов, которые он образует с базисными ортами (*направляющие косинусы* вектора $\vec{a}$). По формуле (2.23) имеем $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{\imath}}) = {}$ $= x_a/|\vec{a}|$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{\jmath}}) = y_a/|\vec{a}|$, $\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}}) = z_a/|\vec{a}|$. Таким образом, получаем равенство $(\cos(\widehat{\vec{a}, \vec{\imath}}), \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{\jmath}}), \cos(\widehat{\vec{a}, \vec{k}})) = \frac{1}{|\vec{a}|}(x_a, y_a, z_a) = {}$ $= \frac{1}{|\vec{a}|}\vec{a} = \vec{e}_{\vec{a}}$, т.е. вектор с координатами, которые являются направляющими косинусами вектора $\vec{a}$, есть в точности орт $\vec{e}_{\vec{a}}$ вектора $\vec{a}$. В частности, сумма квадратов направляющих косинусов вектора $\vec{a}$ равна 1.

§ 2.2. Аналитическая геометрия на плоскости

На плоскости рассматривается прямая линия в прямоугольной декартовой системе координат. Такая система предполагается зафиксированной во всех разделах этого параграфа.

2.2.1. Уравнение линии на плоскости

Определения линии на плоскости и в пространстве, равно как и определение поверхности в пространстве, являются весьма сложными и требуют развития специального математического аппарата; они были окончательно сформулированы лишь в начале XX века[1]. Здесь и в п. 2.3.1 эти определения не приводятся, а рассматриваются лишь способы задания линий и поверхностей координатными и параметрическими уравнениями.

Говорят, что *уравнение* $F(x, y) = 0$ *задает линию* l на плоскости, если при подстановке координат любой точки, лежащей на линии l, в это уравнение оно обращается в верное равенство, а при подстановке координат любой точки, не лежащей на линии, верного равенства не получается. При этом уравнение $F(x, y) = 0$ называется *координатным уравнением* линии l. Например, уравнение окружности радиуса r с центром в начале координат имеет вид $x^2 + y^2 = r^2$; в качестве $F(x, y)$ здесь можно взять выражение $x^2 + y^2 - r^2$.

Наряду с координатным уравнением линии часто используются ее *параметрические уравнения*, которые выражают координаты любой точки, лежащей на линии, как функции одного параметра: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где t пробегает некоторое подмножество множества действительных чисел. Например, параметрические уравнения окружности радиуса r с центром в начале

[1]Подробнее об этом можно узнать, например, из статей в [24] “Линия” (с. 321–323) и “Поверхность” (с. 462).

координат имеют вид $x = r\cos t,\ y = r\sin t\ (t \in [0, 2\pi))$.

2.2.2. Прямая линия на плоскости

Чтобы задать прямую линию на плоскости, необходимо указать точку, лежащую на этой прямой, и некоторый коллинеарный ей ненулевой вектор. Любой такой вектор называется *направляющим вектором* данной прямой. Зафиксируем декартову прямоугольную систему координат на плоскости и выведем параметрические уравнения прямой α, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a}$ с координатами (m, l). Из простейших геометрических соображений следует, что точка $M(x, y)$ лежит на прямой α тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны (см. рис. 12).

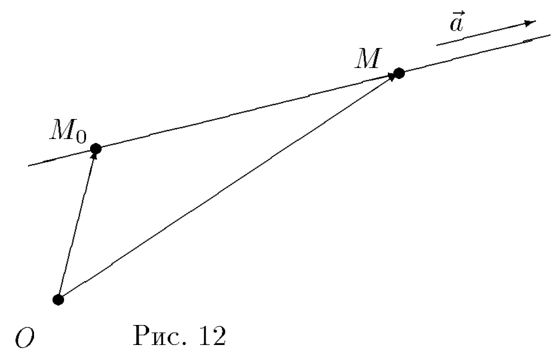

Рис. 12

По предложению 2.1.1 условие $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{a}$ равносильно тому, что $\overrightarrow{M_0M} = t\vec{a}$ для некоторого числа t. Расписывая последнее векторное равенство по координатам, получаем $x - x_0 = tm,\ y - y_0 = tl$, откуда следуют параметрические уравнения прямой на плоскости:

$$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + lt\ (t \in \mathbb{R}). \tag{2.25}$$

Чтобы получить координатное уравнение прямой на плоскости, воспользуемся условием коллинеарности векторов, даваемым предложением 2.1.3. Векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда определитель из их координат равен нулю. Отсюда получаем координатное уравнение прямой на плоскости в виде

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ m & l \end{vmatrix} = 0. \tag{2.26}$$

Раскрывая определитель, имеем $l(x - x_0) - m(y - y_0) = 0$, что равносильно $lx - my - lx_0 + my_0 = 0$. Полагая $A = l$, $B = -m$, $C = -lx_0 + my_0$, получаем *общее уравнение* прямой

$$Ax + By + C = 0, \text{ где } A \neq 0 \text{ или } B \neq 0. \tag{2.27}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2.1. *Всякая прямая на плоскости может быть задана в декартовой системе координат алгебраическим уравнением первого порядка вида (2.27), и обратно, каждое алгебраическое уравнение первого порядка (2.27) задает в декартовой системе координат на плоскости некоторую прямую с направляющим вектором, имеющим координаты* $(-B, A)$.

Доказательство. Прямое утверждение теоремы уже доказано. Для доказательства обратного утверждения рассмотрим кривую, заданную в некоторой системе координат уравнением (2.27). Зафиксируем точку $M_0(x_0, y_0)$ на данной кривой. Ее координаты можно найти, взяв ненулевой коэффициент из множества $\{A, B\}$, придав значение 0 переменной, умножаемый на другой коэффициент, и определив значение оставшейся переменной делением $-C$ на соответствующий коэффициент. Например, если $A \neq 0$, то точка с координатами $(-\frac{C}{A}, 0)$ лежит на кривой. Рассмотрим уравнение прямой, проходящей через точку M_0 и имеющей направляющий вектор $\vec{a}$ с координатами $(-B, A)$. Согласно формуле (2.26) это уравнение имеет вид $\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ -B & A \end{vmatrix} = 0$. Раскрывая определитель, имеем $A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$ или

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0. \tag{2.28}$$

Так как точка $M_0(x_0, y_0)$ лежит на кривой, имеем $Ax_0 + By_0 + C = 0$, т.е. $C = -Ax_0 - By_0$. Следовательно, уравнение (2.28) принимает вид (2.27), т.е. исходная кривая совпадает со взятой прямой, что завершает доказательство теоремы. □

Теорема 2.2.1 описывает кривые, задаваемые алгебраическими уравнениями первого порядка от двух переменных: это в точности все прямые на плоскости.

Если использовать условие коллинеарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$ и $\vec{a}$ (см. рис. 12) в форме пропорциональности координат векторов, то координатное уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ коллинеарно вектору $\vec{a}$ с координатами (m, l), может быть записано в *каноническом виде*

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{l}. \tag{2.29}$$

Равенство здесь следует понимать как пропорцию, т.е. оно имеет место тогда и только тогда, когда $(x - x_0)l = (y - y_0)m$.

Пусть прямая в некоторой системе координат задана общим уравнением (2.27). Рассмотрим вектор $\vec{n}$ с координатами (A, B). Так как скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и направляющего вектора $\vec{c}$ этой прямой с координатами $(-B, A)$ равно $A(-B) + BA = 0$, а сами векторы ненулевые, вектор $\vec{n}$ перпендикулярен к рассматриваемой прямой. Это ее *нормальный вектор*. Если $M_0(x_0, y_0)$ — некоторая точка прямой, то, вычитая из общего уравнения (2.27) равенство $Ax_0 + By_0 + C = 0$, получаем равносильное общему следующее уравнение прямой, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$ с координатами (A, B):

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{2.30}$$

2.2.3. Расстояние от точки до прямой на плоскости

Рассмотрим следующую задачу. В прямоугольной декартовой системе координат задано уравнение (2.27) прямой α и заданы координаты точки $M_1(x_1, y_1)$ на плоскости (см. рис. 13). Найти расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой α.

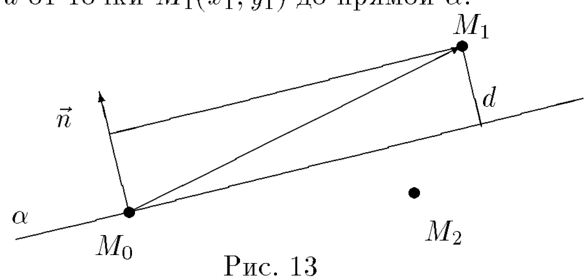

Рис. 13

Зафиксируем на прямой α точку $M_0(x_0, y_0)$. Рассмотрим число $\delta = \text{пр}_{\vec{n}}\, \overrightarrow{M_0M_1}$. Оно называется *отклонением* точки M_1 от прямой α. Ясно, что $d = |\delta|$. Выведем формулу для отклонения δ. Согласно формуле (2.22), используя координаты векторов $\overrightarrow{M_0M_1}$ и $\vec{n}$ и принимая во внимание формулу (2.21), а также равенство $C = -Ax_0 - By_0$, вытекающее из того, что точка M_0 лежит на прямой, имеем

$$\delta = \text{пр}_n M_0M_1 = \frac{(\overrightarrow{M_0M_1})\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0)}{\sqrt{A^2 + B^2}} =$$
$$= \frac{Ax_1 + By_1 - Ax_0 - By_0}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

откуда получается следующая формула для отклонения точки $M_1(x_1, y_1)$ от прямой с уравнением $Ax + By + C = 0$ на плоскости:

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.31}$$

Для расстояния от точки до прямой имеем такую формулу

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \tag{2.32}$$

Прямая α делит плоскость на две части, называемые *полуплоскостями* (см. рис. 13). Из определения проекции вектора на ось следует, что для всех точек той полуплоскости, куда направлен нормальный вектор к прямой, отклонение положительно, а для точек из другой полуплоскости (в частности, для точки M_2 на рис. 13) оно отрицательно. Так как знак отклонения определяется знаком числителя правой части формулы (2.31), получаем следующее утверждение.

Предложение 2.2.1. *Точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$ лежат по одну сторону от прямой с общим уравнением $Ax+By+C=0$ тогда и только тогда, когда числа Ax_1+By_1+C и Ax_2+By_2+C имеют одинаковые знаки.*

Таким образом, полуплоскость состоит из всех точек, для координат которых левая часть уравнения прямой сохраняет знак.

2.2.4. Взаимное расположение двух прямых

Рассмотрим две прямые, заданные общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2 = 0.$$

Эти прямые могут пересекаться, т.е. иметь одну общую точку, быть параллельны, т.е. не иметь общих точек, и могут совпадать, т.е. иметь две различные общие точки (и тогда все точки этих прямых совпадают). Как определить по уравнениям прямых их взаимное расположение? Для этого можно искать общие точки этих прямых, т.е. исследовать систему линейных уравнений

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2 = 0, \end{cases} \tag{2.33}$$

составленную из уравнений данных прямых. Известно, что система (2.33) будет определенной тогда и только тогда, когда ее главный определитель $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Это равносильно тому, что $\frac{A_1}{A_2} \neq \frac{B_1}{B_2}$. Геометрически последнее условие означает, в силу предложения 2.1.3, что нормальный вектор $\vec{n}_1$ к первой прямой с координатами A_1, B_1 неколлинеарен нормальному вектору $\vec{n}_2$ ко второй прямой с координатами A_2, B_2, откуда следует, что прямые не параллельны, т.е. пересекаются. Система (2.33) будет несовместной тогда и только тогда, когда ее главный определитель равен нулю, а по крайней мере один из определителей при неизвестных $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$ или $\begin{vmatrix} C_1 & B_1 \\ C_2 & B_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Это равносильно условиям $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \neq \frac{C_1}{C_2}$; здесь равенство обеспечивает коллинеарность нормальных векторов. Наконец, система (2.33) будет неопределенной, если все ее определители равны нулю, что равносильно пропорциональности всех коэффициентов уравнений: $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$. Таким образом, каждая прямая на плоскости может быть задана одним из бесконечного множества уравнений, каждое из которых отличается от другого ненулевым множителем.

Угол между прямыми может быть найден как угол между их направляющими векторами. Так как углы с взаимно перпендикулярными сторонами равны, угол между прямыми можно искать и как угол между их нормальными векторами. Если пересекающиеся прямые не перпендикулярны, то острый или тупой угол между ними может быть найден за счет замены одного из направляющих [нормальных] векторов противоположным к нему. Формулу (2.23) для косинуса угла между векторами см. в п. 2.1.4. Две прямые, заданные общими уравнениями (2.33), будут перпендикулярны тогда и только тогда, когда перпендикулярны их нормальные векторы:

$$A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \tag{2.34}$$

2.2.5. Примеры решения задач

1. Найти точки пересечения медиан, высот и биссектрис в треугольнике с вершинами $A(-2,1)$, $B(2,5)$, $C(4,-1)$.

Решение. Напомним, что медиана в треугольнике соединяет вершину с серединой противоположной стороны, высота — отрезок перпендикуляра, опущенный из вершины на противоположную сторону, биссектриса — отрезок, делящий внутренний угол пополам и проведенный из вершины до противоположной стороны. Из школьного курса геометрии известно, что три медианы [высоты, биссектрисы] в треугольнике пересекаются в одной точке.

Найдем уравнения прямых, на которых лежат медианы, проведенные из вершин A и B. Для нахождения середин D и E сторон BC и AC используем формулы (2.17) на плоскости (без третьей координаты) с $\lambda = 1$. Вычисляем координаты этих точек: $D(3,2)$ и $E(1,0)$. Находим уравнения прямых, проходящих через точки A, D и B, E (используем формулу (2.29); направляющими векторами для них будут векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BE}$ соответственно): $AD: \ \frac{x+2}{5} = \frac{y-1}{1}$, $BE: \ \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{-5}$. Раскрывая пропорции, приходим к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} x - 5y + 7 = 0; \\ 5x - y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем координаты точки пересечения медиан $(\frac{4}{3}, \frac{5}{3})$.

Найдем уравнения прямых, на которых лежат высоты, проведенные из вершин A и B. Высота AF перпендикулярна стороне BC, поэтому ее уравнение можно записать, используя формулу (2.30) (прямая проходит через точку A перпендикулярно вектору $\overrightarrow{BC}$): $2(x+2) - 6(y-1) = 0$. Аналогично получаем уравнение высоты BG: $6(x-2) - 2(y-5) = 0$. Мы приходим к следующей системе линейных уравнений: $\begin{cases} x - 3y + 5 = 0; \\ 3x - y - 1 = 0. \end{cases}$ Решая систему, получаем координаты точки пересечения высот $(1, 2)$.

Найдем уравнения прямых, на которых лежат биссектрисы, проведенные из вершин A и C. Для этого найдем их направляющие векторы. Воспользуемся тем, что сумма векторов, имеющих равные длины, направлена по биссектрисе угла между ними (так как в ромбе диагонали являются биссектрисами соответствующих углов). Имеем $\overrightarrow{AC} = (6, -2)$ и $\overrightarrow{AB} = (4, 4)$. Векторы $\vec{a} = (3, -1)$ и $\vec{b} = (1, 1)$ сонаправлены с $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$ соответственно. Так как $|\vec{a}| = \sqrt{10}$ и $|\vec{b}| = \sqrt{2}$, вектор $\vec{c} = \vec{a} + \sqrt{5}\vec{b}$ направлен по биссектрисе AH. Ее уравнение запишется так: $\frac{x+2}{3+\sqrt{5}} = \frac{y-1}{-1+\sqrt{5}}$. Аналогично находим уравнение биссектрисы CL. Так как $\overrightarrow{CA} = (-6, 2)$ и $\overrightarrow{CB} = (-2, 6)$, длины этих векторов одинаковы и их сумма направлена по биссектрисе. Взяв вместо суммы сонаправленный с ней вектор $(-1, 1)$, запишем уравнение прямой CL: $\frac{x-4}{-1} = \frac{y-1}{1}$. Получаем систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (\sqrt{5} - 1)x - (3 + \sqrt{5})y + 3\sqrt{5} + 1 = 0; \\ x + y - 5 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получаем координаты точки пересечения биссектрис $\left(\frac{13\sqrt{5}+3}{19}, \frac{-13\sqrt{5}+92}{19}\right)$.

2. Найти координаты точки Q, симметричной точке $P(8, -9)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(3, -4)$ и $B(-1, -2)$.

Решение. Точка, симметричная данной относительно прямой, лежит на перпендикуляре, проведенном через данную точку к прямой, на таком же расстоянии от прямой, как данная точка. Если через R обозначить проекцию точки P на данную прямую, то R есть точка пересечения прямой и перпендикулярной к ней прямой, проходящей через точку P, и R является серединой отрезка PQ. Чтобы найти координаты точки Q, сначала найдем координаты точки R. Запишем уравнение прямой, проходящей через точку P перпендикулярно вектору $\overrightarrow{AB}$: $-4(x-8)+2(y+9)=0$, или $2x-y-25=0$. Запишем уравнение прямой AB: $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+4}{2}$, или $x+2y+5=0$. Решая систему из двух полученных уравнений, находим координаты точки $R(9,-7)$. Исходя из того, что R — середина отрезка PQ, имеем, что координаты точки R суть полусуммы соответствующих координат точек P, Q. Отсюда получаем уравнения $\frac{1}{2}(8+x_Q)=9$, $\frac{1}{2}(-9+y_Q)=-7$ и находим координаты точки $Q(10,-5)$.

§ 2.3. Аналитическая геометрия в пространстве

В пространстве рассматриваются только плоскости и прямые. Все рассмотрения проводятся в прямоугольной декартовой системе координат, которая предполагается зафиксированной во всех пунктах этого параграфа.

2.3.1. Уравнения поверхностей и линий в пространстве

Определение координатного уравнения поверхности в пространстве полностью аналогично определению координатного уравнения линии на плоскости. Говорят, что уравнение $F(x,y,z)=0$ *задает* поверхность α, если координаты любой точки, принадлежащей поверхности, удовлетворяют уравнению $F(x,y,z)=0$, а координаты любой точки, не принадлежащей поверхности, не удовлетворяют этому уравнению. При этом $F(x,y,z)=0$ называется *координатным уравнением* поверхности α. Например, сфера радиуса R с центром в точке $M_0(x_0,y_0,z_0)$ имеет координатное уравнение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$. Выражение $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2-R^2$ может быть здесь взято в качестве $F(x,y,z)$.

Параметрические уравнения поверхности выражают координаты любой точки, лежащей на поверхности, через функции от двух параметров, независимо друг от друга пробегающих некоторые множества действительных чисел: $x = \xi(u, v)$, $y = \eta(u, v)$, $z = \zeta(u, v)$, $u \in D_1$, $v \in D_2$. Например, параметрические уравнения сферы радиуса R с центром в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ могут быть записаны в виде $x = x_0 + R\cos u \sin v$, $y = y_0 + R\sin u \sin v$, $z = z_0 + R\cos v$, где для произвольной точки $M(x, y, z)$ на сфере v — угол, образуемый вектором $\overrightarrow{M_0M}$ с вектором $\vec{k}$, а u — угол, образуемый проекцией вектора $\overrightarrow{M_0M}$ на плоскость Oxy с базисным вектором $\vec{i}$. При этом $u \in [0, 2\pi)$, $v \in [0, \pi]$.

Линия в пространстве задается как множество общих точек двух поверхностей, т.е. линия пересечения двух поверхностей. *Координатные уравнения линии* — пара уравнений

$$\begin{cases} F(x, y, z) = 0; \\ G(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

определяющих поверхности, пересечением которых служит данная линия. Например, окружность с центром в начале координат радиуса 1, расположенная в плоскости Oxy, может быть задана уравнениями

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 1; \\ z = 0. \end{cases}$$

Параметрические уравнения линии в пространстве похожи на параметрические уравнения линии на плоскости; они выражают координаты точки, лежащей на линии, через функции одного параметра t: $x = \xi(t)$, $y = \eta(t)$, $z = \zeta(t)$, $t \in D$. Например, упомянутая в конце предыдущего абзаца окружность может быть задана параметрически следующим образом: $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = 0$ ($t \in [0, 2\pi)$).

2.3.2. Уравнения плоскости

Чтобы задать в пространстве плоскость, достаточно задать точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, лежащую на этой плоскости, и два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$, компланарных этой плоскости. Пусть их координаты будут (k, l, m) и (p, q, s) соответственно. Чтобы вывести координатное и параметрические уравнения плоскости, заметим, что *точка $M(x, y, z)$ лежит на плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ компланарны.* Так как векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны, в силу предложения 2.1.2 вектор $\overrightarrow{M_0M}$ может быть разложен по векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следовательно, $\overrightarrow{M_0M} = u\vec{a} + v\vec{b}$. Расписывая последнее векторное равенство по координатам, получаем $x - x_0 = uk + vp$, $y - y_0 = ul + vq$, $z - z_0 = um + vs$, откуда получаются параметрические уравнения плоскости в пространстве:

$$\begin{cases} x = x_0 + uk + vp, \\ y = y_0 + ul + vq, \\ z = z_0 + um + vs. \end{cases} \tag{2.35}$$

Здесь числа k, l, m и p, q, s непропорциональны, так как они являются координатами неколлинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Следовательно, по крайней мере один из определителей $\begin{vmatrix} k & p \\ l & q \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} k & p \\ m & s \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} l & q \\ m & s \end{vmatrix}$ отличен от нуля.

Чтобы получить координатное уравнение плоскости, можно воспользоваться вторым утверждением предложения 2.1.3. Выпишем условия компланарности векторов $\overrightarrow{M_0M}$, $\vec{a}$, $\vec{b}$ в координатах:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ k & l & m \\ p & q & s \end{vmatrix} = 0. \tag{2.36}$$

В таком виде это уравнение удобно для запоминания. Разлагая определитель по первой строке, приходим к координатному уравнению плоскости в виде

$$(x-x_0)\begin{vmatrix} l & m \\ q & s \end{vmatrix} - (y-y_0)\begin{vmatrix} k & m \\ p & s \end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix} k & p \\ l & q \end{vmatrix} = 0. \quad (2.37)$$

Полагая в (2.37) $A = \begin{vmatrix} l & m \\ q & s \end{vmatrix}$, $B = -\begin{vmatrix} k & m \\ p & s \end{vmatrix}$ и $C = \begin{vmatrix} k & p \\ l & q \end{vmatrix}$, получаем уравнение плоскости в виде

$$A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) = 0. \quad (2.38)$$

Это уравнение имеет следующую геометрическую интерпретацию. Числа A, B, C рассмотрим в качестве координат некоторого вектора $\vec{n}$, а выражения $(x-x_0), (y-y_0), (z-z_0)$ являются координатами вектора $\overrightarrow{M_0M}$, компланарного плоскости. Напомним, что M — произвольная точка плоскости, поэтому $\overrightarrow{M_0M}$ можно рассматривать как произвольный вектор, компланарный плоскости. Левая часть уравнения (2.38) представляет собой скалярное произведение векторов $\vec{n}$ и $\overrightarrow{M_0M}$ в координатах, так что эти векторы ортогональны. Таким образом, $\vec{n}$ является вектором, перпендикулярным к плоскости; его называют *нормальным вектором* данной плоскости. Итак, (2.38) можно рассматривать как уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$ с координатами (A, B, C).

Раскрывая в (2.38) скобки и обозначая выражение $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ через D, получаем *общее уравнение плоскости*

$$Ax + By + Cz + D = 0. \quad (2.39)$$

Это алгебраическое уравнение первого порядка с тремя неизвестными. В нем по крайней мере один из коэффициентов A, B, C отличен от нуля.

Теорема 2.3.1. *Любая плоскость в прямоугольной декартовой системе координат в пространстве задается алгебраическим уравнением первого порядка с тремя неизвестными (2.39), и обратно, каждое такое уравнение задает плоскость.*

Доказательство. Первое утверждение уже доказано. Для доказательства второго рассмотрим алгебраическое уравнение первого порядка с тремя неизвестными (2.39) и поверхность, задаваемую этим уравнением. Выберем на этой поверхности точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$. Для этого возьмем неизвестное, коэффициент при котором отличен от нуля (пусть для определенности это будет x, т.е. $A \neq 0$), и положим $y_0 = 0$, $z_0 = 0$, а x_0 найдем из уравнения $Ax_0 + D = 0$. Тогда

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0. \tag{2.40}$$

Рассмотрим плоскость, проходящую через точку M_0 перпендикулярно вектору $\vec{n}$ с координатами (A, B, C). Это уравнение имеет вид (2.38). Раскрывая в нем скобки и заменяя выражение $-Ax_0 - By_0 - Cz_0$ через D на основании равенства (2.40), получаем, что уравнение плоскости принимает вид (2.39), т.е. рассматриваемая поверхность совпадает с этой плоскостью, что завершает доказательство теоремы. □

Из общего уравнения плоскости (2.39) сразу определяются координаты ее нормального вектора (A, B, C). В качестве направляющих векторов можно взять любые два неколлинеарных вектора, перпендикулярных нормальному. Например, если $A \neq 0$, то такими векторами будут векторы с координатами $(-B, A, 0)$ и $(-C, 0, A)$. Читателю предлагается выписать векторы, которые следует взять при $B \neq 0$ или $C \neq 0$.

2.3.3. Расстояние от точки до плоскости

Аналогично тому, как это сделано в п. 2.2.2, можно вывести следующие формулы для отклонения и расстояния от точки

$M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\delta = \frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \tag{2.41}$$

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{2.42}$$

Каждая плоскость делит пространство на две части, называемые *полупространствами.* Аналогично предложению 2.2.1 можно доказать следующее

Предложение 2.3.1. *Точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ лежат по одну сторону от плоскости с общим уравнением $Ax+By+Cz+$ $+D = 0$ тогда и только тогда, когда числа $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ имеют одинаковые знаки.*

Таким образом, полупространство состоит из всех точек, для координат которых левая часть уравнения плоскости сохраняет знак.

2.3.4. Взаимное расположение двух плоскостей

Рассмотрим две плоскости, заданные общими уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Эти плоскости могут пересекаться (по прямой), быть параллельны, т.е. не иметь общих точек, и могут совпадать. Как определить по уравнениям плоскостей их взаимное расположение? Как и в случае прямых на плоскости (2.2.4), для этого можно искать общие точки этих плоскостей, т.е. исследовать систему

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \tag{2.43}$$

составленную из уравнений данных плоскостей. Для упрощения этого исследования мы применим геометрический подход. Ясно, что плоскости пересекаются тогда и только тогда, когда их нормальные векторы неколлинеарны, т.е. их координаты (A_1, B_1, C_1) и (A_2, B_2, C_2) не пропорциональны. Если же указанные координаты пропорциональны, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$, то плоскости либо параллельны, когда свободные члены уравнений не пропорциональны другим коэффициентам, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}$ (поскольку в этом случае система уравнений (2.43) несовместна), либо совпадают, когда свободные члены уравнений пропорциональны этим коэффициентам, т.е. $\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$ (так как в этом случае система уравнений (2.43) равносильна одному уравнению). В частности, плоскость может быть задана одним из бесконечного множества уравнений, каждое из которых отличается от другого ненулевым множителем.

Две пересекающиеся плоскости образуют четыре двугранных угла. Величины линейных углов для этих углов можно найти исходя из того, что угол между нормальными векторами к этим плоскостям равен одному из них. Для угла α между нормальными векторами плоскостей (2.43) получаем формулу

$$\cos\alpha = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \tag{2.44}$$

В частности, указанные плоскости будут перпендикулярны тогда и только тогда, когда

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \tag{2.45}$$

2.3.5. Прямая в пространстве

Как и для случая прямой на плоскости, чтобы задать прямую линию в пространстве, необходимо указать точку, лежащую на этой прямой и некоторый ненулевой вектор, коллинеарный ей. Любой такой вектор называется *направляющим вектором* данной прямой. Зафиксируем декартову прямоугольную систему координат в пространстве. Параметрические уравнения прямой α, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и имеющей направляющий вектор $\vec{a}$ с координатами (m, l, k), выводятся аналогично проделанному в п. 2.2.4:

$$x = x_0 + mt,\ y = y_0 + lt,\ z = z_0 + kt\ (t \in \mathbb{R}). \tag{2.46}$$

Также аналогично проделанному в п. 2.2.4 выводу уравнения (2.29) получаем *канонические уравнения* прямой в пространстве:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{l} = \frac{z - z_0}{k}. \tag{2.47}$$

Отметим, что равенства в (2.47) следует понимать как пропорции: если внизу стоит 0, то и вверху выражение равно нулю.

Равенства (2.47) могут быть переписаны в виде системы из двух линейных уравнений с тремя неизвестными (при условии, что $l \neq 0$)[1]:

$$\begin{cases} lx - my - lx_0 + my_0 = 0, \\ ky - lz - ky_0 + lz_0 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, прямая в пространстве может быть задана двумя линейными уравнениями с тремя неизвестными, т.е. как множество общих точек или линия пересечения двух плоскостей. Это второй способ задания прямой в пространстве. Система (2.43) определяет прямую в пространстве при условии, что коэффициенты при неизвестных в них непропорциональны, т.е. по крайней мере один из определителей $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A_1 & C_1 \\ A_2 & C_2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ b_2 & C_2 \end{vmatrix}$ отличен от нуля. Уравнения (2.43) называются *общими уравнениями* прямой в пространстве. Чтобы перейти от общих уравнений прямой к параметрическим, необходимо найти на ней две

[1] Это условие не ограничивает общности, так как по крайней мере один из коэффициентов m, l, k отличен от нуля.

различные точки, скажем, $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, а затем записать параметрические уравнения (2.46), используя координаты точки M_1 и беря в качестве направляющего вектор $\overrightarrow{M_1M_2}$. Координаты точек M_1 и M_2 можно найти следующим образом. Предположим для определенности, что $\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \neq 0$. Тогда значения z_1 и z_2 можно взять произвольно (разумеется, различными) и найти значения x_1, y_1 и x_2, y_2 из следующих систем с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_1 + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y = -C_2z_1 + D_2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} A_1x + B_1y = -C_1z_2 + D_1 = 0; \\ A_2x + B_2y = -C_2z_2 + D_2 = 0. \end{cases}$$

Эти системы являются определенными в силу теоремы 1.2.5.

2.3.6. Взаимное расположение плоскости и прямой

Пусть даны плоскость, заданная общим уравнением (2.39), и прямая, заданная параметрическими уравнениями (2.46). Требуется определить, как они расположены в пространстве. Известно, что плоскость и прямая могут пересекаться (т.е. иметь одну общую точку), могут быть параллельны (не иметь общих точек) и прямая может лежать в плоскости. Первое имеет место в случае, когда нормальный вектор $\vec{n}$ плоскости не перпендикулярен к направляющему вектору $\vec{a}$ прямой, что равносильно условию $\vec{n}\vec{a} \neq 0$, которое в координатном виде выглядит так:

$$Am + Bl + Ck \neq 0. \tag{2.48}$$

Чтобы найти координаты точки пересечения прямой и плоскости в этом случае, найдем их общие точки, для чего подставим в уравнение (2.39) выражения для x, y, z через t из (2.46); получим линейное уравнение относительно t: $A(x_0 + mt) + B(y_0 + lt) + C(z_0 + kt) + D = 0$, в котором коэффициент при t равен

$Am + Bl + Ck$, откуда в силу условия (2.48) значение t определяется однозначно. По этому значению из уравнений (2.46) находим координаты точки пересечения.

Читателю предлагается доказать, что прямая параллельна плоскости при выполнении следующих условий: $Am+Bl+Ck = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0$; прямая лежит в плоскости, если $Am + Bl + Ck = 0$ и $Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0$.

Угол между прямой и плоскостью можно определить через угол между нормальным вектором плоскости и направляющим вектором прямой: в случае, когда последний является острым, он дополняет первый до 90^o, а если последний является тупым, он дополняет первый до 180^o. Если же нормальный вектор плоскости коллинеарен нормальному вектору прямой, то прямая перпендикулярна плоскости.

Взаимное расположение двух прямых в пространстве может быть исследовано аналогично. Этот и другие подобные вопросы рассмотрены в более общей ситуации в п. 3.4.3.

2.3.7. Примеры решения задач

1. Найти проекцию Q точки $P(5, 2, -1)$ на плоскость $2x - y + 3z + 23 = 0$.

Решение. Проекция точки на плоскость — это основание перпендикуляра, опущенного из точки на плоскость. Чтобы найти проекцию, проведем через точку P прямую, перпендикулярную плоскости, и найдем точку пересечения прямой и плоскости. В качестве направляющего вектора прямой возьмем нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (2, -1, 3)$. Запишем параметрические уравнения прямой: $x = 5+2t$, $y = 2-t$, $z = -1+3t$. Чтобы найти точку пересечения плоскости и этой прямой, подставим вместо x, y, z в уравнение плоскости выражения из параметрических уравнений прямой. Получим уравнение для t: $14t + 28 = 0$, откуда $t = -2$. Координаты искомой точки Q получаем из уравнений прямой: $(1, 4, -7)$.

2. Найти точку Q, симметричную точке $P(2,-5,7)$ относительно прямой, проходящей через точки $A(5,4,6)$ и $B(-2,-17,-8)$.

Решение. Определение точки, симметричной данной относительно прямой, дословно переносится со случая прямой на плоскости (см. задачу 2 на с. 85). Чтобы найти точку Q, сначала найдем проекцию R точки P на данную прямую, а затем воспользуемся тем, что R есть середина отрезка PQ. Параметрические уравнения данной прямой могут быть записаны так (вектор $\frac{1}{7}\ \overrightarrow{BA}$ взят в качестве направляющего): $x = 5+t,\ y = 4+3t,\ z = 6+2t$. Точка R является точкой пересечения этой прямой с плоскостью, проходящей перпендикулярно к ней через точку P. Уравнение этой плоскости имеет вид $x-5+3(y-4)+2(z-6)=0$. Точка R имеет координаты $(3,-2,2)$. Точка Q имеет координаты $(4,1,-3)$.

3. Вычислить кратчайшее расстояние между прямыми $\alpha : \frac{x+7}{3} = \frac{y+4}{4} = \frac{z+3}{-2}$ и $\beta : \frac{x-21}{6} = \frac{y+5}{-4} = \frac{z-2}{-1}$, и найти уравнение плоскости, равноудаленной от данных прямых.

Решение. Проведем плоскость γ через прямую α параллельно прямой β; расстояние от любой точки на прямой β до этой плоскости и будет искомым. Уравнение плоскости γ может быть записано через точку $(-7,-4,-3)$ коллинеарно векторам $(3,4,-2)$ и $(6,-4,-1)$ по формуле (2.36): $\begin{vmatrix} x+7 & y+4 & z+3 \\ 3 & 4 & -2 \\ 6 & -4 & -1 \end{vmatrix} = 0$. Раскрывая определитель по первой строке, получаем $-12(x+7)-$ $-9(y+4)-36(z+3)=0$, откуда $4x+3y+12z+76=0$. Находим расстояние от точки $(21,-5,2)$ до этой плоскости:
$d = \frac{4\cdot 21+3\cdot(-5)+12\cdot 2+76}{\sqrt{4^2+3^2+12^2}} = \frac{169}{13} = 13.$

Из геометрических соображений ясно, что плоскость δ, равноудаленная от данных прямых, параллельна плоскости γ и делит отрезок между любыми точками, одна из которых лежит на прямой α, а другая — на прямой β, пополам. Возьмем точку $A(-7,-4,-3)$ на прямой α и точку $B(21,-5,2)$ на прямой β. Точка $C(7,-\frac{9}{2},-\frac{1}{2})$ является серединой отрезка AB. Запишем уравнение плоскости δ, параллельной γ и проходящей через точку C: $4(x-7)+3(y+\frac{9}{2})+12(z+\frac{1}{2})=0$, или $8x+6y+24z-17=0$.

4. Составить параметрические уравнения прямой, проходящей параллельно плоскостям $\alpha: 3x+12y-3z-5=0$, $\beta: 3x-4y+9z-7=0$ и пересекающей прямые $\gamma: \frac{x+5}{2}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+1}{3}$ и $\delta: \frac{x-3}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{4}$.

Решение. Так как искомая прямая проходит параллельно плоскостям α и β, ее направляющий вектор $\vec{a}$ перпендикулярен нормальным векторам $\vec{n}_1=(1,4,-1)$ и $n_2=(3,-4,9)$ этих плоскостей. Пусть $\vec{a}=(m,k,l)$. Тогда имеем $m+4k-l=0$, $3m-4k+9l=0$. Возьмем $l=4$. Тогда, складывая уравнения, получаем $4m+32=0$, откуда $m=-8$. Из первого уравнения находим $k=3$. Итак, $\vec{a}=(-8,3,4)$. Искомая прямая лежит в плоскости ε, проходящей через прямую γ параллельно вектору $\vec{a}$. Так как искомая прямая пересекает прямую δ, она проходит через точку P пересечения прямой δ и плоскости ε. Запишем уравнение плоскости ε через точку $(-5,3,-1)$ на прямой γ параллельно векторам $(2,-4,3)$ и $\vec{a}$ по формуле (2.36): $\begin{vmatrix} x+5 & y-3 & z+1 \\ 2 & -4 & 3 \\ -8 & 3 & 4 \end{vmatrix}=0$. Раскрывая определитель по первой строке, получаем $-25(x+5)-32(y-3)-26(z+1)=0$, откуда $25x+32y+26z+55=0$. Находим точку пересечения этой плоскости с прямой δ. Для этого запишем параметрические уравнения δ: $x=3-2t$, $y=-1+3t$, $z=2+4t$ и подставим их правые части в уравнение плоскости. Найдем значение $t=-1$ и найдем координаты точки пересечения $P(5,-4,-2)$. Запишем параметрические уравнения искомой прямой, проходящей через точку P коллинеарно вектору $\vec{a}=(-8,3,4)$: $x=5-8t$, $y=-4+3t$, $z=-2+4t$.

5. Найти расстояние d от точки $P(1,-1,-2)$ до прямой

$\frac{x+3}{3} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-8}{-2}$.

Решение. Найдем уравнение плоскости α, проходящей через точку P перпендикулярно данной прямой. Нормальным вектором плоскости α служит направляющий вектор прямой $\vec{n} = (3, 2, -2)$. Используя уравнение (2.38), имеем $3(x-1)+2(y+1)-2(z+2) = 0$. Искомое уравнение имеет вид $3x+2y-2z-5 = 0$. Найдем точку Q пересечения плоскости α с данной прямой, которая является проекцией точки P на данную прямую. Запишем параметрические уравнения прямой $x = -3 + 3t$, $y = -2 + 2t$, $z = 8 - 2t$. Подставим их правые части в уравнение плоскости: $3(-3+3t)+2(-2+2t)-2(8-2t) = 0$. Отсюда $17t-34 = 0$ и $t = 2$. Точка Q имеет координаты $(3, 2, 4)$. Искомое расстояние равно длине вектора $\overrightarrow{PQ}$: $d = \sqrt{2^2+3^2+6^2} = \sqrt{49} = 7$.

Задачи: [17], №23–134.

Глава 3

Линейные пространства

§ 3.1. Понятие линейного пространства

Оказывается, свойства линейных операций над матрицами (рассматривавшиеся в п. 1.1.2) и над векторами (см. п. 2.1.2) могут быть приняты в качестве аксиом для весьма широкого класса алгебраических объектов, называемых линейными пространствами над полем. Из этих аксиом выводятся многие интересные свойства линейных пространств, образующие содержательную теорию и имеющие широкие приложения в математике. Изучение линейных пространств и их линейных отображений составляет предмет линейной алгебры.

3.1.1. Аксиомы линейного пространства

Пусть $\mathbb{F}$ — числовое поле (определение см. в п. 7.2.1; чаще всего в роли $\mathbb{F}$ выступает поле $\mathbb{R}$ всех вещественных чисел или поле $\mathbb{C}$ всех комплексных чисел). Элементы поля $\mathbb{F}$ называются *скалярами* и будут обозначаться греческими буквами[1].

---

[1]Греческий алфавит приведен в конце издания.

Непустое множество $\boldsymbol{V}$ называется *линейным пространством над полем* $\mathbb{F}$, если выполняются следующие аксиомы:

1. Для любых $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ существует однозначно определенный элемент $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$, называемый *суммой* элементов $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ и обозначаемый через $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$.

2. Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ имеет место равенство $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x}$.

3. Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$ имеет место равенство $(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})+\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z})$.

4. Существует элемент $\boldsymbol{o}_V \in \boldsymbol{V}$ такой, что для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ справедливо равенство $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o}_V = x$.

5. Для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ существует $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ такой, что $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}_V$.

6. Для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ и любого $\alpha \in \mathbb{F}$ существует однозначно определенный элемент $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$, называемый *произведением* элемента $\boldsymbol{x}$ на скаляр α и обозначаемый через $\alpha\boldsymbol{x}$.

7. Для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ и любого $\alpha \in \mathbb{F}$ имеет место равенство $\alpha(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \alpha\boldsymbol{x} + \alpha\boldsymbol{y}$.

8. Для любого $x \in \boldsymbol{V}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ имеет место равенство $(\alpha + \beta)\boldsymbol{x} = \alpha\boldsymbol{x} + \beta\boldsymbol{x}$.

9. Для любого $x \in \boldsymbol{V}$ и любых $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ имеют место равенства $\alpha(\beta\boldsymbol{x}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{x} = \beta(\alpha\boldsymbol{x})$.

10. Для любого $x \in \boldsymbol{V}$ справедливо равенство $1 \cdot \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

Аксиомы 1 и 6 определяют операции в линейном пространстве, а остальные аксиомы постулируют свойства этих операций. Элементы линейного пространства V называются *векторами*. Следствия аксиом линейного пространства собраны в следующем предложении.

Предложение 3.1.1. *Пусть* $\boldsymbol{V}$ *— линейное пространство над полем* $\mathbb{F}$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) в аксиоме 3 вектор $\boldsymbol{o}_V$ *определен однозначно;*

2) в аксиоме 4 вектор $\boldsymbol{y}$ *определен однозначно по вектору* $\boldsymbol{x}$ *(он называется вектором, противоположным к вектору* $\boldsymbol{x}$, *и обозначается через* $-\boldsymbol{x}$*);*

3) для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{V}$ *из* $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$ *следует* $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$*;*

4) для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ *справедливо равенство* $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}_V$;

5) для любого $\alpha \in \mathbb{F}$ *имеет место равенство* $\alpha\boldsymbol{o}_V = \boldsymbol{o}_V$;

6) для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ *имеет место равенство* $(-1)\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{x}$;

7) сумма трех и более векторов не зависит от расстановки скобок (и потому будет записываться без скобок).

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть $\boldsymbol{o}_1$ и $\boldsymbol{o}_2$ — два вектора, удовлетворяющие условию аксиомы 4. Тогда имеем $\boldsymbol{o}_1 = \boldsymbol{o}_1 + \boldsymbol{o}_2 = \boldsymbol{o}_2$, откуда $\boldsymbol{o}_1 = \boldsymbol{o}_2$, что и требуется. Элемент из аксиомы 4 называется *нуль-вектором* линейного пространства и обозначается просто через $\boldsymbol{o}$, если линейное пространство $\boldsymbol{V}$ зафиксировано. Обращаем внимание читателя на отличие этого обозначения от обозначения нуля-скаляра 0 из поля $\mathbb{F}$.

Для доказательства утверждения 2) рассмотрим два элемента $\boldsymbol{y}_1$ и $\boldsymbol{y}_2$ для элемента $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющие условию аксиомы 5, т.е. $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{o}$. Тогда, используя аксиомы 4, 2 и 3, имеем $\boldsymbol{y}_1 = \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{y}_1 + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{y}_2 = \boldsymbol{y}_2$, что и требуется.

Чтобы доказать утверждение 3), к обеим частям равенства $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{z}$ прибавим $-\boldsymbol{x}$ и воспользуемся аксиомами 3, 4, 5: $-\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = -\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} + \boldsymbol{z})$ влечет за собой $(-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{y} = (-\boldsymbol{x} + \boldsymbol{x}) + \boldsymbol{z}$, откуда $\boldsymbol{o} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{o} + \boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{z}$.

Докажем утверждение 4). Так как в поле $\mathbb{F}$ справедливо равенство $0 = 0 + 0$, имеем, опираясь на аксиому 8, $0\boldsymbol{x} = (0 + 0)\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}$, т.е. $0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + 0\boldsymbol{x}$. Так как $0\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} + \boldsymbol{o}$, на основании уже доказанного утверждения 3) получаем $0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$. Утверждение 5) доказывается аналогично.

Утверждение 6) следует из утверждения 2), поскольку

$$\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = 1\boldsymbol{x} + (-1)\boldsymbol{x} = (1 + (-1))\boldsymbol{x} = 0\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}.$$

Утверждение 7) может быть доказано индукцией по числу слагаемых, и это оставляется в качестве (весьма нетривиального) упражнения для заинтересованного читателя. $\square$

3.1.2. Примеры линейных пространств

1. Пусть $\mathbb{F}$ — числовое поле. Напомним, что через $\mathbb{F}^{m\times k}$ обозначается множество всех матриц размеров $m\times k$ с элементами из поля $\mathbb{F}$. Это множество является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$ относительно операций сложения матриц и умножения матрицы на число, как следует из свойств линейных операций с матрицами (см. п. 1.1.2). Особую роль играют множество всех строк $\mathbb{F}^{1\times k}$, которое будем обозначать через $\mathbb{F}_k$, и множество всех столбцов $\mathbb{F}^{m\times 1}$, которое будем обозначать через $\mathbb{F}^m$. Таким образом, мы получаем бесконечное семейство линейных пространств.

2. Пусть $\boldsymbol{V}$ — множество всех векторов, коллинеарных данной прямой [компланарных данной плоскости] или множество всех векторов пространства. Как мы видели в п. 2.1.2, $\boldsymbol{V}$ является линейным пространством над полем $\mathbb{R}$ относительно линейных операций.

3. Пусть $\boldsymbol{V}$ — множество всех функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$. Для функций $\boldsymbol{f},\boldsymbol{g}\in\boldsymbol{V}$ положим $\boldsymbol{h}=\boldsymbol{f}+\boldsymbol{g}$, где для любого $x\in\mathbb{R}$ по определению $\boldsymbol{h}(x)=\boldsymbol{f}(x)+\boldsymbol{g}(x)$. Для $\alpha\in\mathbb{R}$ положим также $\boldsymbol{d}=\alpha\boldsymbol{f}$, где $\boldsymbol{d}(x)=\alpha\boldsymbol{f}(x)$ для любого $x\in\mathbb{R}$. Читателю предоставляется проверить, что для $\boldsymbol{V}$ выполняются все аксиомы линейного пространства.

Мы видим, что линейные пространства могут состоять из математических объектов различной природы. Наша цель в этой главе — изучение общих свойств линейных пространств и их приложения к теории систем линейных уравнений.

3.1.3. Линейно зависимые и независимые системы векторов

Зафиксируем линейное пространство $\boldsymbol{V}$ над полем $\mathbb{F}$. Под *системой векторов* в $\boldsymbol{V}$ понимается конечная последовательность не обязательно различных векторов $\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{a}_2,\ldots,\boldsymbol{a}_k$ из $\boldsymbol{V}$. *Линей-*

ной комбинацией векторов системы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ с коэффициентами $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ называется вектор $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k$. Линейная комбинация называется *тривиальной*, если все ее коэффициенты нулевые; в противном случае линейная комбинация называется *нетривиальной*. Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называется *линейно зависимой*, если существует нетривиальная линейная комбинация этой системы, равная нулевому вектору, т.е. если существуют такие скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, что $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$. Заметим, что тривиальная линейная комбинация любой системы векторов равна нулевому вектору. Система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называется *линейно независимой*, если она не является линейно зависимой, т.е. из равенства нулевому вектору произвольной линейной комбинации системы следует, что эта линейная комбинация тривиальна. Таким образом, для линейно независимой системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ из равенства $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$ следует $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0$.

Будем говорить, что вектор $\boldsymbol{b}$ *линейно выражается* через систему векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, и писать $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, a_k \vdash \boldsymbol{b}$, если $\boldsymbol{b}$ является линейной комбинацией этой системы, т.е. для некоторых скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ имеет место равенство $\boldsymbol{b} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + {}+\alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k$. Пусть $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ — две системы векторов. Если каждый вектор системы $\mathbf{B}$ линейно выражается через систему $\mathbf{A}$, то будем говорить, что система $\mathbf{B}$ *линейно выражается* через систему $\mathbf{A}$ и писать $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$. Читателю предлагается проверить, что для любых систем векторов $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ из $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \vdash \mathbf{C}$ следует $\mathbf{A} \vdash \mathbf{C}$.

Предложение 3.1.2. *Система векторов линейно зависима тогда и только тогда, когда в ней найдется вектор, линейно выражающийся через остальные векторы этой системы.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — система векторов. Предположим, что эта система линейно зависима. Тогда найдутся скаляры $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не все равные нулю, такие что

$$\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}. \tag{3.1}$$

Без ограничения общности можно предположить, что $\alpha_1 \neq 0$. Из равенства (3.1) выводим $\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 = -\alpha_2 \boldsymbol{a}_2 - \ldots - \alpha_k \boldsymbol{a}_k$. Умножив обе части последнего равенства на $\frac{1}{\alpha_1}$, получим

$$\boldsymbol{a}_1 = -\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_2 - \ldots - \frac{\alpha_k}{\alpha_1}\boldsymbol{a}_k.$$

Мы видим, что $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \vdash \boldsymbol{a}_1$.

Обратно, предположим, что один из векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ (пусть для определенности $\boldsymbol{a}_1$) линейно выражается через остальные векторы системы, т.е. $\boldsymbol{a}_1 = \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_k \boldsymbol{a}_k$. Отсюда $-\boldsymbol{a}_1 + \beta_2 \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_k \boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$. В левой части имеем нетривиальную линейную комбинацию, так как коэффициент при $\boldsymbol{a}_1$, равный -1, отличен от нуля. Следовательно, система линейно зависима. □

Предложение 3.1.3. *Если линейно зависимая система векторов* **A** *получается из линейно независимой системы* **B** *добавлением одного вектора* $\boldsymbol{c}$, *то* $\boldsymbol{c}$ *линейно выражается через векторы системы* **B**.

Доказательство. Пусть **B** состоит из векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$. Так как система $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k, \boldsymbol{c}$ линейно зависима, существуют такие числа $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k, \gamma$, не все равные нулю, что $\beta_1 \boldsymbol{b}_1 + \beta_2 \boldsymbol{b}_2 + {} + \ldots + \beta_k \boldsymbol{b}_k + \gamma \boldsymbol{c} = \boldsymbol{o}$. Так как система **B** линейно независима, ясно, что $\gamma \neq 0$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{c} = -\frac{\beta_1}{\gamma}\boldsymbol{b}_1 - \frac{\beta_2}{\gamma}\boldsymbol{b}_2 - \ldots - \frac{\beta_k}{\gamma}\boldsymbol{b}_k$. □

В следующем предложении собраны свойства линейно зависимых систем векторов.

Предложение 3.1.4. *Справедливы следующие утверждения:*

1) если система векторов имеет линейно зависимую подсистему, то она линейно зависима;

2) всякая система векторов, содержащая нулевой вектор, линейно зависима;

3) всякая система векторов, содержащая два одинаковых вектора, линейно зависима.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — система векторов, имеющая линейно зависимую подсистему. Тогда некоторый вектор этой подсистемы, пусть без ограничения общности $\boldsymbol{a}_1$, линейно выражается через остальные ее векторы. Очевидно, что тогда $\boldsymbol{a}_1$ линейно выражается через $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, так как векторы, не входящие в подсистему, можно добавить с нулевыми коэффициентами на основании утверждения 4) предложения 3.1.1. По предложению 3.1.2 система $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно зависима.

Так как система из одного нулевого вектора очевидным образом линейно зависима, утверждение 2) непосредственно вытекает из 1). Утверждение 3) предоставляется доказать читателю. □

Свойства линейно независимых систем векторов собраны в следующем утверждении, вытекающем из предложения 3.1.2 и утверждения 1) предложения 3.1.4.

Предложение 3.1.5. *Справедливы следующие утверждения:*

1) в линейно независимой системе ни один вектор линейно не выражается через остальные векторы системы;

2) всякая подсистема линейно независимой системы сама линейно независима;

3) если к линейно независимой системе векторов $\mathbf{A}$ *добавить вектор, который не выражается линейно через векторы* $\mathbf{A}$, *то полученная система также является линейно независимой.*

Важную роль в дальнейшем будет играть следующая теорема.

Теорема 3.1.1. *Пусть* $\mathbf{A}$ — *система из* k *векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, $\mathbf{B}$ — *система из* n *векторов* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, *причем* $\boldsymbol{A} \vdash \boldsymbol{B}$ *и* $k < n$. *Тогда система* $\mathbf{B}$ *линейно зависима.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по k. Пусть $k = 1$. Тогда векторы системы $\mathbf{B}$ линейно выражаются через один вектор $\boldsymbol{a}_1$. Если система $\mathbf{B}$ содержит нулевой вектор, то она линейно зависима согласно утверждению 2) предложения 3.1.4. Пусть $\boldsymbol{o} \notin \mathbf{B}$. Тогда $\boldsymbol{a}_1 \neq \boldsymbol{o}$, и система $\mathbf{B}$ содержит по крайней мере два вектора $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$. Имеем $\boldsymbol{b}_1 = \beta_1 \boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_2 = \beta_2 \boldsymbol{a}_1$ для некоторых ненулевых скаляров β_1, β_2. Тогда ясно, что $-\beta_2 \boldsymbol{b}_1 + \beta_1 \boldsymbol{b}_2 = \boldsymbol{o}$, т.е. система из векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ линейно зависима. Следовательно, система $\mathbf{B}$ также линейно зависима.

Предположим, что утверждение доказано для всех значений $k < m$, и рассмотрим систему $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$ из m векторов ($m < n$). Запишем векторы из системы $\mathbf{B}$ в виде линейных комбинаций векторов из системы $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{b}_1 &= \beta_{11}\boldsymbol{a}_1 + \beta_{12}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_{1m}\boldsymbol{a}_m, \\
\boldsymbol{b}_2 &= \beta_{21}\boldsymbol{a}_1 + \beta_{22}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_{2m}\boldsymbol{a}_m, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\boldsymbol{b}_n &= \beta_{n1}\boldsymbol{a}_1 + \beta_{n2}\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \beta_{nm}\boldsymbol{a}_m.
\end{aligned}$$

Если все коэффициенты $\beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{n1}$ равны 0, то все векторы системы $\mathbf{B}$ линейно выражаются фактически через векторы $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m$, т.е. через систему из $m-1$ вектора, и по индуктивному предположению система $\mathbf{B}$ линейно зависима. Предположим, что среди коэффициентов $\beta_{11}, \beta_{21}, \ldots, \beta_{n1}$ есть ненулевые. Без ограничения общности предположим, что $\beta_{11} \neq 0$. Для всех $i > 1$ положим $\boldsymbol{c}_i = \boldsymbol{b}_i - \frac{\beta_{i1}}{\beta_{11}}\boldsymbol{b}_1$. Тогда ясно, что $\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_m \vdash \boldsymbol{c}_i$ при $i = 2, \ldots, n$. Так как $m < n$, имеем $m - 1 < n - 1$, откуда по индуктивному предположению система $\boldsymbol{c}_2, \ldots, \boldsymbol{c}_n$ линейно зависима. Таким образом, найдутся скаляры $\alpha_2, \ldots, \alpha_n$, не все равные нулю, такие, что $\alpha_2\boldsymbol{c}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{c}_n = \boldsymbol{o}$. Подставляя вместо $\boldsymbol{c}_i$

их выражения через векторы системы **B**, мы получаем нетривиальную линейную комбинацию векторов этой системы, равную нулевому вектору. Таким образом, система **B** линейно зависима. Шаг индукции доказан. □

Следствие 3.1.1. *Пусть* **A** *— система из k векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$,* **B** *— система из n векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n$, причем система* **B** *линейно независима и* **A**$\vdash$**B**. *Тогда $k \geq n$.*

§ 3.2. Базис и размерность линейного пространства

Всюду в этом параграфе рассматривается фиксированное линейное пространство $\boldsymbol{V}$ над числовым полем $\mathbb{F}$.

3.2.1. Элементарные преобразования системы векторов. Максимальные линейно независимые подсистемы

Пусть **A** — система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ пространства $\boldsymbol{V}$. Под *элементарным преобразованием* системы **A** понимается одно из следующих преобразований:

I. Перестановка двух векторов в системе.

II. Замена одного вектора $\boldsymbol{a}_i$ на вектор $\beta\boldsymbol{a}_i$, где β — ненулевой скаляр.

III. Замена одного вектора $\boldsymbol{a}_i$ на вектор $\boldsymbol{a}_i + \beta\boldsymbol{a}_j$, где β — скаляр, $j \neq i$.

Будем называть две системы векторов **A** и **B** *эквивалентными* и писать **A** $\sim$ **B**, если от системы **A** к системе **B** можно перейти с помощью конечного числа элементарных преобразований. Очевидно, что если **A** $\sim$ **B**, то **B** $\sim$ **A**, поскольку каждое элементарное преобразование обратимо. Читателю предоставляется проверить, что для трех систем векторов **A**, **B**, **C** из того, что **A** $\sim$ **B** и **B** $\sim$ **C**, следует **A** $\sim$ **C**.

Теорема 3.2.1. *Пусть системы векторов* **A** *и* **B** *эквивалентны. Система векторов* **A** *линейно независима тогда и только тогда, когда система* **B** *линейно независима.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть случай, когда **A** получается из **B** с помощью одного элементарного преобразования. Пусть **A** состоит из векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ и **B** состоит из векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$. Для преобразования типа I утверждение очевидно. Пусть **B** получается из **A** заменой вектора $\boldsymbol{a}_i$ на $\beta\boldsymbol{a}_i$, где $\beta \neq 0$. Пусть **A** линейно независима. Покажем, что **B** также линейно независима. Пусть $\gamma_1\boldsymbol{b}_1 + \ldots + \gamma_k\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{o}$. Так как $\boldsymbol{b}_i = \beta\boldsymbol{a}_i$ и $\boldsymbol{b}_j = \boldsymbol{a}_j$ при $j \neq i$, имеем $\gamma_i\beta = 0$ и $\gamma_j = 0$ при $j \neq i$, откуда следует, что все коэффициенты γ_s равны 0. Следовательно, система **B** линейно независима. Так как **A** получается из **B** элементарным преобразованием типа II, из линейной независимости **B** следует линейная независимость **A**. Случай преобразования типа III рассматривается сходным образом. □

Теорему 3.2.1 особенно удобно использовать для выяснения вопроса о линейной независимости системы строк или столбцов из линейных пространств $\mathbb{F}_k$ или $\mathbb{F}^k$. Так как вопрос о линейной зависимости системы столбцов из $\mathbb{F}^k$ с помощью транспонирования очевидным образом сводится к вопросу о линейной зависимости системы строк, рассмотрим лишь последний. Пусть система **C** состоит из строк $\boldsymbol{c}_1 = (\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1k})$, $\boldsymbol{c}_2 = (\gamma_{21}, \ldots, \gamma_{2k})$, …, $\boldsymbol{c}_m = (\gamma_{m1}, \ldots, \gamma_{mk})$. Составим из коэффициентов этих строк матрицу

$$\begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1k} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2k} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_{m1} & \gamma_{m2} & \cdots & \gamma_{mk} \end{pmatrix}.$$

С помощью элементарных преобразований строк матрицы (см. п. 0.3.1) матрицу **C** можно преобразовать к ступенчатому виду.

Если последняя матрица содержит нулевую строку, то система ее строк линейно зависима в силу утверждения 2) предложения 3.1.4. Если же ступенчатая матрица не содержит нулевых строк, то, как легко проверить, ее строки линейно независимы. Таким образом, чтобы ответить на вопрос, линейно независимы ли строки матрицы, следует привести матрицу к ступенчатому виду и определить, имеет ли последняя нулевые строки.

Две системы векторов $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ называются *линейно эквивалентными*, если $\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ и $\mathbf{B} \vdash \mathbf{A}$. Очевидно, что если системы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ эквивалентны, то они линейно эквивалентны. Обратное верно при условии, что системы $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ имеют одно и то же число векторов.

Подсистема $\mathbf{M}$ системы векторов $\mathbf{A}$ называется ее *максимальной линейно независимой подсистемой*, если система $\mathbf{M}$ линейно независима и либо $\mathbf{M} = \mathbf{A}$, либо при добавлении к $\mathbf{M}$ любого вектора из $\mathbf{A}$ получается линейно зависимая система. В частности, если система $\mathbf{A}$ линейно независима, то она совпадает с (единственной) своей максимальной линейно независимой подсистемой.

Из предложения 3.1.3 и следствия 3.1.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 3.2.1. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— система векторов и* $\mathbf{M}$ *— некоторая ее подсистема.* $\mathbf{M}$ *является максимальной линейно независимой подсистемой тогда и только тогда, когда* $\mathbf{M}$ *линейно независима и* $\mathbf{M} \vdash \mathbf{A}$. *Любые две максимальные линейно независимые подсистемы системы* $\mathbf{A}$ *имеют одинаковое число векторов.*

В самом деле, любые две максимальные линейно независимые подсистемы одной и той же системы $\mathbf{A}$ линейно эквивалентны.

Существование максимальной линейно независимой подсистемы при естественном ограничении на систему векторов гарантируется следующим утверждением.

Предложение 3.2.2. *Пусть* $\mathbf{A}$ *— произвольная конечная система векторов линейного пространства. Если* $\mathbf{A}$ *состоит только из нулевых векторов, то она не имеет максимальных линейно независимых подсистем. Если же* $\mathbf{A}$ *содержит ненулевой вектор, то она имеет максимальную линейно независимую подсистему.*

Доказательство. Первое утверждение предложения очевидно. Для доказательства второго предположим, что в системе $\mathbf{A}$ первый вектор $\boldsymbol{a}_1$ ненулевой. Это предположение не ограничивает общности рассуждений, поскольку порядок векторов в системе $\mathbf{A}$ несуществен и можно перенумеровать их так, чтобы все ненулевые векторы шли сначала. Если все остальные векторы из $\mathbf{A}$ линейно выражаются через $\boldsymbol{a}_1$, то максимальной линейно независимой подсистемой в силу предложения 3.2.1 является подсистема из одного вектора $\boldsymbol{a}_1$. Пусть $\mathbf{A}$ содержит вектор, который линейно не выражается через $\boldsymbol{a}_1$. Предположим (без ограничения общности), что это $\boldsymbol{a}_2$. Тогда система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ линейно независима в силу утверждения 3) предложения 3.1.5. Если все остальные векторы $\mathbf{A}$ линейно выражаются через $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$, то максимальная линейно независимая система векторов построена. В противном случае найдется вектор $\boldsymbol{a}_3$ (без ограничения общности), который линейно не выражается через $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. Система $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ будет линейно независима, и, повторяя описанный только что процесс, мы через конечное число шагов (наибольшее равно числу векторов в системе $\mathbf{A}$) построим максимальную линейно независимую подсистему в $\mathbf{A}$. $\square$

Для нахождения максимальной линейно независимой подсистемы данной конечной системы векторов–столбцов из $\mathbb{F}^n$ удобно использовать следующее предложение.

Предложение 3.2.3. *Если матрица* $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{n\times k}$ *с коэффициентами из поля* $\mathbb{F}$ *получается из матрицы* $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times k}$ *с помощью элементарных преобразований над строками, то все линейные зависимости между столбцами матриц* $\boldsymbol{A}$ *и* $\boldsymbol{B}$ *одинаковы, т.е. если* *некоторая линейная комбинация столбцов матрицы* $\boldsymbol{A}$ *равна нулевому вектору, то линейная комбинация столбцов матрицы* $\boldsymbol{B}$ *с теми же коэффициентами также равна нулевому вектору.*

Легко понять, что для доказательства достаточно рассмотреть случай, когда матрица $\boldsymbol{B}$ получается из матрицы $\boldsymbol{A}$ с помощью одного элементарного преобразования строк. Каждый из этих случаев рассматривается без затруднений, и это предоставляется в качестве упражнения читателю.

Пример. Найти максимальную линейно независимую подсистему системы векторов–строк $\boldsymbol{a}_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2, 4, 6, 8)$, $\boldsymbol{a}_3 = (1, 1, 2, 2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (2, 3, 5, 6)$, $\boldsymbol{a}_5 = (3, 5, 8, 10)$. Выпишем матрицу, в которой указанные векторы располагаются в столбцах, и применим к ее строкам элементарные преобразования по схеме, используемой при решении систем линейных уравнений методом Гаусса–Жордана.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 6 & 2 & 5 & 8 \\ 4 & 8 & 2 & 6 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, рассматривая линейные зависимости между столбцами последней матрицы, что $\boldsymbol{a}_2 = 2\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_4 = 3\boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5 = 2\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_3$. Таким образом, максимальная линейно независимая подсистема состоит из векторов $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_3$.

3.2.2. Ранг системы векторов. Ранг матрицы

Пусть $\mathbf{A}$ — конечная система векторов. Если эта система состоит только из нулевых векторов, то она не имеет максимальных линейно независимых подсистем векторов и ее *ранг* по определению полагается равным нулю. Если же $\mathbf{A}$ имеет ненулевые векторы, то по предложению 3.2.2 она обладает максимальной линейно независимой подсистемой. Все такие подсистемы содержат одно и то же число векторов согласно предложению 3.2.1. Это число и называется *рангом* системы векторов $\mathbf{A}$. Оно обозначается через $\mathsf{r}(\mathbf{A})$.

Ясно, что линейно эквивалентные (и, в частности, эквивалентные) системы векторов имеют один и тот же ранг. Для нахождения ранга системы векторов–строк или столбцов можно использовать способ, примененный для решения примера в предыдущем пункте.

Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{k\times n}$ с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$. *Минором* матрицы $\boldsymbol{A}$ *порядка* m называется определитель подматрицы, получаемой выписыванием коэффициентов, стоящих на пересечении фиксированных m строк и m столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$. Определим следующие три числа для матрицы $\boldsymbol{A}$: *строчный ранг* $\mathsf{r}_{\text{стрк}}(\boldsymbol{A})$ — это ранг системы строк матрицы $\boldsymbol{A}$ (рассматриваемых как элементы линейного пространства $\mathbb{F}_n$), *столбцовый ранг* $\mathsf{r}_{\text{стлб}}(\boldsymbol{A})$ — это ранг системы столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ (рассматриваемых как элементы линейного пространства $\mathbb{F}^k$) и *минорный ранг* $\mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A})$ — это наивысший порядок отличных от нуля миноров матрицы $\boldsymbol{A}$.

Лемма 3.2.1. *Минорный ранг матрицы не изменяется при выполнении над ее строками [столбцами] элементарных преобразований.*

Доказательство. Рассмотрим элементарные преобразования строк. Для столбцов утверждение леммы будет тогда получаться из следствия 1.2.1. Ясно, что достаточно рассмотреть случай, когда к строкам матрицы применяется *одно* элементарное преобразование. Легко понять, что преобразования вида I и II не изменяют минорного ранга, поскольку ясно, что при выполнении такого преобразования свойство минора быть отличным от нуля сохраняется.

Пусть элементарное преобразование вида III состоит в прибавлении второй строки исходной матрицы $\boldsymbol{A}$, умноженной на число α, к первой строке; полученную матрицу обозначим через $\boldsymbol{A}'$. Такое предположение не ограничивает общности, поскольку при перестановке строк, как было отмечено, минорный ранг не изменяется. Тогда любой минор порядка k матрицы $\boldsymbol{A}'$ либо совпадает с минором матрицы $\boldsymbol{A}$ (если он содержит элементы второй строки либо не содержит ни первой, ни второй строки), либо является суммой двух миноров порядка k матрицы $\boldsymbol{A}$ (если содержит элементы первой строки и не содержит второй). Ясно, что тогда $\mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A}) \geq \mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A}')$. Однако матрица $\boldsymbol{A}$ может быть получена из матрицы $\boldsymbol{A}'$ элементарным преобразованием типа III — прибавлением к первой строке второй, умноженной на $-\alpha$. Следовательно, $\mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A}') \geq \mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A})$. Таким образом, $\mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A}') = \mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A})$. □

Теорема 3.2.2. *Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ имеют место равенства $\mathsf{r}_{\text{стрк}}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}_{\text{стлб}}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A})$.*

Доказательство. Для доказательства достаточно с помощью элементарных преобразований строк привести матрицу $\boldsymbol{A}$ к ступенчатому виду $\boldsymbol{A}'$. Тогда строчный ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ равен числу r ненулевых строк матрицы $\boldsymbol{A}'$ и минорный ранг $\boldsymbol{A}'$ равен r, поскольку все миноры более высоких порядков (если они существуют) содержат строку из нулей, и легко найти минор порядка r, отличный от нуля (нужно взять пересечения ненулевых строк матрицы $\boldsymbol{A}'$ с теми ее столбцами, в которых стоит первое ненулевое число в данной строке). В силу леммы 3.2.1 $\mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A}') = \mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A})$, откуда следует $\mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}_{\text{стрк}}(\boldsymbol{A})$. Аналогично доказывается, что $\mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}_{\text{стлб}}(\boldsymbol{A})$, что и завершает доказательство теоремы. □

В силу доказанной теоремы для данной матрицы $\boldsymbol{A}$ мы будем в дальнейшем называть каждое из введенных чисел $\mathsf{r}_{\text{стрк}}(\boldsymbol{A})$, $\mathsf{r}_{\text{стлб}}(\boldsymbol{A})$, $\mathsf{r}_{\text{мин}}(\boldsymbol{A})$ просто *рангом* матрицы $\boldsymbol{A}$ и обозначать через $\mathsf{r}(\boldsymbol{A})$.

Следующее утверждение является расширением свойства 8 определителей (см. п. 2.2.2).

Следствие 3.2.1. *Строки [столбцы] определителя порядка n линейно независимы тогда и только тогда, когда он отличен от нуля.*

Доказательство. Если строки определителя порядка n линейно независимы, то строчный ранг его матрицы равен n, и по теореме 3.2.2 минорный ранг также равен n. Единственным минором порядка n указанной матрицы является исходный определитель, поэтому он отличен от нуля.

Обратное утверждение следует из того, что если строки определителя линейно зависимы, то в силу предложения 3.1.2 и свойства 8 определителей он равен нулю. $\square$

Некоторые свойства ранга матрицы собраны в следующем предложении.

Предложение 3.2.4. *Справедливы следующие утверждения:*

1) для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ и любого ненулевого числа α справедливо равенство $\mathsf{r}(\alpha\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A})$;

2) для любых матриц $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ одинаковых размеров справедливо неравенство $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}) \le \mathsf{r}(\boldsymbol{A}) + \mathsf{r}(\boldsymbol{B})$;

3) для любых матриц $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ согласованных размеров справедливо неравенство $\mathsf{r}(\boldsymbol{AB}) \le \min\{\mathsf{r}(\boldsymbol{A}), \mathsf{r}(\boldsymbol{B})\}$;

4) если $\boldsymbol{A}$ — обратимая матрица и $\boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ — такие матрицы, что произведения $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{CA}$ определены, то

$$\mathsf{r}(\boldsymbol{AB}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{B}) \text{ и } \mathsf{r}(\boldsymbol{CA}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{C});$$

5) для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ *справедливы равенства*

$$\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A}^*) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}),$$

в частности, если $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}$, *то*

$$\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A}^\top) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}).$$

Доказательство. Утверждение 1) очевидно. Для доказательства утверждения 2) рассмотрим строчный ранг матрицы. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — система строк матрицы $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$ — система строк матрицы $\boldsymbol{B}$. Тогда система строк матрицы $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$ имеет вид $\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{b}_1, \ \ldots, \ \boldsymbol{a}_k + \boldsymbol{b}_k$. Так как эта система линейно выражается через систему $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$, а ранг последней не превосходит $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) + \mathsf{r}(\boldsymbol{B})$, получаем требуемое неравенство.

Для доказательства утверждения 3) заметим, что столбцы матрицы $\boldsymbol{AB}$ являются линейными комбинациями столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$, так что $\mathsf{r}(\boldsymbol{AB}) \leq \mathsf{r}(\boldsymbol{A})$. Кроме того, строки матрицы $\boldsymbol{AB}$ являются линейными комбинациями строк матрицы $\boldsymbol{B}$, откуда $\mathsf{r}(\boldsymbol{AB}) \leq \mathsf{r}(\boldsymbol{B})$.

Покажем, что утверждение 4) следует из 3). Проверим равенство $\mathsf{r}(\boldsymbol{AB}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{B})$, второе доказывается аналогично. Имеем $\mathsf{r}(\boldsymbol{AB}) \leq \mathsf{r}(\boldsymbol{B})$. Так как $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}^{-1}(\boldsymbol{AB})$, заключаем, что $\mathsf{r}(\boldsymbol{B}) \leq \mathsf{r}(\boldsymbol{AB})$, откуда следует требуемое равенство.

В утверждении 5) равенство $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A}^*)$ очевидно, так как строки сопряженной матрицы являются столбцами исходной матрицы, в которых каждое число заменено комплексно сопряженным, и потому строчный ранг сопряженной матрицы совпадает со столбцовым рангом исходной матрицы. Другие равенства вытекают из утверждения следствия 5.1.2, которое будет доказано позже. $\square$

3.2.3. Базис и размерность линейного пространства. Координаты векторов

Множество $\mathbf{M}$ векторов линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется *порождающим*, если $\mathbf{M} \vdash \boldsymbol{V}$, т. е. если каждый вектор $\boldsymbol{V}$ есть линейная комбинация векторов системы $\mathbf{M}$. Линейное пространство $\boldsymbol{V}$ называется *конечномерным*, если оно имеет конечное порождающее множество. В этом случае любая линейно независимая система векторов в $\boldsymbol{V}$ конечна согласно теореме 3.1.1. В дальнейшем будут рассматриваться только конечномерные пространства. *Базисом* линейного пространства называется упорядоченное[1] линейно независимое порождающее его множество. Если линейное пространство состоит только из нулевого вектора, то оно не имеет базиса. Ненулевое конечномерное пространство имеет базис; достаточно выделить максимальную линейно независимую подсистему в его конечном порождающем множестве, воспользовавшись предложением 3.2.2. Из сказанного выше следует, что любой базис конечномерного линейного пространства конечен. Так как любые два базиса одного и того же линейного пространства линейно эквивалентны, в силу следствия 3.1.1 они имеют одинаковое количество векторов. Таким образом, количество векторов в базисе данного линейного пространства не зависит от выбора базиса и представляет собой характеристику линейного пространства. Это число называется *размерностью* линейного пространства $\boldsymbol{V}$ и будет обозначаться через $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}$.

Рассмотрим примеры базисов для некоторых линейных пространств, введенных в п. 3.1.2. Для пространства $\mathbb{F}^{m\times k}$ матриц размеров $m \times k$ базис образуют матричные единицы, введенные в конце п. 1.1.2. Размерность этого пространства равна произведению чисел mk. В частности, для пространства строк $\mathbb{F}_m$

[1]Это означает, что порядок, в котором векторы, образующие базис, идут друг за другом, существен и не может быть изменен.

базисом будет система строк единичной матрицы $\boldsymbol{E}_m$, а для пространства столбцов $\mathbb{F}^k$ — система столбцов единичной матрицы $\boldsymbol{E}_k$. Размерности этих пространств равны соответственно m и k. Для пространств векторов базисы рассматривались в п. 2.1.4. Пространство функций из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$ не является конечномерным. Построить его базис довольно трудно, и мы не будем этого делать.

Предложение 3.2.5. *Любая линейно независимая система векторов линейного пространства $\boldsymbol{V}$, содержащая $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}$ векторов, является базисом.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{A}$ — линейно независимая система векторов линейного пространства V, содержащая $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}$ векторов, и $x \in \boldsymbol{V}$. Тогда в силу теоремы 3.1.1 система $\mathbf{A}, \boldsymbol{x}$ линейно зависима, поскольку она линейно выражается через некоторый базис. По предложению 3.1.3 вектор $\boldsymbol{x}$ линейно выражается через систему $\mathbf{A}$. Таким образом, $\mathbf{A} \vdash \boldsymbol{V}$, что и требуется. $\square$

Зафиксируем базис $\mathbf{B} = (\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_n)$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ и возьмем любой вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Так как $\mathbf{B} \vdash \boldsymbol{x}$, имеем $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{b}_1+\alpha_2\boldsymbol{b}_2+\ldots+\alpha_n\boldsymbol{b}_n$ для некоторых скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$. Указанный набор чисел однозначно определяется по вектору $\boldsymbol{x}$. В самом деле, если $\boldsymbol{x} = \beta_1\boldsymbol{b}_1 + \beta_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + \beta_n\boldsymbol{b}_n$ для некоторых $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in \mathbb{F}$, то $\alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{b}_n = \beta_1\boldsymbol{b}_1 + \beta_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + \beta_n\boldsymbol{b}_n$, откуда $(\alpha_1-\beta_1)\boldsymbol{b}_1+(\alpha_2-\beta_2)\boldsymbol{b}_2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\boldsymbol{b}_n = \boldsymbol{o}$. Так как $\mathbf{B}$ — линейно независимая система векторов, последнее равенство влечет за собой $\alpha_1 - \beta_1 = 0$, $\alpha_2 - \beta_2 = 0, \ldots, \alpha_n - \beta_n = 0$, откуда следует $\alpha_1 = \beta_1$, $\alpha_2 = \beta_2, \ldots, \alpha_n = \beta_n$. Обозначим через $[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}}$ столбец из чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и назовем его *столбцом координат* вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\mathbf{B}$. Условимся использовать для линейной комбинации векторов $\alpha_1\boldsymbol{b}_1 + \alpha_2\boldsymbol{b}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{b}_n$ "матричное" обозначение $\mathbf{B}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}}$, понимая его как произведение строки векторов и столбца чисел (аналогичное соглашение использовалось в п. 2.1.4 для обычных векторов в трехмерном пространстве, см. с. 69). Далее, если $\boldsymbol{M}$ — матрица размеров $n \times k$, то под $\mathrm{B}\boldsymbol{M}$ будем понимать строку из k векторов, каждый из которых получается умножением строки векторов B на соответствующий столбец матрицы $\boldsymbol{M}$. Сложение строк векторов, содержащих одно и то же количество векторов, равно как и умножение строки векторов на скаляр, определяется стандартным образом, аналогично действиям с матрицами. Следующее утверждение, с учетом сказанного выше, может быть легко получено из аксиом линейного пространства и их следствий.

Предложение 3.2.6. *Пусть* B *— строка из* n *векторов линейного пространства* $\boldsymbol{V}$ *размерности* n, $\boldsymbol{M}, \boldsymbol{N}$ *— матрицы размеров* $n \times k$, $\boldsymbol{L}$ *— матрица размеров* $k \times l$, $\alpha \in F$. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если B *— базис, то из* $\mathrm{B}\boldsymbol{M} = \mathrm{B}\boldsymbol{N}$ *следует* $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{N}$*;*

2) $(\mathrm{B}\boldsymbol{M})\boldsymbol{L} = \mathrm{B}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{L})$*;*

3) $\mathrm{B}(\boldsymbol{M} + \boldsymbol{N}) = \mathrm{B}\boldsymbol{M} + \mathrm{B}\boldsymbol{N}$*;*

4) $\alpha(\mathrm{B}\boldsymbol{M}) = \mathrm{B}(\alpha\boldsymbol{M})$.

Следующая теорема показывает, что при фиксированном базисе действия с векторами можно заменить действиями со столбцами их координат.

Теорема 3.2.3. *Пусть* B *— базис линейного пространства* $\boldsymbol{V}$. *Для любых векторов* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ *и любого* $\alpha \in \mathbb{F}$ *справедливы равенства* $[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}]_{\mathbf{B}} = [\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}} + [\boldsymbol{y}]_{\mathbf{B}}$, $[\alpha\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}} = \alpha[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}}$.

Доказательство. Сложим равенства $\boldsymbol{x} = \mathrm{B}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}}$ и $\boldsymbol{y} = \mathrm{B}[\boldsymbol{y}]_{\mathbf{B}}$: $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathrm{B}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}} + \mathrm{B}[\boldsymbol{y}]_{\mathbf{B}} = \mathrm{B}([\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}} + [\boldsymbol{y}]_{\mathbf{B}})$. С другой стороны, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \mathrm{B}[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}]_{\mathbf{B}}$. Из утверждения о единственности координат вектора следует, что $[\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}]_{\mathbf{B}} = [\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}} + [\boldsymbol{y}]_{\mathbf{B}}$. Второе равенство доказывается аналогично. □

3.2.4. Изоморфизмы линейных пространств

Пусть $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ — линейные пространства над одним и тем же полем $\mathbb{F}$. Отображение $\mathcal{F}$ множества $\boldsymbol{V}$ на множество $\boldsymbol{W}$ называется *изоморфизмом* линейного пространства $\boldsymbol{V}$ на линейное пространство $\boldsymbol{W}$, если $\mathcal{F}$ есть биекция множества $\boldsymbol{V}$ на множество $\boldsymbol{W}$, удовлетворяющая следующим двум условиям:

1) для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ имеет место равенство $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{F}(\boldsymbol{y})$;

2) для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ и любого $\alpha \in \mathbb{F}$ имеет место равенство $\mathcal{F}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\mathcal{F}(\boldsymbol{x})$.

Читателю предлагается проверить, что $\mathcal{F}(\boldsymbol{o}_V) = \boldsymbol{o}_W$, а также что отображение, обратное к изоморфизму, само является изоморфизмом и произведение изоморфизмов $\mathcal{F}_1 : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ и $\mathcal{F}_2 : \boldsymbol{W} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ является изоморфизмом линейного пространства $\boldsymbol{V}$ на $\boldsymbol{Z}$.

Линейные пространства $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\boldsymbol{V}$ на $\boldsymbol{W}$. Позже мы увидим, что, с точки зрения линейной алгебры изоморфные линейные пространства являются одинаковыми.

Теорема 3.2.4. *Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}$. Тогда $\boldsymbol{V}$ изоморфно линейному пространству столбцов $\mathbb{F}^n$.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{B}$ — некоторый базис пространства $\boldsymbol{V}$. Убедимся, что отображение $\mathcal{F}$, сопоставляющее каждому вектору $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ его столбец координат $[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}}$ в базисе $\mathbf{B}$, является изоморфизмом $\boldsymbol{V}$ на линейное пространство $\mathbb{F}^n$. Из теоремы 3.2.3 сразу следует, что для $\mathcal{F}$ выполняются условия 1) и 2) из определения изоморфизма. Если $[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}} = [\boldsymbol{y}]_{\mathbf{B}}$, то в силу определения столбца координат имеем $\boldsymbol{x} = \mathbf{B}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}[\boldsymbol{y}]_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{y}$, откуда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$; таким образом, отображение $\mathcal{F}$ взаимно однозначно. Пусть $\boldsymbol{X}$ — произвольный столбец из $\mathbb{F}^n$. Положим $\boldsymbol{x} = \mathbf{B}\boldsymbol{X}$. Тогда в силу единственности координат вектора имеем $[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{X}$, т. е.

$\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{X}$; мы видим, что $\mathcal{F}$ отображает $\boldsymbol{V}$ на все множество $\mathbb{F}^n$. Итак, $\mathcal{F}$ есть изоморфизм. □

Предложение 3.2.7. *Пусть $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ — линейные пространства над полем $\mathbb{F}$ и $\mathcal{F} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ — изоморфизм $\boldsymbol{V}$ на $\boldsymbol{W}$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) для любых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}$ и любых скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ равенство $\boldsymbol{b} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k$ имеет место тогда и только тогда, когда $\mathcal{F}(\boldsymbol{b}) = \alpha_1\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_2) + \ldots + {}+\alpha_k\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_k)$;

2) система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ из $\boldsymbol{V}$линейно независима тогда и только тогда, когда система векторов $\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_1), \mathcal{F}(\boldsymbol{a}_2), \ldots, \mathcal{F}(\boldsymbol{a}_k)$ из $\boldsymbol{W}$ линейно независима;

3) система векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ из $\boldsymbol{V}$ является базисом тогда и только тогда, когда система векторов $\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_n)$ из $\boldsymbol{W}$ является базисом.

Доказательство. Чтобы доказать утверждение 1), сначала заметим, что из определения изоморфизма следует равенство

$$\begin{aligned}&\mathcal{F}(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k) = \\ &= \alpha_1\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_2) + \ldots + \alpha_k\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_k).\end{aligned} \tag{3.2}$$

В самом деле, используя сначала первое условие из определения, а затем второе, получаем$\mathcal{F}(\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k) = \mathcal{F}(\alpha_1\boldsymbol{a}_1) + {}+\mathcal{F}(\alpha_2\boldsymbol{a}_2) + \ldots + \mathcal{F}(\alpha_k\boldsymbol{a}_k) = \alpha_1\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_1) + \alpha_2\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_2) + \ldots + \alpha_k\mathcal{F}(\boldsymbol{a}_k)$, откуда непосредственно следует (3.2). Утверждение 1) теперь получается из (3.2) с учетом биективности $\mathcal{F}$.

Читателю предлагается вывести утверждение 2) из утверждения 1).

Докажем утверждение 3). Так как обратное к изоморфизму отображение является изоморфизмом, достаточно проверить, что если $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — базис $\boldsymbol{V}$, то $\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_n)$ —

базис подпространства $\boldsymbol{W}$. Из утверждения 2) следует, что система $\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_n)$ линейно независима. Проверим, что

$$\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_n) \vdash \boldsymbol{W}. \tag{3.3}$$

Пусть $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Так как $\mathcal{F}$ — сюръективное отображение, существует $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, такой что $\mathcal{F}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$. Разлагая $\boldsymbol{v}$ по базису $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$, имеем $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \alpha_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$. Согласно утверждению 1) отсюда следует, что $\mathcal{F}(\boldsymbol{v}) = \alpha_1\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1) + \alpha_2\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2) + \ldots + \alpha_n\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_n)$. Условие (3.3) доказано. Следовательно, векторы $\mathcal{F}(\boldsymbol{e}_1), \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_2), \ldots, \mathcal{F}(\boldsymbol{e}_n)$ образуют базис $\boldsymbol{W}$. $\square$

Доказанное только что утверждение показывает, что при изоморфизме сохраняются все свойства систем векторов, формулируемые в терминах операций векторного пространства, такие как свойства быть линейно зависимой системой или линейно независимой системой. В частности, справедливо такое утверждение.

Предложение 3.2.8. *Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство размерности n над полем $\mathbb{F}$. Тогда выполняются следующие утверждения:*

1) для любых векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}$ и любых скаляров $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ равенство $\boldsymbol{b} = \alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k$ имеет место тогда и только тогда, когда для любого базиса $\mathbf{B}$ пространства $\boldsymbol{V}$ для системы столбцов $[\boldsymbol{b}]_{\mathbf{B}}, [\boldsymbol{a}_1]_{\mathbf{B}}, [\boldsymbol{a}_2]_{\mathbf{B}}, \ldots, [\boldsymbol{a}_k]_{\mathbf{B}}$ выполняется равенство $[\boldsymbol{b}]_{\mathbf{B}} = \alpha_1[\boldsymbol{a}_1]_{\mathbf{B}} + \alpha_2[\boldsymbol{a}_2]_{\mathbf{B}} + \ldots + \alpha_k[\boldsymbol{a}_k]_{\mathbf{B}}$;

2) система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ пространства $\boldsymbol{V}$ линейно зависима [независима] тогда и только тогда, когда для любого базиса $\mathbf{B}$ пространства $\boldsymbol{V}$ система столбцов $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathbf{B}}, [\boldsymbol{a}_2]_{\mathbf{B}}, \ldots, [\boldsymbol{a}_k]_{\mathbf{B}}$ координат векторов данной системы в базисе $\mathbf{B}$ линейно зависима [независима];

3) система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ пространства $\boldsymbol{V}$ является базисом тогда и только тогда, когда для любого базиса $\mathbf{B}$ пространства $\boldsymbol{V}$ система столбцов $[\boldsymbol{a}_1]_{\mathbf{B}}, [\boldsymbol{a}_2]_{\mathbf{B}}, \ldots, [\boldsymbol{a}_n]_{\mathbf{B}}$ координат векторов данной системы в базисе $\mathbf{B}$ линейно независима.

Опираясь на теорему 3.2.4 и предложение 3.2.7, установим следующий критерий изоморфизма конечномерных линейных пространств.

Теорема 3.2.5. *Линейные пространства* $\boldsymbol{V}$ *и* $\boldsymbol{W}$ *над полем* $\mathbb{F}$ *изоморфны тогда и только тогда, когда* $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} = \mathsf{dim}\boldsymbol{W}$.

В самом деле, если пространства $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ изоморфны, то согласно утверждению 3) предложения 3.2.7 имеем $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} = \mathsf{dim}\boldsymbol{W}$. Обратно, если $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} = \mathsf{dim}\boldsymbol{W}$, то по теореме 3.2.4 получаем, что $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ изоморфны пространству столбцов $\mathbb{F}^n$. Читателю предлагается убедиться, что тогда $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ изоморфны.

Для базиса $\mathbf{B}$ пространства $\boldsymbol{V}$ и вектора $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}$ ради удобства будем писать $\boldsymbol{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ вместо $[\boldsymbol{a}]_{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \ldots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$.

Рассмотрим пример. Пусть в трехмерном пространстве $\boldsymbol{V}$ заданы в некотором базисе векторы $\boldsymbol{a} = (1, 2, 1)$, $\boldsymbol{b} = (2, 1, 3)$, $\boldsymbol{c} = (1, 2, 2)$, $\boldsymbol{d} = (4, 5, 6)$. Доказать, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ образуют базис и найти в этом базисе координаты вектора $\boldsymbol{d}$.

Решение. Используем способ, описанный в конце п. 3.2.1. Выпишем столбцы координат векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}$ и к строкам полученной матрицы применим элементарные преобразования. Тогда можно будет увидеть, будут ли векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ линейно независимы (тогда они образуют базис $\boldsymbol{V}$ согласно предложению 3.2.5) и каковы коэффициенты разложения $\boldsymbol{d}$ по этим векторам.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Мы видим, что векторы $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ линейно независимы и $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}$. Таким образом, в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ вектор $\boldsymbol{d}$ имеет координаты $(1, 1, 1)$.

3.2.5. Изменение базиса. Матрица перехода

Пусть $\mathbf{B}$ и $\mathbf{C}$ — два базиса линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Как связаны между собой координаты одного и того же вектора $\boldsymbol{x}$ в этих базисах? Для ответа на этот вопрос рассмотрим матрицу $\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}}$, составленную из столбцов координат векторов базиса $\mathbf{C}$ в базисе $\mathbf{B}$. Эта матрица называется *матрицей перехода* от базиса $\mathbf{B}$ к базису $\mathbf{C}$. Для нее имеем $\mathbf{C} = \mathbf{B}\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}}$. Аналогично, рассматривая матрицу перехода от $\mathbf{C}$ к $\mathbf{B}$ и обозначая ее через $\boldsymbol{T}_{\mathbf{C},\mathbf{B}}$, приходим к равенству $\mathbf{B} = \mathbf{C}\boldsymbol{T}_{\mathbf{C},\mathbf{B}}$. Отсюда, пользуясь утверждением 2) предложения 3.2.6, получаем $\mathbf{C} = \mathbf{B}\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}} = (\mathbf{C}\boldsymbol{T}_{\mathbf{C},\mathbf{B}})\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}} = \mathbf{C}(\boldsymbol{T}_{\mathbf{C},\mathbf{B}}\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}})$. Так как $\mathbf{C} = \mathbf{C}\boldsymbol{E}_n$, имеем $\mathbf{C}(\boldsymbol{T}_{\mathbf{C},\mathbf{B}}\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}}) = \mathbf{C}\boldsymbol{E}_n$, откуда согласно утверждению 1) предложения 3.2.6 получаем $\boldsymbol{T}_{\mathbf{C},\mathbf{B}}\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}} = \boldsymbol{E}_n$. Аналогично доказывается равенство $\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}}\boldsymbol{T}_{\mathbf{C},\mathbf{B}} = \boldsymbol{E}_n$. Нами доказано следующее утверждение.

Предложение 3.2.9. *Матрица перехода от базиса* $\mathbf{B}$ *к базису* $\mathbf{C}$ *является обратимой, и обратная к ней матрица является матрицей перехода от* $\mathbf{C}$ *к* $\mathbf{B}$.

Возьмем произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Имеем $\boldsymbol{x} = \mathbf{B}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}}$ и $\boldsymbol{x} = \mathbf{C}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{C}}$. Подставляя вместо $\mathbf{C}$ выражение $\mathbf{B}\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}}$ и пользуясь предложением 3.2.6, получаем $\boldsymbol{x} = (\mathbf{B}\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}})[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{C}} = \mathbf{B}(\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{C}})$, откуда $\mathbf{B}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}} = \mathbf{B}(\boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{C}})$ и

$$[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{B}} = \boldsymbol{T}_{\mathbf{B},\mathbf{C}}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{C}}. \tag{3.4}$$

Последняя формула и дает связь между координатами одного и того же вектора в разных базисах.

Что касается нахождения матрицы перехода от одного конкретного базиса к другому, то можно разлагать все векторы по векторам первого базиса *одновременно*, как сделано в нижеследующем примере. Пусть в двумерном пространстве в некотором базисе даны векторы $\boldsymbol{a}_1 = (1,2)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,5)$, $\boldsymbol{b}_1 = (4,7)$, $\boldsymbol{b}_2 = (-2,1)$. Доказать, что они образуют базисы, найти матрицу перехода $\boldsymbol{T}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ и записать формулы преобразования координат.

Решение. То, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ образуют базисы, легко проверяется вычислением определителей, составленных из их координат. Для нахождения матрицы перехода разложим векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ по векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. Для этого выпишем столбцы координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ и припишем к ним столбцы координат векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$. В полученной матрице с помощью элементарных преобразований строк получим на месте координат векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$ единичную матрицу. Тогда на месте координат векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ окажется матрица перехода $\boldsymbol{T}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$.

$$\left(\begin{array}{cc|cr} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & 7 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cr} 1 & 2 & 4 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cr} 1 & 0 & 2 & -12 \\ 0 & 1 & 1 & 5 \end{array}\right).$$

Мы видим, что $\boldsymbol{T}_{\mathbf{A},\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -12 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$ и формулы преобразования координат имеют вид $x_{\mathbf{A}} = 2x_{\mathbf{B}} - 12y_{\mathbf{B}}$, $y_{\mathbf{A}} = x_{\mathbf{B}} + 5y_{\mathbf{B}}$.

§ 3.3. Линейные подпространства

Во всех пунктах этого параграфа предполагается зафиксированным линейное пространство $\boldsymbol{V}$ над полем $\mathbb{F}$.

3.3.1. Понятие линейного подпространства

Пусть $\boldsymbol{U}$ — подмножество линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Оно называется *линейным подпространством* пространства $\boldsymbol{V}$, если выполняются следующие два условия:

1) для любых $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{U}$ имеет место $\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{U}$ (замкнутость U относительно сложения);

2) для любого $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ и любого $\alpha \in \mathbb{F}$ справедливо $\alpha\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ (замкнутость $\boldsymbol{U}$ относительно умножения на числа из поля $\mathbb{F}$).

Читателю предлагается проверить, что для линейного подпространства $\boldsymbol{U}$ и поля $\mathbb{F}$ выполняются все аксиомы линейного пространства, если в качестве операций рассмотреть операции исходного пространства $\boldsymbol{V}$. Этим оправдывается термин "подпространство". В частности, каждое ненулевое подпространство имеет базис. Размерность подпространства $\boldsymbol{U}$ обозначается через $\mathsf{dim}\boldsymbol{U}$. Так как все векторы базиса пространства $\boldsymbol{U}$ линейно выражаются через некоторый базис пространства $\boldsymbol{V}$, в силу следствия 3.1.1 имеем $\mathsf{dim}\boldsymbol{U} \le \mathsf{dim}\boldsymbol{V}$, т.е. *размерность подпространства не превосходит размерности пространства.*

Для системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ обозначим через $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$ множество всевозможных линейных комбинаций векторов указанной системы (с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$). Непосредственно проверяется, что это линейное подпространство $\boldsymbol{V}$, содержащееся в любом подпространства, содержащем векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Будем называть его *линейной оболочкой* системы векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Можно также сказать, что система $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *порождает* линейное подпространство $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$. Читателю предлагается проверить, что

$$\mathsf{dim}\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle = \mathsf{r}(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k). \tag{3.5}$$

Фактически нами доказано следующее утверждение.

Предложение 3.3.1. *Подмножество конечномерного линейного пространства является подпространством тогда и только тогда, когда оно есть линейная оболочка некоторой конечной системы векторов.*

Предложение 3.3.2. *Любая линейно независимая система векторов линейного подпространства может быть дополнена до его базиса.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{U}$ — линейное подпространство пространства $\boldsymbol{V}$ и $\mathbf{A}$ — некоторая линейно независимая система векторов из $\boldsymbol{U}$. Если $\boldsymbol{U} = \langle \mathrm{A} \rangle$, то $\mathbf{A}$ является базисом $\boldsymbol{U}$ и доказывать нечего. В противном случае в $\boldsymbol{U}$ найдется вектор $\boldsymbol{b}_1$, не принадлежащий $\langle \mathbf{A} \rangle$. Согласно утверждению 3) предложения 3.1.5 система $\mathbf{A}, \boldsymbol{b}_1$ линейно независима. Если $\boldsymbol{U} = \langle \mathbf{A}, \boldsymbol{b}_1 \rangle$, то полученная система будет базисом $\boldsymbol{U}$. В противном случае найдется вектор $\boldsymbol{b}_2$, принадлежащий $\boldsymbol{U}$ и не лежащий в $\langle \mathbf{A}, \boldsymbol{b}_1 \rangle$. Повторяя для него рассуждения, проведенные выше для $\boldsymbol{b}_1$, мы либо констатируем, что $\mathrm{A}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2$ есть базис $\boldsymbol{U}$, либо найдем в $\boldsymbol{U}$ вектор $\boldsymbol{b}_3$, не лежащий в $\langle \mathrm{A}, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2 \rangle$. Описанный процесс должен закончиться не более чем за $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} - 1$ шагов, поскольку на каждом шаге получается линейно независимое множество и любая система из $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} + 1$ векторов линейно зависима. По окончании этого процесса множество $\mathbf{A}$ окажется дополненным до базиса подпространства $\boldsymbol{V}$. □

Предложение 3.3.3. *Если для линейных подпространств* $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{W}$ *выполняются условия* $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{W}$, $\mathsf{dim}\boldsymbol{U} = \mathsf{dim}\boldsymbol{W}$, *то* $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W}$.

Доказательство. Достаточно проверить, что $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{U}$. Пусть $\mathbf{B}$ — некоторый базис линейного подпространства $\boldsymbol{U}$. Так как $\mathsf{dim}\boldsymbol{U} = \mathsf{dim}\boldsymbol{W}$ и $\mathrm{B} \subset \boldsymbol{W}$, согласно предложению 3.2.5 $\mathbf{B}$ является базисом $\boldsymbol{W}$. Следовательно, $\boldsymbol{W} = \langle \mathrm{B} \rangle \subseteq \boldsymbol{U}$, что и требуется доказать.

□

3.3.2. Сумма и пересечение

Пусть $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$ — два линейных подпространства линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Положим

$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \mid \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U},\ \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}\}.$$

Полученное множество называется *суммой* линейных подпространств $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$. Оно состоит из всевозможных сумм векторов из $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$. Так как любое подпространство содержит нулевой вектор, очевидно, что $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$. Читателю предлагается проверить, что $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$ является линейным подпространством, и что если $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k \rangle$, $\boldsymbol{W} = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m \rangle$, то $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_m \rangle$.

Положим также

$$\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \text{ и } \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}\}.$$

Ясно, что $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$ — подпространство $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{W}$. Связь размерностей суммы и пересечения линейных подпространств с размерностями исходных подпространств дается следующей теоремой.

Теорема 3.3.1. *Для любых подпространств $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{W}$ имеет место равенство*

$$\mathsf{dim}(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) = \mathsf{dim}\boldsymbol{U} + \mathsf{dim}\boldsymbol{W} - \mathsf{dim}(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}).$$

Доказательство. Если хотя бы одно из подпространств $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{W}$ является нулевым, то утверждение теоремы очевидно. Пусть оба подпространства ненулевые. Обозначим через $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ некоторый базис подпространства $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$ (не исключено, что $k = 0$, в этом случае $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{o}\}$ и базиса не существует). Дополним это множество до базисов в $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$ (опираясь на предложение 3.3.2 при $k > 0$) векторами $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ и $\boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_l$ соответственно. Тогда имеем

$$\mathsf{dim}(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) = k, \ \mathsf{dim}\boldsymbol{U} = k + m, \ \mathsf{dim}\boldsymbol{W} = k + l. \tag{3.6}$$

Докажем, что $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_l$ есть базис $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$. Тогда $\mathsf{dim}(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}) = k + m + l$, и требуемая формула непосредственно следует из (3.6). Так как $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m \rangle$ и $\boldsymbol{W} = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_l \rangle$, в силу замечания о порождающем множестве суммы $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$ ясно, что

$$\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \langle \boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_l \rangle.$$

Остается проверить линейную независимость системы

$$\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_l.$$

Пусть $\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k+\beta_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\beta_m\boldsymbol{b}_m+\gamma_1\boldsymbol{c}_1+\ldots+\gamma_l\boldsymbol{c}_l = \boldsymbol{o}$. Тогда $\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k+\beta_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\beta_m\boldsymbol{b}_m = -(\gamma_1\boldsymbol{c}_1+\ldots+\gamma_l\boldsymbol{c}_l)$. Так как левая часть этого равенства принадлежит $\boldsymbol{U}$, а правая $\boldsymbol{W}$, вектор, определяемый правой частью, лежит в $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$, т.е. может быть разложен по базису $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ или равен $\boldsymbol{o}$. Так как векторы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_l$ линейно независимы, отсюда следует, что $\gamma_1 = 0, \ldots, \gamma_l = 0$. Тогда $\alpha_1\boldsymbol{a}_1+\ldots+\alpha_k\boldsymbol{a}_k+\beta_1\boldsymbol{b}_1+\ldots+\beta_m\boldsymbol{b}_m = \boldsymbol{o}$, откуда в силу линейной независимости векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m$ следует $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_k = 0, \beta_1 = 0, \ldots, \beta_m = 0$. Таким образом, система векторов $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_m, \boldsymbol{c}_1, \ldots, \boldsymbol{c}_l$ линейно независима. □

3.3.3. Прямая сумма

Сначала докажем следующее утверждение.

Предложение 3.3.4. *Следующие условия эквивалентны для линейных подпространств $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{W}$:*

(1) $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{o}\}$;

(2) $\mathsf{dim}(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}) = \mathsf{dim}\boldsymbol{U} + \mathsf{dim}\boldsymbol{W}$;

(3) каждый вектор из $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$ единственным образом представим в виде суммы элементов из $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$;

(4) некоторый вектор из $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$ единственным образом представим в виде суммы элементов из $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$.

Доказательство. Равносильность (1) и (2) обеспечивается теоремой 3.3.1. Очевидно, что из (3) следует (4).

Докажем, что из (1) следует (3). Пусть $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}+\boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{w}_2$ для некоторых $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \boldsymbol{W}$. Тогда имеем $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1$. Так как вектор в левой части принадлежит $\boldsymbol{U}$, а вектор в правой части принадлежит $\boldsymbol{W}$, имеем

$\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 \in \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$. Следовательно, $\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{w}_2 - \boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{o}$, т.е. $\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u}_2$ и $\boldsymbol{w}_1 = \boldsymbol{w}_2$, что и требуется доказать.

Докажем, что из (4) следует (1). Пусть вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$ единственным образом представим в виде суммы элементов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{w}$ из $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{W}$. Возьмем произвольный элемент $\boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$. Тогда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{w})$. Так как $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{y} + \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$, в силу единственности представления имеем $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{y}$, откуда $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$. Итак, $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{o}\}$. □

Если выполняется одно из условий (1)–(4) этого предложения, то сумма подпространств $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$ называется *прямой* и обозначается через $\boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{W}$.

Предложение 3.3.5. *Для любого линейного подпространства* $\boldsymbol{U}$ *существует линейное подпространство* $\boldsymbol{W}$ *такое, что*

$$\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{W}.$$

Доказательство. Если $\boldsymbol{U} = \{\boldsymbol{o}\}$, то положим $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}$, а если $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{V}$, то положим $\boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{o}\}$; при этом очевидно, что $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{W}$. Пусть $\boldsymbol{U} \neq \boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{U} \neq \{\boldsymbol{o}\}$. Возьмем некоторый базис $\mathbf{B}$ линейного подпространства $\boldsymbol{U}$. По предложению 3.3.2, примененному к $\boldsymbol{V}$, линейно независимая система $\mathbf{B}$ может быть дополнена до базиса $\boldsymbol{V}$. Обозначим через $\mathbf{C}$ систему векторов, дополняющую $\mathbf{B}$ до базиса $\boldsymbol{V}$ и положим $\boldsymbol{W} = \langle \mathbf{C} \rangle$. Тогда $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{o}\}$, поскольку объединение базисов этих подпространств $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ является линейно независимой системой, и $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$, поскольку $\mathbf{B}, \mathbf{C}$ порождает $\boldsymbol{V}$, откуда $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{W}$. □

Понятие прямой суммы можно распространить на случай нескольких слагаемых. Пусть $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_k$ — линейные подпространства линейного пространства $\boldsymbol{V}$ над полем $\mathbb{F}$. Их *суммой* называется множество

$$\boldsymbol{U}_1 + \ldots + \boldsymbol{U}_k = \{u_1 + \ldots + u_k \mid u_1 \in \boldsymbol{U}_1, \ldots,\ u_k \in \boldsymbol{U}_k\},$$

состоящее из всевозможных сумм элементов, взятых по одному из каждого подпространства–слагаемого. Опираясь на случай двух подпространств, по индукции нетрудно установить, что $\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \ldots + \boldsymbol{U}_k$ есть линейное подпространство. Сумма $\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \ldots + \boldsymbol{U}_k$ называется *прямой* и обозначается через $\boldsymbol{U}_1 \oplus \boldsymbol{U}_2 \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{U}_k$, если выполняется одно из условий, указанных в следующем предложении.

Предложение 3.3.6. *Следующие условия эквивалентны для линейных подпространств $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_k$:*

(1) $\boldsymbol{U}_i \cap \langle \boldsymbol{U}_j \mid 1 \le j \le k,\ j \ne i \rangle = \{\boldsymbol{o}\}$ при всех $i = 1, 2, \ldots, k$;

(2) $\mathsf{dim}(\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \ldots + \boldsymbol{U}_k) = \mathsf{dim}\boldsymbol{U}_1 + \mathsf{dim}\boldsymbol{U}_2 + \ldots + \mathsf{dim}\boldsymbol{U}_k$;

(3) каждый вектор из $\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \ldots + \boldsymbol{U}_k$ единственным образом представим в виде суммы элементов из $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_k$;

(4) некоторый вектор из $\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \ldots + \boldsymbol{U}_k$ единственным образом представим в виде суммы элементов из $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_k$.

Доказательство. Докажем, что из (1) следует (2). Пусть $\boldsymbol{e}_{i1}, \boldsymbol{e}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{id_i}$ — базис подпространства $\boldsymbol{U}_i$ при всех $i = 1, \ldots, k$. Тогда условие (1) можно переписать в виде

$$\langle \boldsymbol{e}_{i1}, \boldsymbol{e}_{i2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{id_i} \rangle \cap \langle \boldsymbol{e}_{j1}, \boldsymbol{e}_{j2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{jd_j} \mid 1 \le j \le k, j \ne i \rangle = \{\boldsymbol{o}\}. \quad (3.7)$$

Из последнего условия легко вывести, что система векторов

$$\boldsymbol{e}_{11}, \boldsymbol{e}_{12}, \ldots, \boldsymbol{e}_{1d_1}, \ldots, \boldsymbol{e}_{k1}, \boldsymbol{e}_{k2}, \ldots, \boldsymbol{e}_{kd_k}, \quad (3.8)$$

полученная объединением базисов подпространств $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_k$, линейно независима. Также непосредственно проверяется, что система (3.8) порождает подпространство $\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \ldots + \boldsymbol{U}_k$. Следовательно, она является базисом $\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \ldots + \boldsymbol{U}_k$, откуда прямо следует утверждение (2).

Докажем, что из (2) следует (1). Рассмотрим снова базисы подпространств $\boldsymbol{U}_1, \boldsymbol{U}_2, \ldots, \boldsymbol{U}_k$, и возьмем их объединение (3.8). Оно порождает $\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \ldots + \boldsymbol{U}_k$, а так как число векторов в нем равно $\mathsf{dim}(\boldsymbol{U}_1 + \boldsymbol{U}_2 + \ldots + \boldsymbol{U}_k)$, оно будет и базисом суммы. Из линейной независимости системы (3.8) легко получается условие (3.7), а из последнего следует условие (1).

Доказательство импликаций (1) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4) $\Rightarrow$ (1) проводится аналогично доказательству соответствующих импликаций в доказательстве предложения 3.3.4. □

§ 3.4. Линейные многообразия

Как и ранее, все рассмотрения этого параграфа производятся в конечномерном линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ над полем $\mathbb{F}$.

3.4.1. Понятие линейного многообразия

Пусть $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор и $\boldsymbol{U}$ — фиксированное линейное подпространство линейного пространства $\boldsymbol{V}$. *Линейным многообразием* с *вектором сдвига* $\boldsymbol{a}$ и *направляющим подпространством* $\boldsymbol{U}$ называется множество векторов

$$\{\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{u} \text{ для некоторого } \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}\}.$$

Будем обозначать его через $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$. *Размерностью* линейного многообразия называется размерность его направляющего подпространства. В частности, если направляющее подпространство нулевое, то линейное многообразие состоит из одного вектора и его называют *точкой*. Линейные многообразия размерности 1 называются *прямыми*, а размерности 2 — *плоскостями*. В линейном пространстве обычных векторов линейные многообразия — прямые исчерпываются множествами радиус–векторов точек некоторой прямой для всех прямых в пространстве. Аналогичным образом могут быть представлены и линейные многообразия — плоскости в этом линейном пространстве.

Линейные многообразия естественно возникают как множества всех решений совместных систем линейных уравнений (см. п. 3.5.4).

Предложение 3.4.1. *Пусть* $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{W}$ *— линейные многообразия. Тогда*

1) любой вектор из $\boldsymbol{K}$ *может быть взят в качестве вектора сдвига для* $\boldsymbol{K}$*;*

2) $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{L} \Leftrightarrow \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{W}$ *и* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}$*;*

3) $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{L} \Leftrightarrow \boldsymbol{U} = \boldsymbol{W}$ *и* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}$.

Доказательство. Для доказательства утверждения 1) возьмем произвольный вектор $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{K}$ и покажем, что $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{U}$. Так как $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{K}$, имеем $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{u}$ для некоторого $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$. Ясно, что $\boldsymbol{d} + \boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{K}$. Для доказательства обратного включения возьмем произвольный элемент $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v}$ из $\boldsymbol{K}$ (здесь $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{U}$). Тогда имеем $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{v} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{d}+(\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u})$, и так как $\boldsymbol{v}-\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$, имеем $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{d} + \boldsymbol{U}$, откуда $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{d} + \boldsymbol{U}$, что и требуется доказать.

Для доказательства утверждения 2) убедимся в справедливости двух импликаций, к которым сводится требуемая эквивалентность. Пусть $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{L}$. Так как $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{L}$, согласно доказанному утверждению 1) имеем $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{W}$. Пусть $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$. Тогда $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$, и потому $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{L}$. Таким образом, $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}$ для некоторого $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$, откуда $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w}$ и $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}$. Мы доказали, что $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{W}$. Так как $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{L}$, имеем $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{w}$ для некоторого $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Мы видим, что $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Импликация “$\Rightarrow$” доказана. Докажем обратную импликацию. Пусть $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}$. Возьмем произвольный элемент $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{K}$. Имеем $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{u} = \boldsymbol{b}+(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})+\boldsymbol{u}$. Так как $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{W}$, заключаем, что $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{b} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{L}$, откуда $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{L}$.

Утверждение 3) непосредственно следует из 2). □

3.4.2. Пересечение и композит

Пусть $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{W}$ — линейные многообразия. Через $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}$ обозначим пересечение множеств векторов $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$.

Предложение 3.4.2. *Пересечение линейных многообразий* $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{W}$ *либо пусто, либо является линейным многообразием с направляющим подпространством* $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$, *причем* $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L} \neq \emptyset$ *тогда и только тогда, когда* $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$.

Доказательство. Предположим, что $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L} \neq \emptyset$. Возьмем элемент $\boldsymbol{d} \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}$. Согласно утверждению 1) предложения 3.4.1 имеем $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{W}$. Пусть $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}$. Тогда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{d} + \boldsymbol{w}$ для некоторых $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Ясно, что $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$. Таким образом, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{d} + (\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})$, откуда $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{d} + (\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})$. В силу утверждения 2) предложения 3.4.1 имеем $\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) \subseteq \boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) \subseteq \boldsymbol{L}$, откуда $\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) \subseteq \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}$. Итак, $\boldsymbol{d} + (\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) = \boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}$, и первое утверждение предложения доказано.

Для доказательства второго утверждения сначала предположим, что $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L} \neq \emptyset$. Тогда для некоторых $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$ имеем $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{w}$. Из последнего равенства выводим $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$. Обратно, предположим, что $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ для некоторых $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Тогда $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{u} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{w}$, и элемент $\boldsymbol{d} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{u}$ принадлежит $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L}$, что и требуется доказать. □

Аналогично предложению 3.4.2 можно доказать, что пересечение любого семейства линейных многообразий либо пусто, либо является линейным многообразием. Так как само линейное пространство $\boldsymbol{V}$ является линейным многообразием, для любого семейства линейных многообразий существует наименьшее линейное многообразие, включающее в себя все многообразия данного семейства, — это пересечение всех линейных многообразий, включающих в себя все многообразия данного семейства. Указанное многообразие называется *композитом* данного семейства многообразий и для двух многообразий $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$ обозначается через $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle$.

Предложение 3.4.3. *Для линейных многообразий* $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{W}$ *имеет место равенство*

$$\langle\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\rangle = \boldsymbol{a} + (\langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \rangle + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}).$$

Доказательство. Положим $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{a} + (\langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \rangle + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W})$ и докажем, что $\boldsymbol{M}$ есть наименьшее линейное многообразие, содержащее $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$. Из утверждения 2) предложения 3.4.1 следует, что $\boldsymbol{K} \subseteq \boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{L} \subseteq \boldsymbol{M}$. Пусть $\boldsymbol{N} = \boldsymbol{c} + \boldsymbol{S}$ — произвольное линейное многообразие, содержащее $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$. Согласно упомянутому только что утверждению имеем $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{S}$. Так как $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{S}$ и $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{S}$, заключаем, что $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}) - (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) \in \boldsymbol{S}$. Следовательно, $\langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \rangle + \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{S}$. Поскольку $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c} \in \boldsymbol{S}$, по утверждению 2) предложения 3.4.1 имеем $\boldsymbol{M} \subseteq \boldsymbol{N}$, что и требуется доказать. □

Будем говорить, что линейные многообразия $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{W}$ *параллельны*, если $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L} = \emptyset$ и $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{W}$ или $\boldsymbol{W} \subseteq \boldsymbol{U}$. Согласно предложению 3.4.2 линейные многообразия $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{W}$ параллельны тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \notin \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$ и $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{U}$ или $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \boldsymbol{W}$.

3.4.3. Взаимное расположение

Пусть $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{W}$ — линейные многообразия в линейном пространстве $\boldsymbol{V}$. Их *взаимное расположение* определяется размерностью $\mathsf{dim}(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})$ пересечения направляющих подпространств и выполнением условия $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L} = \emptyset$. В силу предложения 3.4.2 последнее условие равносильно условию $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \notin \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$. Если $\min\{\mathsf{dim}\boldsymbol{U}, \mathsf{dim}\boldsymbol{W}\} = m$, то имеется $2m + 2$ различных случаев взаимного расположения линейных многообразий $\boldsymbol{K}$ и $\boldsymbol{L}$. Эти случаи исчерпываются возможностями $\mathsf{dim}(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) = k$, $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L} = \emptyset$ и $\mathsf{dim}(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) = k$, $\boldsymbol{K} \cap \boldsymbol{L} \neq \emptyset$ при всех $k = 0, 1, \ldots, m$.

Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения двух прямых $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{c} \rangle$ и $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b} + \langle \boldsymbol{d} \rangle$.

1. $\langle \boldsymbol{c} \rangle \cap \langle \boldsymbol{d} \rangle = \{\boldsymbol{o}\}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \notin \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 3$. Прямые "скрещиваются"; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 3$.

2. $\langle \boldsymbol{c} \rangle \cap \langle \boldsymbol{d} \rangle = \{\boldsymbol{o}\}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 2$. Прямые пересекаются в точке; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 2$.

3. $\mathsf{dim}(\langle \boldsymbol{c} \rangle \cap \langle \boldsymbol{d} \rangle) = 1$, т.е. $\langle \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{d} \rangle$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \notin \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle = \langle \boldsymbol{c} \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \rangle$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 2$. Прямые параллельны; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 2$.

4. $\mathsf{dim}(\langle \boldsymbol{c} \rangle \cap \langle \boldsymbol{d} \rangle) = 1$, т.е. $\langle \boldsymbol{c} \rangle = \langle \boldsymbol{d} \rangle$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d} \rangle = \langle \boldsymbol{c} \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{c} \rangle = \boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 1$. Прямые совпадают; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 1$.

Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения прямой $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{c} \rangle$ и плоскости $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b} + \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$.

1. $\langle \boldsymbol{c} \rangle \cap \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle = \{\boldsymbol{o}\}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \notin \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 4$. Плоскость и прямая "скрещиваются"; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 4$.

2. $\langle \boldsymbol{c} \rangle \cap \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle = \{\boldsymbol{o}\}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 3$. Плоскость и прямая пересекаются в точке; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 3$.

3. $\mathsf{dim}(\langle \boldsymbol{c} \rangle \cap \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle) = 1$, т.е. $\boldsymbol{c} \in \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \notin \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 3$. Плоскость и прямая параллельны; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 3$.

4. $\mathsf{dim}(\langle \boldsymbol{c} \rangle \cap \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle) = 1$, т.е. $\boldsymbol{c} \in \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{c}, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 2$. Прямая лежит в плоскости; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 2$.

Рассмотрим возможные случаи взаимного расположения двух плоскостей $\boldsymbol{K} = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle$ и $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{b} + \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$.

1. $\langle \boldsymbol{c} \rangle \cap \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle = \{\boldsymbol{o}\}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \notin \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 5$. Плоскости

"скрещиваются"; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 5$.

2. $\langle \boldsymbol{c} \rangle \cap \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle = \{\boldsymbol{o}\}$, $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 4$. Плоскости пересекаются в одной точке; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 4$.

3. $\mathsf{dim}(\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle \cap \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle) = 1$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \notin \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$, однако $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 4$. Плоскости не имеют общих точек и не параллельны, но существует прямая, параллельная каждой из них (в этом отличие от случая 1); рассматриваемый случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 4$.

4. $\mathsf{dim}(\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle \cap \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle) = 1$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$, однако $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 3$. Плоскости пересекаются по прямой; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 3$.

5. $\mathsf{dim}(\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle \cap \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle) = 2$, т.е. $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \notin \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + {}$ $+ \langle \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 2$. Плоскости параллельны; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 3$.

6. $\mathsf{dim}(\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle \cap \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle) = 2$, т.е. $\langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle$ и $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} \in$ $\in \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2, \boldsymbol{d}_1, \boldsymbol{d}_2 \rangle = \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle$. В этом случае $\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{c}_1, \boldsymbol{c}_2 \rangle =$ $= \boldsymbol{K} = \boldsymbol{L}$ и $\mathsf{dim}\langle\!\langle \boldsymbol{K}, \boldsymbol{L} \rangle\!\rangle = 2$. Плоскости совпадают; такой случай возможен при условии $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} \geq 2$.

В трехмерном пространстве векторов, изучавшемся в главе 2, могут реализоваться все случаи взаимного расположения двух прямых, случаи 2–4 взаимного расположения прямой и плоскости и случаи 4–6 взаимного расположения двух плоскостей.

§ 3.5. Системы линейных уравнений

Здесь рассматривается общая теория систем линейных алгебраических уравнений.

3.5.1. Критерий совместности

Рассмотрим систему линейных уравнений в матричной записи

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}, \tag{3.9}$$

где $\boldsymbol{A}$ — матрица размеров $m \times n$; $\boldsymbol{x}$ — столбец из n неизвестных; $\boldsymbol{b}$ — столбец свободных членов. Напомним, что матрица $\boldsymbol{A}$ называется основной матрицей, а матрица $(\boldsymbol{A} \mid \boldsymbol{b})$ — расширенной матрицей рассматриваемой системы линейных уравнений.

Теорема 3.5.1. *Система линейных уравнений является совместной тогда и только тогда, когда ранг ее основной матрицы совпадает с рангом расширенной матрицы.*

Доказательство. Рассмотрим систему линейных уравнений (3.9). Легко понять, что она совместна тогда и только тогда, когда столбец $\boldsymbol{b}$ линейно выражается через столбцы матрицы $\boldsymbol{A}$. Последнее условие равносильно тому, что максимальная линейно независимая подсистема столбцов расширенной матрицы может быть выбрана среди столбцов основной матрицы. Рассматривая столбцовый ранг матриц, заключаем, что это имеет место тогда и только тогда, когда столбцовый ранг основной матрицы равен столбцовому рангу расширенной матрицы. □

Из теоремы 1.2.5 и доказанного утверждения легко выводится такое

Следствие 3.5.1. *Если главный определитель крамеровской системы линейных уравнений равен нулю, а по крайней мере один из определителей при неизвестных отличен от нуля, то эта система несовместна.*

Рангом совместной системы линейных уравнений называется ранг ее основной матрицы (совпадающий в силу теоремы 3.5.1 с рангом расширенной матрицы).

3.5.2. Общее решение системы линейных уравнений

Рассмотрим совместную систему линейных уравнений в виде (3.9). Возьмем максимальную линейно независимую подсистему строк расширенной матрицы этой системы. Без ограничения общности можно предполагать, что она состоит из первых r строк. Остальные строки являются линейными комбинациями выбранных строк. Таким образом, рассматриваемая система линейных уравнений равносильна системе из первых r уравнений. Выберем в первых r строках матрицы $\boldsymbol{A}$ ненулевой минор. При необходимости переименовав неизвестные, без ограничения общности мы можем считать, что этот минор состоит из первых r столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$. Перенося остальные неизвестные в первых r уравнениях в правые части и используя теорему 1.2.5, получим выражения для неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ через $x_{r+1}, \ldots, x_n$. Эти выражения образуют систему линейных уравнений, обладающую следующими свойствами:

1) она равносильна исходной системе (3.9);

2) число уравнений равно рангу системы;

3) каждое уравнение дает выражение одной неизвестной через другие;

4) неизвестные из левых частей не встречаются в правой части ни одного уравнения.

Напомним, что общим решением системы линейных уравнений называется множество всех ее частных решений. Любая система линейных уравнений, обладающая свойствами 1)–4), также называется *общим решением* системы линейных уравнений (3.9), поскольку из нее легко получается общее решение — множество всех частных решений. Неизвестные, стоящие в левых частях равенств, будем называть *зависимыми*, а неизвестные в правых частях — *свободными*. Свободным неизвестным можно придавать любые значения, а значения зависимых неизвестных определяются из общего решения. Таким образом можно получить любое решение совместной системы линейных уравнений.

Из сказанного с учетом теоремы 1.2.5 легко получается следующее

Предложение 3.5.1. *Если главный определитель и все определители при неизвестных крамеровской системы линейных уравнений равны нулю, а ранг ее основной матрицы на единицу меньше числа неизвестных, то эта система имеет бесконечно много решений.*

Если ранг основной матрицы крамеровской системы линейных уравнений меньше числа неизвестных более чем на единицу, то все определители этой системы равны нулю, а сама система может быть как несовместной, так и неопределенной.

Для отыскания общего решения системы линейных уравнений можно использовать метод Гаусса–Жордана, который как раз для этого и предназначен; фактически он приводит либо к отысканию общего решения, либо к констатации факта, что ранг основной матрицы меньше ранга расширенной матрицы (см. п. 0.3.3).

3.5.3. Однородные системы линейных уравнений

Система линейных уравнений называется *однородной*, если во всех уравнениях свободные члены равны нулю. Однородную систему можно записать в виде

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}, \tag{3.10}$$

где $\boldsymbol{A}$ — матрица размеров $m \times n$; $\boldsymbol{x}$ — столбец из n неизвестных; $\boldsymbol{o}$ — нулевой столбец. Однородная система всегда совместна.

Предложение 3.5.2. *Общее решение однородной системы линейных уравнений (3.10) является линейным подпространством размерности $n-r$, где n — число неизвестных, r — ранг системы.*

Доказательство. Тот факт, что общее решение однородной системы линейных уравнений является линейным подпространством, проверяется непосредственно по определению: читателю предлагается вычислить, что сумма двух решений системы (3.10) является ее решением и произведение любого решения на любое число также будет решением. Для доказательства утверждения о размерности пространства решений запишем общее решение системы (3.10) в следующем виде (здесь $d = n - r$):

$$\begin{aligned} x_1 &= \gamma_{11}x_{r+1} + \ldots + \gamma_{1d}x_n; \\ x_2 &= \gamma_{21}x_{r+1} + \ldots + \gamma_{2d}x_n; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_r &= \gamma_{r1}x_{r+1} + \ldots + \gamma_{rd}x_n. \end{aligned}$$

Тогда произвольное решение $(x_1, \ldots, x_n)$ системы (3.10) можно представить следующим образом:

$$\begin{aligned} (x_1, \ldots, x_n) = x_{r+1}(\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, \ldots, 0) + \ldots + \\ + x_n(\gamma_{1d}, \gamma_{2d}, \ldots, \gamma_{rd}, 0, 0, \ldots, 1). \end{aligned}$$

Мы видим, что произвольное решение является линейной комбинацией строк

$$(\gamma_{11}, \gamma_{21}, \ldots, \gamma_{r1}, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, (\gamma_{1d}, \gamma_{2d}, \ldots, \gamma_{rd}, 0, 0, \ldots, 1). \quad (3.11)$$

Каждая из этих строк получается приданием одной из свободных неизвестных значения 1, а остальным — нулевых значений и определением значений связанных неизвестных из общего решения. Таким образом, система строк (3.11) состоит из решений однородной системы и является порождающим множеством пространства решений. Эта система очевидным образом линейно независима. Следовательно, она является базисом пространства решений. Число решений в ней равно $n - r$. □

Любой базис пространства решений однородной системы линейных уравнений называется ее *фундаментальной системой решений*. Из предложения 3.5.2 следует, что каждая фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений содержит точно $n - r$ решений, где n — число неизвестных, r — ранг однородной системы.

Предложение 3.5.3. *Для любого линейного подпространства $\boldsymbol{U}$ пространства столбцов $\mathbb{F}^n$ существует однородная система линейных уравнений с n неизвестными над полем $\mathbb{F}$, для которой $\boldsymbol{U}$ является пространством решений.*

Доказательство. Если $\boldsymbol{U}$ — нулевое подпространство, то в качестве системы уравнений можно взять систему $x_1 = 0, \ldots, x_n = 0$. Если $\boldsymbol{U} = \mathbb{F}^n$, то в качестве системы уравнений можно взять систему $0x_1 + \ldots + 0x_n = 0$.

Пусть $\boldsymbol{U} \neq \{\boldsymbol{o}\}$ и $\boldsymbol{U} \neq \mathbb{F}^n$. Зафиксируем некоторый базис $\boldsymbol{U}$, скажем, $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$. Тогда $\mathsf{dim}\boldsymbol{U} = k$ и $1 \leq k < n$. Обозначим через $\boldsymbol{B}$ матрицу, составленную из строк $\boldsymbol{a}_1^\top, \ldots, \boldsymbol{a}_k^\top$. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений в матричной форме $\boldsymbol{By} = \boldsymbol{o}$. Пусть $\boldsymbol{A}$ — матрица, образованная строками некоторой фундаментальной системы решений этой системы линейных уравнений. Докажем, что система $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$ является искомой. Обозначим через $\boldsymbol{W}$ ее пространство решений. По построению последней системы столбцы $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ являются ее решениями. Следовательно, $\boldsymbol{U} \subseteq \boldsymbol{W}$. Убедимся, что $\mathsf{dim}\boldsymbol{U} = \mathsf{dim}\boldsymbol{W}$. Имеем $\mathsf{dim}\boldsymbol{W} = n - \mathsf{r}(\boldsymbol{A})$. Так как строки матрицы $\boldsymbol{A}$ линейно независимы (они образуют фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений $\boldsymbol{By} = \boldsymbol{o}$) и строки матрицы $\boldsymbol{B}$ линейно независимы (они получаются транспонированием столбцов, образующих базис подпространства $\boldsymbol{U}$), имеем $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = n - \mathsf{r}(\boldsymbol{B}) = n - k$, откуда $\mathsf{dim}\boldsymbol{W} = k$. Итак, $\mathsf{dim}\boldsymbol{U} = \mathsf{dim}\boldsymbol{W}$. Согласно предложению 3.3.3 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W}$, что и требуется доказать. $\square$

Пример. Найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 8x_3 + 8x_4 + 7x_5 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 0; \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 7x_4 + 7x_5 = 0; \\ x_1 + 8x_2 - 7x_3 + 12x_4 + 14x_5 = 0. \end{cases}$$

Решение. Выпишем матрицу этой системы[1] и приведем эту матрицу к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -8 & 8 & 7 \\ 4 & 3 & -9 & 9 & 7 \\ 2 & 3 & -5 & 7 & 7 \\ 1 & 8 & -7 & 12 & 14 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 & 14 \\ 2 & 3 & -5 & 7 & 7 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 & 14 \\ 0 & -13 & 9 & -17 & -21 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -5 & -7 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & -13 & 9 & -17 & -21 \\ 0 & 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 35 & 35 & 70 \\ 0 & 0 & -7 & -7 & -14 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & -7 & 12 & 14 \\ 0 & -1 & -2 & -4 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 8 & 0 & 19 & 28 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

[1] Заметим, что при решении *однородных* систем линейных уравнений столбец свободных членов всегда остается нулевым и выписывать его нет необходимости.

По последней матрице записываем систему линейных уравнений, ее общее решение и фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ x_2 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases} \begin{cases} x_1 = -3x_4 - 4x_5; \\ x_2 = -2x_4 - 3x_5; \\ x_3 = -x_4 - 2x_5, \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ -3 & -2 & -1 & 1 & 0 \\ -4 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Фундаментальная система решений получается приданием свободным неизвестным — x_4 и x_5 — значений сначала $1; 0$ и затем $0; 1$ соответственно.

3.5.4. Множество решений совместной системы линейных уравнений

Пусть $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ — произвольная совместная система линейных уравнений. Рассмотрим однородную систему линейных уравнений $\boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{o}$; будем говорить, что эта система *соответствует* исходной неоднородной системе. Обозначим через $\boldsymbol{X}$ общее решение неоднородной системы, а через $\boldsymbol{Y}$ — общее решение однородной системы. Зафиксируем также одно решение $\boldsymbol{z}$ неоднородной системы. Тогда $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{Y}$, т.е. $\boldsymbol{X}$ является линейным многообразием с направляющим подпространством $\boldsymbol{Y}$ — пространством решений соответствующей системы линейных уравнений и вектором сдвига $\boldsymbol{z}$ — частным решением исходной системы. В самом деле, если $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{Y}$, то $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y}) = \boldsymbol{Az} + \boldsymbol{Ay} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{b}$, т.е. $\boldsymbol{z} + \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{X}$. Обратно, если $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{X}$, то $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, и поскольку $\boldsymbol{Az} = \boldsymbol{b}$, имеем $\boldsymbol{Ax} - \boldsymbol{Az} = \boldsymbol{o}$, откуда $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{o}$, т.е. $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Y}$ и $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{z} + \boldsymbol{Y}$.

Пример. Найти многообразие решений неоднородной системы линейных уравнений, рассмотренной в примере 1 п. 0.3.2.

Решение. Общее решение этой системы имеет вид

$$\begin{cases} x_3 = 1 - 3x_1 - 4x_2; \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

Частное решение (получаемое при $x_1 = x_2 = 0$)—$\boldsymbol{z} = (1, 0, 0, 1)$. Общее решение соответствующей однородной системы может быть получено так: в выкладках решения исходной системы заменяем x_i на y_i и отбрасываем столбец свободных членов (поскольку в однородной системе он нулевой). Тогда приходим к общему решению

$$\begin{cases} y_3 = -3y_1 - 4y_2; \\ y_4 = 0, \end{cases}$$

из которого находим фундаментальную систему решений $\boldsymbol{f}_1 = (1, 0, -3, 0)$ и $\boldsymbol{f}_2 = (0, 1, -4, 0)$. Линейное многообразие всех решений рассматриваемой неоднородной системы имеет вид $\boldsymbol{z} + \langle \boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2 \rangle$. Произвольный вектор из этого многообразия имеет вид $\boldsymbol{z} + \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2$, где α_1, α_2 — произвольные числа. Если расписать его по координатам, то мы придем к общему решению неоднородной системы, записанному в следующем виде:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha_1; \\ x_2 = \alpha_2; \\ x_3 = 1 - 3\alpha_1 - 4\alpha_2; \\ x_4 = 1. \end{cases}$$

3.5.5. Использование систем линейных уравнений для решения задач о линейных подпространствах

1. Найти систему линейных уравнений, для которой пространство решений совпадает с линейным подпространством $\boldsymbol{U}$, порожденным векторами $(1, 0, 0, 1)$ и $(1, -1, 1, -1)$.

Решение. Произвольное однородное линейное уравнение, для которого данные векторы являются решениями, имеет вид $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 + \alpha_4 x_4 = 0$. Подставляя вместо x_1, x_2, x_3, x_4 компоненты данных векторов, получаем однородную систему линейных уравнений относительно $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$:

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_4 = 0; \\ \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3 - \alpha_4 = 0. \end{cases}$$

Находим общее решение и фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} \alpha_1 = -\alpha_4; \\ \alpha_2 = \alpha_3 - 2\alpha_4, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений с найденными коэффициентами:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 0; \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = 0. \end{cases} \tag{3.12}$$

Из доказательства предложения 3.5.3 следует, что $\boldsymbol{U}$ является ее пространством решений. Таким образом, требуемая система уравнений построена.

2. Найти базисы и размерности суммы и пересечения линейных подпространств $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$ и $\boldsymbol{W} = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$, если $\boldsymbol{u}_1 = (1,2,1,2)$, $\boldsymbol{u}_2 = (2,1,2,1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (1,1,1,2)$ и $\boldsymbol{w}_1 = (1,0,2,0)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1,2,1,3)$.

Решение. Так как $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$ согласно сказанному в п. 3.3.2, чтобы найти базис $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$, достаточно выделить максимальную линейно независимую подсистему системы векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$. Для этого применим алгоритм, описанный в п. 3.2.1. Выпишем компоненты векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ в столбцы и приведем полученную матрицу к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 3 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Мы видим, что векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1$ образуют базис линейного пространства $\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$, а $\boldsymbol{w}_2 = \frac{2}{3}\boldsymbol{u}_1 - \frac{1}{3}\boldsymbol{u}_2 + \boldsymbol{u}_3$. Кроме того, векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$ образуют базис $\boldsymbol{U}$, так как они линейно независимы. Линейная независимость $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$ легко усматривается непосредственно. Таким образом,

$$\mathsf{dim}(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}) = \mathsf{dim}\boldsymbol{U} + \mathsf{dim}\boldsymbol{W} - \mathsf{dim}(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}) = 1,$$

и базис $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$ состоит из одного вектора. В качестве такого вектора можно взять, например, $\boldsymbol{w}_2$, поскольку этот вектор принадлежит и $\boldsymbol{W}$, и $\boldsymbol{U}$ в силу отмеченного выше равенства, дающего его разложение по векторам $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3$.

3.5.6. Использование систем линейных уравнений для решения задач о линейных многообразиях

1. Найти систему линейных уравнений, для которой многообразие решений совпадает с данным линейным многообразием $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$, где $\boldsymbol{a} = (4, 3, 2, 3)$; $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2 \rangle$; $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 0, 1)$; $\boldsymbol{u}_2 = (1, -1, 1, -1)$.

Решение. Сначала найдем однородную систему линейных уравнений, задающую линейное подпространство $\boldsymbol{U}$. Это сделано при решении примера 1 в п. 3.5.5: система (3.12) имеет $\boldsymbol{U}$ в качестве пространства решений. Подставим в левые части каждого уравнения координаты вектора $\boldsymbol{a}$ вместо неизвестных; получим числа $5; -7$. Рассмотрим систему линейных уравнений, полученную из (3.12) заменой свободного члена в каждом уравнении полученным из этого уравнения числом:

$$\begin{cases} x_2 + x_3 = 5; \\ -x_1 - 2x_2 + x_4 = -7. \end{cases} \tag{3.13}$$

Система линейных уравнений (3.13) имеет в качестве частного решения вектор $\boldsymbol{a}$; соответствующая ей однородная система имеет пространство решений $\boldsymbol{U}$. Следовательно, многообразие решений системы (3.13) совпадает с $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$, и требуемая система линейных уравнений построена.

2. Найти композит и пересечение линейных многообразий $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{W}$, если $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3 \rangle$, $\boldsymbol{W} = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \rangle$, $\boldsymbol{a} = (4, 3, 2, 3, 2)$, $\boldsymbol{u}_1 = (1, 0, 1, 0, 1)$, $\boldsymbol{u}_2 = (0, 1, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{u}_3 = (2, 1, 0, 1, 1)$, $\boldsymbol{b} = (1, 2, 0, 3, 0)$, $\boldsymbol{w}_1 = (-1, 1, -1, 1, 0)$, $\boldsymbol{w}_2 = (1, 0, 0, 1, 1)$.

Решение. Чтобы найти вектор из $\boldsymbol{L} \cap \boldsymbol{M}$, приравняем вектор в общем виде из $\boldsymbol{L}$ вектору из $\boldsymbol{M}$:

$$\boldsymbol{a} + \alpha_1 \boldsymbol{u}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{u}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{b} + \beta_1 \boldsymbol{w}_1 + \beta_2 \boldsymbol{w}_2. \tag{3.14}$$

Если равенство (3.14) выполняется при некоторых значениях α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, то мы получим вектор из пересечения $\boldsymbol{L} \cap \boldsymbol{M}$. Если же таких значений нет, то пересечение $\boldsymbol{L} \cap \boldsymbol{M}$ есть пустое множество. Перенесем в (3.14) вектор $\boldsymbol{a}$ в правую часть и распишем полученное равенство по координатам:

$$\begin{cases} \alpha_1 + 2\alpha_3 = -\beta_1 + \beta_2 - 3; \\ \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 - 1; \\ \alpha_1 = -\beta_1 - 2; \\ \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_1 + \beta_2; \\ \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \beta_2 - 2. \end{cases} \tag{3.15}$$

Выпишем расширенную матрицу полученной системы линейных уравнений, не перенося слагаемые, содержащие β_1, β_2, в левую часть, и приведем полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \end{array}\right) \sim \tag{3.16}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right). \tag{3.17}$$

Записывая систему линейных уравнений по последней матрице, получим

$$\left\{ \begin{aligned} \alpha_1 &= -\beta_1 - 2; \\ \alpha_2 &= \beta_1; \\ \alpha_3 &= -1; \\ 0 &= \beta_2 + 1. \end{aligned} \right.$$

Придавая β_1 значение 0, приходим к следующему решению системы (3.15): $\alpha_1 = -2$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = -1$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = -1$. Подставляя эти значения в равенство (3.14), получаем $\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{w}_2$. Вычисляя левую (и для проверки вычислений правую) часть последнего равенства, находим вектор $= (0, 2, 0, 2, -1)$ из $\boldsymbol{L} \cap \boldsymbol{M}$. Согласно предложению 3.4.2 имеем $\boldsymbol{L} \cap \boldsymbol{M} = \boldsymbol{c} + (\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})$. Для нахождения пересечения линейных подпространств можно использовать способ, изложенный выше при решении примера 2 из п. 3.5.5. Найдем базис $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W}$. Выпишем в столбцы координаты векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2$; получим часть матрицы (3.16) — первые пять столбцов. Эта матрица уже приведена выше к ступенчатому виду, см. (3.17). Мы видим, что векторы $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2$ линейно независимы и образуют базис $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W}$. Кроме того, $\boldsymbol{w}_1 = -\boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$. Вычисляя размерность $\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{W}$, видим, что она равна 1. Следовательно, $\boldsymbol{U}\cap\boldsymbol{W} = \langle \boldsymbol{w}_1\rangle$ и

$$\boldsymbol{L}\cap\boldsymbol{M} = \boldsymbol{c} + \langle \boldsymbol{w}_1\rangle.$$

Так как $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}\in\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W}$, имеем согласно предложению 3.4.3

$$\langle\!\langle \boldsymbol{L}, \boldsymbol{M}\rangle\!\rangle = \boldsymbol{a} + (\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{a} + \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{u}_3, \boldsymbol{w}_2\rangle.$$

3. Параллельны ли плоскости $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{b}+\boldsymbol{W}$, где $\boldsymbol{a} = (1,-1,2,-1)$; $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2\rangle$; $\boldsymbol{u}_1 = (1,1,1,1)$; $\boldsymbol{u}_2 = (1,0,1,0)$, $\boldsymbol{b} = (0,-3,-1,-5)$; $\boldsymbol{W} = \langle \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2\rangle$; $\boldsymbol{w}_1 = (1,2,1,2)$; $\boldsymbol{w}_2 = (2,1,2,1)$?

Решение. Выделим максимальную линейно независимую подсистему из векторов $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2, \boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что вектор $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ не выражается линейно через $\boldsymbol{u}_1, \boldsymbol{u}_2$, а $\boldsymbol{w}_1 = 2\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{u}_2$, $\boldsymbol{w}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}_2$. Из двух последних равенств легко получить выражения $\boldsymbol{u}_1 = \frac{1}{3}(\boldsymbol{w}_1+\boldsymbol{w}_2)$, $\boldsymbol{u}_2 = \frac{1}{3}(-\boldsymbol{w}_1+2\boldsymbol{w}_2)$. Таким образом, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{W}$, откуда следует, что $\boldsymbol{L}\cap\boldsymbol{M} = \emptyset$. Итак, плоскости $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{M}$ параллельны.

Задачи: [17], №135–170.

Глава 4

Линейные отображения и линейные операторы

Понятия линейного отображения и линейного оператора играют важную роль в линейной алгебре. В этой главе рассматриваются основные вопросы, связанные с указанными понятиями в произвольном конечномерном линейном пространстве над числовым полем. В §5.2 главы 5 изучаются линейные отображения и операторы линейных пространств над полями соответственно вещественных и комплексных чисел, снабженных дополнительной структурой—скалярным произведением.

§ 4.1. Линейные отображения

Всюду в этом параграфе предполагаются зафиксированными конечномерные линейные пространства $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ над числовым полем $\mathbb{F}$. Напомним, что нулевой вектор пространства $\boldsymbol{V}$ [соответственно $\boldsymbol{W}$] обозначается через $\boldsymbol{o}_V$ [соответственно $\boldsymbol{o}_W$].

4.1.1. Понятие линейного отображения. Матрица линейного отображения

Отображение $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ в линейное пространство $\boldsymbol{W}$ называется *линейным отображением* [*гомоморфизмом*, или *морфизмом*], если выполняются следующие условия: для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ и любого $\alpha \in \mathbb{F}$ справедливы равенства

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y}); \tag{4.1}$$

$$\mathcal{A}(\alpha \boldsymbol{x}) = \alpha \mathcal{A}(\boldsymbol{x}). \tag{4.2}$$

Свойство (4.1) называется *аддитивностью* линейного отображения, а свойство (4.2) — его *однородностью*. Читателю предлагается убедиться с помощью этих свойств, что для любых векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k \in \boldsymbol{V}$ и любых скаляров $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{F}$ справедлива следующая формула:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k) = \alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \alpha_k \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_k). \tag{4.3}$$

Кроме того, из (4.2) вытекает, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{o}_V) = \boldsymbol{o}_W$.

Рассмотрим примеры линейных отображений.

1. Всякий изоморфизм линейных пространств (см. п. 3.2.4) является линейным отображением. В частности, тождественное отображение любого линейного пространства на себя является линейным отображением. Оно называется *единичным оператором* данного пространства.

2. Пусть $\boldsymbol{V} = \mathbb{F}^n$, $\boldsymbol{W} = \mathbb{F}^m$ — пространства столбцов и $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{m \times n}$ — произвольная матрица размеров $m \times n$. Для любого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ положим $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}$. Тогда по правилам умножения матриц $\mathcal{A}(\boldsymbol{v})$ имеет размеры $m \times 1$, т.е. $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) \in \mathbb{F}^m$. Таким образом, $\mathcal{A}$ является отображением множества $\boldsymbol{V}$ в $\boldsymbol{W}$. Его аддитивность и однородность следуют из правил действий с матрицами (см. п. 1.1.2).

3. Пусть $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ совпадают с линейным пространством векторов на плоскости, а отображение $\mathcal{A}$ сопоставляет каждому ненулевому вектору $\vec{a}$ вектор, полученный из него поворотом против часовой стрелки на фиксированный угол φ, а нулевому вектору — нулевой вектор. Линейность проверяется непосредственно с использованием правил сложения векторов и умножения вектора на число (см. п. 2.1.2).

4. *Нулевое* линейное отображение. Оно переводит каждый вектор линейного пространства $\boldsymbol{V}$ в нулевой вектор пространства $\boldsymbol{W}$. Линейность этого отображения очевидна.

Следующее утверждение показывает, что любое линейное отображение из $\boldsymbol{V}$ в $\boldsymbol{W}$ однозначно определяется образами векторов каждого базиса $\boldsymbol{V}$.

Предложение 4.1.1. *Пусть* $\mathrm{N} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ *— фиксированный базис пространства* $\boldsymbol{V}$. *Для любой системы векторов* $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$ *пространства* $\boldsymbol{W}$ *существует единственное линейное отображение* $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$, *для которого* $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{w}_i$ *при* $i = 1, \ldots, n$.

Доказательство. Докажем существование линейного отображения $\mathcal{A}$. Возьмем произвольный вектор $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ и разложим его по базису N: $\boldsymbol{v} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$. Положим $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{w}_n$. Так как координаты вектора в базисе определены однозначно, отображение $\mathcal{A}$ определено корректно. Его линейность следует из теоремы 3.2.3, поскольку столбец координат суммы векторов равен сумме столбцов координат, и аналогичное свойство имеет место для произведения вектора на скаляр.

Чтобы установить однозначность, предположим, что линейное отображение $\mathcal{B}$ также обладает свойством $\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_i) = \boldsymbol{w}_i$ при $i = 1, \ldots, n$, и докажем, что $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Мы должны проверить, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{v})$ для любого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Разлагая $\boldsymbol{v}$ по базису N, как это сделано в предыдущем абзаце, находим образ $\mathcal{A}(\boldsymbol{v})$. Для нахождения $\mathcal{B}(\boldsymbol{v})$ воспользуемся формулой (4.3) применительно к линейному отображению $\mathcal{B}$ и вектору $\boldsymbol{v}$:

$$\begin{gathered}\mathcal{B}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{B}(\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n) = \\ = \alpha_1\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + \alpha_n\mathcal{B}(\boldsymbol{e}_n) = \alpha_1\boldsymbol{w}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{w}_n = \mathcal{A}(\boldsymbol{v}).\end{gathered}$$

Таким образом, $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{B}(\boldsymbol{v})$. □

Зафиксируем линейное отображение $\mathcal{A}$ пространства $\boldsymbol{V}$ на $\boldsymbol{W}$. Зафиксируем также базис $\mathrm{N} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ пространства $\boldsymbol{V}$ и базис $\mathrm{M} = (\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_m)$ пространства $\boldsymbol{W}$. Разложим образ каждого вектора базиса N при отображении $\mathcal{A}$ по базису M:

$$\begin{gathered}
\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1) = \alpha_{11}\boldsymbol{f}_1 + \alpha_{21}\boldsymbol{f}_2 + \ldots + \alpha_{m1}\boldsymbol{f}_m; \\
\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2) = \alpha_{12}\boldsymbol{f}_1 + \alpha_{22}\boldsymbol{f}_2 + \ldots + \alpha_{m2}\boldsymbol{f}_m; \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_n) = \alpha_{1n}\boldsymbol{f}_1 + \alpha_{2n}\boldsymbol{f}_2 + \ldots + \alpha_{mn}\boldsymbol{f}_m.
\end{gathered} \tag{4.4}$$

Мы получили *матрицу* линейного отображения $\mathcal{A}$ *в базисах* N, M:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{m1} & \alpha_{m2} & \ldots & \alpha_{mn} \end{pmatrix}.$$

Она составлена из столбцов координат в базисе M пространства $\boldsymbol{W}$ образов векторов базиса N пространства $\boldsymbol{V}$ при отображении $\mathcal{A}$. Полезным также является обозначение $\mathcal{A} \underset{\mathrm{M},\mathrm{N}}{\leftrightarrow} \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}}$.

В матричном виде определение матрицы линейного отображения (4.4) дается одним равенством

$$\mathcal{A}(\mathrm{N}) = \mathrm{M}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}}. \tag{4.5}$$

Рассмотрим произвольный вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Разложим его по базису N: $\boldsymbol{x} = \mathrm{N}[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{N}}$. Найдем $\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$. Из линейности отображения $\mathcal{A}$ и (4.3) легко следует равенство $\mathcal{A}(\mathrm{N}[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{N}}) = (\mathcal{A}(\mathrm{N}))[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{N}}$. Используя последнее равенство, в соответствии с утверждением 2) предложения 3.2.6 получаем

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = (\mathcal{A}(\mathrm{N}))[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{N}} = (\mathrm{M}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}})[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{N}} = \mathrm{M}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}}[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{N}}).$$

Таким образом, столбец координат образа вектора $\boldsymbol{x}$ при линейном отображении $\mathcal{A}$ в базисе M дается формулой

$$[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{A}_{\mathbf{N},\mathbf{M}}[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{N}}. \tag{4.6}$$

Укажем матрицы линейных отображений, рассмотренных выше в качестве примеров; читателю предлагается проверить каждое из высказанных ниже утверждений.

Матрица изоморфизма $\mathcal{I} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ в подходящих базисах является единичной; при этом в пространстве $\boldsymbol{V}$ базис можно выбрать произвольным образом, а в $\boldsymbol{W}$ в качестве базиса тогда нужно взять образы базисных векторов этого базиса при изоморфизме $\mathcal{I}$ (то, что при этом действительно получается базис $\boldsymbol{W}$, обеспечивается утверждением 3) предложения 3.2.7).

Матрица нулевого отображения в любых базисах является нулевой.

Матрица линейного отображения пространства столбцов $\mathbb{F}^n$ в $\mathbb{F}^m$, рассмотренного во втором примере, совпадает с матрицей $\boldsymbol{A}$, если выбрать в $\mathbb{F}^n$ и $\mathbb{F}^m$ базисы, состоящие из столбцов единичных матриц $\boldsymbol{E}_n$ и $\boldsymbol{E}_m$ соответственно.

Матрица поворота векторов плоскости на угол φ в совпадающих ортонормированных базисах имеет вид $\begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

Ясно, что матрица линейного отображения зависит от выбора базисов N, M в пространствах $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{W}$. Найдем связь между матрицами одного и того же отображения в различных базисах. Пусть N, N' — базисы пространства V и M, M' — базисы пространства $\boldsymbol{W}$. Обозначим через $\boldsymbol{T}_{\mathbf{N},\mathbf{N}'}$ матрицу перехода от базиса N к базису N', а через $\boldsymbol{T}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$ — матрицу перехода от базиса M к базису M'. По определению матрицы перехода (см. п. 3.1.4) имеем $\mathrm{N}' = \mathrm{N}\boldsymbol{T}_{\mathbf{N},\mathbf{N}'}$, $\mathrm{M}' = \mathrm{M}\boldsymbol{T}_{\mathbf{M},\mathbf{M}'}$. По определению матрицы линейного отображения получаем равенства $\mathcal{A}(\mathrm{N}) = \mathrm{M}\boldsymbol{A}_{\mathbf{N},\mathbf{M}}$ и $\mathcal{A}(\mathrm{N}') = \mathrm{M}'\boldsymbol{A}_{\mathbf{N}',\mathbf{M}'}$. Имеем

$$\mathcal{A}(\mathrm{N}') = \mathcal{A}(\mathrm{N}\boldsymbol{T}_{\mathbf{N},\mathbf{N}'}) = \mathcal{A}(\mathrm{N})\boldsymbol{T}_{\mathbf{N},\mathbf{N}'} =$$

$$= (\mathrm{M}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}})\boldsymbol{T}_{\mathrm{N},\mathrm{N}'} = \mathrm{M}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{N},\mathrm{N}'}).$$

С другой стороны,

$$\mathcal{A}(\mathrm{N}') = \mathrm{M}'\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}',\mathrm{M}'} = (\mathrm{M}\boldsymbol{T}_{\mathrm{M},\mathrm{M}'})\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}',\mathrm{M}'} = \mathrm{M}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{M},\mathrm{M}'}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}',\mathrm{M}'}).$$

Мы видим, что $\mathrm{M}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{N},\mathrm{N}'}) = \mathrm{M}(\boldsymbol{T}_{\mathrm{M},\mathrm{M}'}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}',\mathrm{M}'})$, откуда

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{N},\mathrm{N}'} = \boldsymbol{T}_{\mathrm{M},\mathrm{M}'}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}',\mathrm{M}'}.$$

Так как матрица $\boldsymbol{T}_{\mathrm{M},\mathrm{M}'}$ обратима, получаем формулу, связывающую матрицы одного и того же линейного отображения в разных базисах:

$$\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}',\mathrm{M}'} = \boldsymbol{T}^{-1}_{\mathrm{M},\mathrm{M}'}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}}\boldsymbol{T}_{\mathrm{N},\mathrm{N}'}. \tag{4.7}$$

4.1.2. Образ и ядро линейного отображения

Зафиксируем линейное отображение $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ на линейное пространство $\boldsymbol{W}$. Образ $\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ называется *образом* линейного отображения $\mathcal{A}$. Это множество обозначается также через $\mathsf{Im}\mathcal{A}$. Множество $\{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \mid \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}_W\}$ называется *ядром* отображения $\mathcal{A}$ и обозначается через $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$ или через $\mathsf{Ker}\mathcal{A}$.

Предложение 4.1.2. *Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ — линейное отображение. Тогда $\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ и $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$ являются линейными подпространствами, и для любого базиса* N *пространства $\boldsymbol{V}$ имеет место равенство $\mathcal{A}(\boldsymbol{V}) = \langle\mathcal{A}(\mathrm{N})\rangle$. $\mathcal{A}$ инъективно тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}} = \{\boldsymbol{o}\}$.*

Доказательство. Проверим, что образ $\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ является линейным подпространством пространства $\boldsymbol{W}$. Пусть $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$. Тогда найдутся такие $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}$, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1) = \boldsymbol{w}_1$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_2$. Согласно равенству (4.1) $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$, откуда $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$. Аналогично проверяется, что для любого $\alpha \in \mathbb{F}$ имеет место включение $\alpha\boldsymbol{w}_1 \in \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$.

Ядро линейного отображения является линейным пространством, поскольку $\boldsymbol{o}_W + \boldsymbol{o}_W = \boldsymbol{o}_W$ и $\alpha\boldsymbol{o}_W = \boldsymbol{o}_W$ для любого $\alpha \in \mathbb{F}$.

Пусть $\mathrm{N} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n)$ — некоторый базис $\boldsymbol{V}$. Так как $\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ — линейное подпространство и $\mathcal{A}(\mathrm{N}) \subseteq \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$, заключаем, что $\langle\mathcal{A}(\mathrm{N})\rangle \subseteq \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$. Для доказательства обратного включения зафиксируем $\boldsymbol{y} \in \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$. Существует $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ такой что $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}(\boldsymbol{x})$. Разлагая $\boldsymbol{x}$ по базису N, получаем $\boldsymbol{x} = \alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_n\boldsymbol{e}_n$. Пользуясь равенством (4.3) применительно к этому разложению, констатируем, что $\boldsymbol{y} = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) \in \langle\mathcal{A}(\mathrm{N})\rangle$.

Предположим, что линейное отображение $\mathcal{A}$ инъективно. Так как $\mathcal{A}(\boldsymbol{o}_V) = \boldsymbol{o}_W$, имеем $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}} = \{\boldsymbol{o}_V\}$. Обратно, пусть $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}} = \{\boldsymbol{o}_V\}$. Покажем, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1) = \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_2)$ влечет за собой $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$ для любых $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}$. Имеем $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1) - \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{o}_W$, откуда $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{o}_W$ и $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$. Таким образом, $\boldsymbol{v}_1 - \boldsymbol{v}_2 = \boldsymbol{o}_V$, и потому $\boldsymbol{v}_1 = \boldsymbol{v}_2$. $\square$

Из этого предложения непосредственно вытекает такое утверждение.

Следствие 4.1.1. *Линейное отображение $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ является изоморфизмом тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}} = \{\boldsymbol{o}_V\}$ и $\mathcal{A}(\boldsymbol{V}) = \boldsymbol{W}$.*

Рангом $\mathsf{r}(\mathcal{A})$ линейного отображения $\mathcal{A}$ называется размерность его образа, т.е. $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = \mathsf{dim}\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$. *Дефектом* $\mathsf{d}(\mathcal{A})$ линейного отображения $\mathcal{A}$ называется размерность его ядра, т.е. $\mathsf{d}(\mathcal{A}) = \mathsf{dim}\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$.

Теорема 4.1.1. *Для любого линейного отображения $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ имеет место равенство $\mathsf{r}(\mathcal{A}) + \mathsf{d}(\mathcal{A}) = \mathsf{dim}\boldsymbol{V}$. Для любых базисов* **N, M** *пространств* $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}$ *справедливо равенство* $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{N},\mathbf{M}})$.

Доказательство. Зафиксируем базис $\mathbf{K} = (\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_r)$ образа $\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ и базис $\mathbf{L} = (\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d)$ ядра $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$. Найдем векторы $\boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r \in \boldsymbol{V}$, такие, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{f}_i) = \boldsymbol{g}_i$ для $i = 1, \ldots, r$. Покажем, что $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r$ есть базис $\boldsymbol{V}$. Отсюда будет следовать первое утверждение теоремы.

Убедимся, что $\boldsymbol{V} = \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r \rangle$. Пусть $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Тогда $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) \in \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$. Разложим $\mathcal{A}(v)$ по базису K:$\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \alpha_1 \boldsymbol{g}_1 + \ldots + \alpha_r \boldsymbol{g}_r$. Положим $\boldsymbol{u} = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \alpha_r \boldsymbol{f}_r$. Тогда $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{u})$ и $\mathcal{A}(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}_W$. Следовательно, $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$. Разложим вектор $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u}$ по базису $\mathbf{L}$: $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{u} = \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \beta_d \boldsymbol{e}_d$. Таким образом,

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \beta_d \boldsymbol{e}_d = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \alpha_r \boldsymbol{f}_r + \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \beta_d \boldsymbol{e}_d,$$

и $\boldsymbol{v} \in \langle \boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r \rangle$.

Покажем, что система векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r$ линейно независима. Пусть

$$\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_d \boldsymbol{e}_d + \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots + \beta_r \boldsymbol{f}_r = \boldsymbol{o}_V. \tag{4.8}$$

Тогда $\mathcal{A}(\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_d \boldsymbol{e}_d + \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \ldots \beta_r \boldsymbol{f}_r) = \boldsymbol{o}_W$. В силу (4.3) получаем $\alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1) + \ldots + \alpha_d \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_d) + \beta_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{f}_1) + \ldots + \beta_r \mathcal{A}(\boldsymbol{f}_r) = \boldsymbol{o}_W$. Так как $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d \in \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$, из последнего равенства следует, что $\beta_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{f}_1) + \ldots + \beta_r \mathcal{A}(\boldsymbol{f}_r) = \boldsymbol{o}_W$. Поскольку $\mathcal{A}(\boldsymbol{f}_i) = \boldsymbol{g}_i$ для $i = 1, \ldots, r$, имеем $\beta_1 \boldsymbol{g}_1 + \ldots + \beta_r \boldsymbol{g}_r = \boldsymbol{o}_W$. Векторы $\boldsymbol{g}_1, \ldots, \boldsymbol{g}_r$ линейно независимы, ибо они образуют базис подпространства $\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$. Таким образом, $\beta_1 = \ldots = \beta_r = 0$, и из (4.8) следует, что $\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \ldots + \alpha_d \boldsymbol{e}_d = \boldsymbol{o}_V$. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d$ также линейно независимы (они образуют базис подпространства $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$). Итак, $\alpha_1 = \ldots = \alpha_d = 0$. Линейная независимость системы векторов $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_d, \boldsymbol{f}_1, \ldots, \boldsymbol{f}_r$ доказана. Вместе с тем доказано первое утверждение теоремы.

Для доказательства второго утверждения зафиксируем базис N пространства $\boldsymbol{V}$ и базис M пространства $\boldsymbol{W}$. Согласно предложению 4.1.2 имеем $\mathcal{A}(\boldsymbol{V}) = \langle \mathcal{A}(\mathrm{N}) \rangle$. Следовательно, $\mathsf{r}(\mathcal{A}) = \mathsf{r}(\mathcal{A}(\mathrm{N}))$. Столбцы координат векторов системы $\mathcal{A}(\mathrm{N})$ в базисе $\mathbf{M}$ суть в точности столбцы матрицы $\boldsymbol{A}_{\mathbf{N},\mathbf{M}}$. Так как линейное пространство $\boldsymbol{W}$ изоморфно пространству столбцов координат векторов этого пространства в базисе $\mathbf{M}$ согласно теореме

3.2.4, в силу утверждений 1) и 2) предложения 3.2.8 ранг системы векторов $\mathcal{A}(\mathrm{N})$ равен рангу системы образов этих векторов при изоморфизме, т.е. равен столбцовому рангу матрицы $\boldsymbol{A}_{\mathbf{N},\mathbf{M}}$. Применение теоремы 3.2.2 завершает доказательство. □

Часто приходится находить базисы образа и ядра по заданной матрице $\boldsymbol{A}_{\mathbf{N},\mathbf{M}}$ линейного отображения $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$. При этом находятся координаты базисных векторов образа в базисе $\mathbf{M}$ пространства $\boldsymbol{W}$ и координаты базисных векторов ядра в базисе $\mathbf{N}$ пространства $\boldsymbol{V}$. На конкретном примере рассмотрим два способа нахождения базисов образа и ядра. Пусть в некоторых базисах $\mathbf{N}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ и $\mathbf{M}$ линейного пространства $\boldsymbol{W}$ матрица линейного отображения $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ имеет вид

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первый способ состоит в выделении максимальной линейно независимой подсистемы столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$ с помощью элементарных преобразований строк. Одновременно с помощью тех же преобразований решается однородная система линейных уравнений $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{o}$, пространство решений которой состоит из столбцов координат векторов ядра отображения $\mathcal{A}$ в силу формулы (4.6). Имеем

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы видим, что первые три столбца матрицы $\boldsymbol{A}$ образуют максимальную линейно независимую подсистему столбцов. Базис образа $\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ состоит из векторов, имеющих в базисе $\mathbf{M}$ пространства $\boldsymbol{W}$ координаты $(2,1,1,0)$, $(1,2,1,1)$, $(2,1,1,1)$. Чтобы найти базис ядра, запишем общее решение однородной системы линейных уравнений $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{o}$ по последней матрице и найдем фундаментальную систему решений:

$$\left\{\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2+x_4+3x_5=0, \\ x_3-3x_5=0; \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{l} x_1=0, \\ x_2=-x_4-3x_5, \\ x_3=3x_5; \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

В качестве базиса ядра отображения $\mathcal{A}$ можно взять два вектора, имеющие в базисе $\mathbf{N}$ пространства $\boldsymbol{V}$ координаты $(0,-1,0,1,0)$ и $(0,-3,3,0,1)$ соответственно.

Второй способ отыскания базиса ядра и образа $\mathcal{A}$ состоит в следующем. Выпишем строки координат векторов базиса $\mathbf{N}$ пространства $\boldsymbol{V}$ (это в точности будут строки единичной матрицы порядка 5) и припишем к ним строки координат образов этих векторов при отображении $\mathcal{A}$ в базисе пространства $\boldsymbol{W}$ (это в точности столбцы координат матрицы $\boldsymbol{A}$). Таким образом, к матрице $\boldsymbol{E}_5$ приписывается транспонированная матрица $\boldsymbol{A}^{\top}$. В полученной матрице производим элементарные преобразования над строками, приводя транспонированную матрицу $\boldsymbol{A}$ к ступенчатому виду.

$$\left(\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|rrrr} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 9 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|rrrr} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 & 0 & 0 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 3 & 3 & -3 & 0 & 1 & 0 & 9 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrrrr|rrrr} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -2 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Ненулевые строки матрицы справа от вертикальной черты после преобразований дают координаты векторов базиса образа $\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ в базисе $\mathbf{M}$ пространства $\boldsymbol{W}$, так как их система линейно эквивалентна системе столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$, записанных в виде строк. Строки матрицы слева от вертикальной черты, имеющие нулевые продолжения справа, дают координаты векторов базиса ядра отображения $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{N}$ пространства $\boldsymbol{V}$. В самом деле, они линейно независимы, так как строки единичной матрицы линейно независимы и любая система строк, полученных из них элементарными преобразованиями, также будет линейно независима. Число этих строк равно $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} - \mathsf{r}(\mathcal{A})$, т.е. равно размерности ядра. Наконец, легко убедиться, что эти строки принадлежат ядру. Таким образом, указанные строки могут быть взяты в качестве координат векторов некоторого базиса ядра $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$.

Описанный способ нахождения образа и ядра линейного отображения особенно удобен для отыскания жорданова базиса линейного оператора и жордановой нормальной формы квадратной матрицы.

4.1.3. Действия с линейными отображениями

Множество всех линейных отображений линейного пространства $\boldsymbol{V}$ в линейное пространство $\boldsymbol{W}$ обозначим через $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$. Пусть $\mathcal{A},\mathcal{B} \in \mathsf{Hom}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$, $\gamma \in \mathbb{F}$. Определим отображения $\mathcal{C},\mathcal{D} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ следующим образом: для любого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ положим $\mathcal{C}(\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) + \mathcal{B}(\boldsymbol{v})$ и $\mathcal{D}(\boldsymbol{v}) = \gamma\mathcal{A}(\boldsymbol{v})$. Убедимся, что $\mathcal{C}$ и $\mathcal{D}$ являются линейными отображениями. Проверим аддитивность $\mathcal{C}$; его однородность, равно как и аддитивность и однородность $\mathcal{D}$, проверяются сходным образом. Пусть $\boldsymbol{v}_1,\boldsymbol{v}_2 \in \boldsymbol{V}$. Имеем

$$\begin{gathered}\mathcal{C}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) = \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) + \mathcal{B}(\boldsymbol{v}_1+\boldsymbol{v}_2) = \\ = \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1) + \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_2) + \mathcal{B}(\boldsymbol{v}_1) + \mathcal{B}(\boldsymbol{v}_2) = \\ = \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1) + \mathcal{B}(\boldsymbol{v}_1) + \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_2) + \mathcal{B}(\boldsymbol{v}_2) = \mathcal{C}(\boldsymbol{v}_1) + \mathcal{C}(\boldsymbol{v}_2),\end{gathered}$$

что и требуется. Будем обозначать линейное отображение $\mathcal{C}$ через $\mathcal{A}+\mathcal{B}$ и называть *суммой* линейных отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$, а отображение $\mathcal{D}$ — обозначать через $\gamma\mathcal{A}$ и называть *произведением* линейного отображения $\mathcal{A}$ на скаляр γ. Таким образом, на множестве всех линейных отображений $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ определены операции сложения и умножения на скаляр.

Теорема 4.1.2. *Множество $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ является линейным пространством над полем $\mathbb{F}$ относительно введенных операций, изоморфным линейному пространству матриц $\mathbb{F}^{\mathsf{dim}\boldsymbol{W}\times\mathsf{dim}\boldsymbol{V}}$.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения необходимо проверить аксиомы линейного пространства для множества $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ и поля $\mathbb{F}$ (см. п. 3.1.1). Аксиомы 1) и 6) уже проверены путем определения операций над линейными отображениями. Аксиомы 2) и 3), а также 7)–10) легко проверяются с помощью определений операций над отображениями и соответствующих аксиом для линейного пространства $\boldsymbol{W}$. Нулевым вектором в пространстве $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V},\boldsymbol{W})$ является нулевое отображение $\mathcal{O}$, которое каждый вектор из $\boldsymbol{V}$ переводит в $\boldsymbol{o}_W$, так что аксиома 4) выполняется. В аксиоме 5) для произвольного $\mathcal{A} \in \mathsf{Hom}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ возьмем в качестве $\mathcal{B}$ линейное отображение $(-1)\mathcal{A}$; тогда справедливость указанной аксиомы легко устанавливается. Таким образом, $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ является линейным пространством.

Зафиксируем базисы N пространства $\boldsymbol{V}$ и M пространства $\boldsymbol{W}$. Положим $n = \mathsf{dim}\boldsymbol{V}$, $m = \mathsf{dim}\boldsymbol{W}$. Каждому $\mathcal{A} \in \mathsf{Hom}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ поставим в соответствие матрицу $\boldsymbol{A}_{\mathrm{N,M}}$, которую будем обозначать через $\varphi(\mathcal{A})$. Покажем, что φ является искомым изоморфизмом $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ на $\mathbb{F}^{m\times n}$.

Убедимся, что φ является линейным отображением. Проверим равенство $\varphi(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B})$. Имеем в соответствии с определением суммы линейных отображений и равенством (4.5) $\mathrm{M}\varphi(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = (\mathcal{A}+\mathcal{B})(\mathrm{N}) = \mathcal{A}(\mathrm{N}) + \mathcal{B}(\mathrm{N}) = \mathrm{M}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N,M}} + \mathrm{M}\boldsymbol{B}_{\mathrm{N,M}} = \mathrm{M}(\boldsymbol{A}_{\mathrm{N,M}} + \boldsymbol{B}_{\mathrm{N,M}}) = \mathrm{M}(\varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B}))$, откуда $\mathrm{M}\varphi(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \mathrm{M}(\varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B}))$. Таким образом, $\varphi(\mathcal{A}+\mathcal{B}) = \varphi(\mathcal{A}) + \varphi(\mathcal{B})$, что и требуется доказать. Равенство $\varphi(\gamma\mathcal{A}) = \gamma\varphi(\mathcal{A})$ проверяется аналогично.

Докажем, что ядро φ является нулевым пространством. Пусть $\mathcal{A} \in \mathsf{Hom}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})_{\varphi}$. Тогда $\varphi(\mathcal{A}) = \boldsymbol{O}_{m\times n}$, и образ каждого вектора из базиса N при отображении $\mathcal{A}$ является нулевым. По предложению 4.1.1 $\mathcal{A}$ совпадает с нулевым отображением.

Убедимся, что $\varphi(\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})) = \mathbb{F}^{m\times n}$. Возьмем прозвольную матрицу $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{m\times n}$. Обозначим через $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$ столбцы этой матрицы и положим $\boldsymbol{w}_1 = \mathrm{M}\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n = \mathrm{M}\boldsymbol{a}_n$. По предложению 4.1.1 существует единственное отображение $\mathcal{A} \in \mathsf{Hom}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$, которое переводит векторы базиса N соответственно в $\boldsymbol{w}_1, \ldots, \boldsymbol{w}_n$. Читателю предлагается убедиться, что матрица этого линейного отображения в базисах N, M совпадает с $\boldsymbol{A}$.

По следствию 4.1.1 отображение φ является изоморфизмом линейного пространства $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ на $\mathbb{F}^{m\times n}$. □

Рассмотрим линейные отображения $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ и $\mathcal{B} : \boldsymbol{W} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ линейных пространств $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{Z}$ над полем $\mathbb{F}$. Рассмотрим отображение $\mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B}$. Тогда для любого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ справедливо равенство $\mathcal{C}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}))$. Читателю предлагается проверить, что $\mathcal{C}$ является линейным отображением пространства $\boldsymbol{V}$ в пространство $\boldsymbol{Z}$. Оно называется *произведением* $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Зафиксируем базисы N, M, K пространств $\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W}, \boldsymbol{Z}$ соответственно. Пусть $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}}$ — матрица линейного отображения $\mathcal{A}$ в базисах N, M и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{M},\mathrm{K}}$ — матрица линейного отображения $\mathcal{B}$ в базисах M, K. Найдем матрицу $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{C}_{\mathrm{N},\mathrm{K}}$ отображения $\mathcal{C}$ в базисах N, K. Имеем $\mathrm{K}\boldsymbol{C} = \mathcal{C}(\mathrm{N}) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(\mathrm{N})) = \mathcal{B}(\mathrm{M}\boldsymbol{A}) = \mathcal{B}(\mathrm{M})\boldsymbol{A} = (\mathrm{K}\boldsymbol{B})\boldsymbol{A} = \mathrm{K}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$. Таким образом, $\mathrm{K}\boldsymbol{C} = \mathrm{K}(\boldsymbol{B}\boldsymbol{A})$, откуда в силу утверждения 1) предложения 3.2.6 следует $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{A}$. Итак,

$$\boldsymbol{C}_{\mathrm{N},\mathrm{K}} = \boldsymbol{B}_{\mathrm{M},\mathrm{K}}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N},\mathrm{M}}. \tag{4.9}$$

§ 4.2. Линейные операторы

Всюду в этом параграфе предполагается зафиксированным линейное пространство $\boldsymbol{V}$ над полем $\mathbb{F}$.

4.2.1. Понятие линейного оператора. Действия с линейными операторами

Линейным оператором на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ называется линейное отображение $\boldsymbol{V}$ в себя. Все понятия, определенные для линейных отображений, переносятся на линейные операторы. Матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ строится с помощью одного базиса N линейного пространства $\boldsymbol{V}$ и определяется в матричном виде равенством

$$\mathcal{A}(\mathrm{N}) = \mathrm{N}\boldsymbol{A}_{\mathrm{N}}. \tag{4.10}$$

При переходе к другому базису M, связанному с исходным базисом N посредством матрицы перехода $\boldsymbol{T}_{\mathrm{N},\mathrm{M}}$ (так что $\mathrm{M} =$

$= \mathbf{N}\boldsymbol{T}_{\mathbf{N},\mathbf{M}}$), матрица линейного оператора на основании формулы (4.7) изменяется следующим образом:

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{M}} = \boldsymbol{T}_{\mathbf{N},\mathbf{M}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathbf{N}}\boldsymbol{T}_{\mathbf{N},\mathbf{M}}. \tag{4.11}$$

Две квадратные матрицы $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ порядка n называются *подобными*, если найдется невырожденная матрица $\boldsymbol{S}$ того же порядка, такая, что $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$; при этом будем говорить, что матрица $\boldsymbol{S}$ *осуществляет подобие*. Мы видим, что матрицы одного и того же оператора в различных базисах подобны и матрица перехода осуществляет подобие.

Образ и ядро линейного оператора обозначаются так же, как для линейного отображения. Операции сложения и умножения на скаляр для линейных операторов превращают множество всех линейных операторов в линейное пространство, изоморфное линейному пространству всех квадратных матриц над полем $\mathbb{F}$ порядка $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}$. Будем обозначать его через $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V})$.

Важную роль будет играть в дальнейшем уже встречавшийся выше единичный оператор, который обозначается через $\mathcal{E}$. Из определения непосредственно следует, что единичный оператор в любом базисе имеет единичную матрицу.

Читателю предлагается проверить, что произведение двух линейных операторов из $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V})$ само принадлежит $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V})$. При этом на основании формулы (4.9) матрица произведения равна произведению матрицы второго сомножителя на матрицу первого.

4.2.2. Характеристический многочлен матрицы и линейного оператора

Пусть $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})$—квадратная матрица порядка n. *Характеристическим многочленом* $f_A(x)$ матрицы $\boldsymbol{A}$ называется определитель $\mathsf{det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}_n)$, где x — переменная, $\boldsymbol{E}_n$ — единичная матрица порядка n. В развернутом виде характеристический многочлен записывается так:

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix}. \tag{4.12}$$

Предложение 4.2.1. *Характеристический многочлен $f_A(x)$ матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n является многочленом степени n относительно x с коэффициентами из поля $\mathbb{F}$; в нем коэффициент при x^n равен $(-1)^n$, коэффициент при x^{n-1} равен $(-1)^{n-1}tr(\boldsymbol{A})$ и свободный член равен определителю матрицы $\boldsymbol{A}$.*

Характеристические многочлены подобных матриц равны.

Доказательство. Раскрывая определитель в левой части равенства (4.12), получаем утверждения относительно коэффициентов характеристического многочлена.

Пусть $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — подобные матрицы порядка n и $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$ для некоторой невырожденной матрицы $\boldsymbol{S}$. Так как $\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S}$, в силу теоремы 1.2.3 получаем

$$\begin{gathered} f_B(x) = \mathsf{det}(\boldsymbol{B} - x\boldsymbol{E}_n) = \mathsf{det}(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{S} - \boldsymbol{S}^{-1}(x\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{S}) = \\ = \mathsf{det}(\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}_n)\boldsymbol{S}) = \mathsf{det}(\boldsymbol{S}^{-1})\mathsf{det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}_n)\mathsf{det}(\boldsymbol{S}) = \\ = \mathsf{det}(\boldsymbol{S}^{-1})\mathsf{det}(\boldsymbol{S})\mathsf{det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}_n) = \mathsf{det}(\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{S})\mathsf{det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}_n) = \\ = \mathsf{det}(\boldsymbol{E}_n)\mathsf{det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}_n) = \mathsf{det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}_n) = f_A(x). \end{gathered}$$

Таким образом, $f_B(x) = f_A(x)$. □

Так как матрицы линейного оператора $\mathcal{A}$ в различных базисах подобны, по предложению 4.2.1 характеристические многочлены этих матриц совпадают. Указанный многочлен называется *характеристическим многочленом* линейного оператора $\mathcal{A}$ и обозначается через $f_{\mathcal{A}}(x)$. Чтобы вычислить характеристический многочлен конкретного линейного оператора, следует взять матрицу $\boldsymbol{A}$ этого оператора в каком-либо базисе и найти ее характеристический многочлен.

Рассмотрим пример. Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства $\mathbb{F}^4$ задан матрицей $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Найдем его характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(x)$ (вычитаем третью строку из первой, а четвертую прибавляем ко второй; выносим из первой и второй строки множитель $2-x$; вычитаем вторую строку, умноженную на 3, из третьей, а первую — из четвертой; вычитаем вторую строку, умноженную на 2, из четвертой; вычисляем определитель треугольной матрицы):

$$f_{\mathcal{A}}(x) =$$

$$= \begin{vmatrix} 2-x & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -x & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2-x & 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 2-x & 0 & 2-x \\ 0 & 3 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2-x & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -x \end{vmatrix} = (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (2-x)^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2-x \end{vmatrix} = (2-x)^3(-2-x) =$$

$$= (x-2)^3(x+2).$$

При вычислении характеристического многочлена указанным способом он получается разложенным на множители. Это оказывается весьма удобным, когда необходимо найти корни характеристического многочлена. В п. 4.2.4 мы увидим, что корни характеристического многочлена линейного оператора пространства $\boldsymbol{V}$ над полем $\mathbb{F}$, лежащие в $\mathbb{F}$, представляют особый интерес.

Значение многочлена $f(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_m x^m$ с коэффициентами в поле $\mathbb{F}$ от линейного оператора $\mathcal{A}$ определяется аналогично значению многочлена от матрицы:

$$f(\mathcal{A}) = \gamma_0 \mathcal{E} + \gamma_1 \mathcal{A} + \ldots + \gamma_m \mathcal{A}^m.$$

Будем говорить, что квадратная матрица $\boldsymbol{A}$ [линейный оператор $\mathcal{A}$] *аннулируется* многочленом $f(x)$, если $f(\boldsymbol{A}) = \boldsymbol{O}$ [$f(\mathcal{A}) = \mathcal{O}$].

Теорема 4.2.1. *Каждая квадратная матрица и каждый линейный оператор аннулируются своим характеристическим многочленом.*

Доказательство. Легко видеть, что утверждение теоремы относительно линейных операторов следует из утверждения относительно матриц. Пусть $\boldsymbol{A}$ — квадратная матрица порядка n, $f_A(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_n x^n$. Положим $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}_n$. Тогда $f_A(\boldsymbol{A}) = \gamma_0 \boldsymbol{E} + \gamma_1 \boldsymbol{A} + \ldots + \gamma_n \boldsymbol{A}^n$. Рассмотрим матрицу $\boldsymbol{B}(x)$, присоединенную к $\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}$. Ее элементы являются алгебраическими дополнениями к элементам матрицы $\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}$, т. е. многочленами степени не выше $n-1$. Тогда $\boldsymbol{B}(x)$ можно записать в виде $\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1 x + \ldots + \boldsymbol{B}_{n-1} x^{n-1}$, где $\boldsymbol{B}_i \in \mathbb{F}^{n \times n}$, $i = 1, \ldots, n-1$. Как доказано в теореме 1.2.4, $\boldsymbol{B}(x)(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}) = \mathsf{det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E})\boldsymbol{E} = f_A(x)\boldsymbol{E}$. Отсюда

$$(\boldsymbol{B}_0 + \boldsymbol{B}_1 x + \ldots + \boldsymbol{B}_{n-1} x^{n-1})(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}) = \gamma_0 \boldsymbol{E} + \gamma_1 x \boldsymbol{E} + \ldots + \gamma_n x^n \boldsymbol{E}.$$

Раскрывая скобки и приравнивая матрицы–коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем равенства: $\gamma_0 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{A}$, $\gamma_1 \boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_0$, …, $\gamma_{n-1} \boldsymbol{E} = \boldsymbol{B}_{n-1} \boldsymbol{A} - \boldsymbol{B}_{n-2}$, $\gamma_n \boldsymbol{E} = -\boldsymbol{B}_{n-1}$. Умножая справа второе равенство на $\boldsymbol{A}$, третье на $\boldsymbol{A}^2$, и так далее, последнее — на $\boldsymbol{A}^n$ и складывая полученные равенства, начиная с первого, будем иметь $\gamma_0 \boldsymbol{E} + \gamma_1 \boldsymbol{A} + \ldots + \gamma_n \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}_1 \boldsymbol{A}^2 - \boldsymbol{B}_0 \boldsymbol{A} + \ldots + \boldsymbol{B}_{n-1} \boldsymbol{A}^n - \boldsymbol{B}_{n-2} \boldsymbol{A}^{n-1} - \boldsymbol{B}_{n-1} \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{O}$, что и требуется доказать. □

4.2.3. Инвариантные подпространства относительно линейного оператора

Зафиксируем линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Линейное подпространство $\boldsymbol{U}$ пространства $\boldsymbol{V}$ называется *инвариантным* относительно $\mathcal{A}$, если $\mathcal{A}(\boldsymbol{U}) \subseteq \boldsymbol{U}$, т.е. $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{U}$ для любого $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$. Пространство $\boldsymbol{V}$ и нулевое подпространство $\{\boldsymbol{o}\}$ инвариантны относительно любого линейного оператора. Они называются *тривиальными* инвариантными подпространствами.

Предложение 4.2.2. *Пусть линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ имеет нетривиальное инвариантное подпространство $\boldsymbol{U}$ и $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} = n$, $\mathsf{dim}\boldsymbol{U} = r$. Тогда в некотором базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ имеет полураспавшийся вид*

$$\boldsymbol{A}_{\mathbf{N}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \beta_{1\,r+1} & \dots & \beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2r} & \beta_{2\,r+1} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr} & \beta_{r\,r+1} & \dots & \beta_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{r+1\,r+1} & \dots & \beta_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n\,r+1} & \dots & \beta_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.13}$$

Ограничение $\mathcal{A}|_U$ линейного оператора $\mathcal{A}$ на $\boldsymbol{U}$ является линейным оператором на линейном пространстве $\boldsymbol{U}$, и его характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}|_U}$ делит характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}$.

Доказательство. Зафиксируем некоторый базис $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r$ подпространства $\boldsymbol{U}$ и дополним его до базиса N пространства $\boldsymbol{V}$ векторами $\boldsymbol{f}_{r+1}, \dots, \boldsymbol{f}_n$. Запишем матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в базисе N. Так как $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i) \in \boldsymbol{U}$ при любом $i = 1, \dots, r$ в силу инвариантности $\boldsymbol{U}$, видим, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_i) = \alpha_{i1}\boldsymbol{e}_1 + \dots + \alpha_{ir}\boldsymbol{e}_r$. Следовательно, матрица $\boldsymbol{A}_{\mathbf{N}}$ имеет вид (4.13).

Очевидно, что ограничение $\mathcal{A}|_U$ линейного оператора $\mathcal{A}$ на $\boldsymbol{U}$ является линейным оператором на линейном пространстве $\boldsymbol{U}$.

Чтобы доказать последнее утверждение предложения, запишем характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$ в виде определителя $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}_{\mathbf{N}} - x\boldsymbol{E}_n)$ и представим его в виде произведения двух определителей согласно следствию 1.2.2:

$$f_{\mathcal{A}}(x) =$$
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} & \beta_{1\,r+1} & \dots & \beta_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-x & \dots & \alpha_{2r} & \beta_{2\,r+1} & \dots & \beta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr}-x & \beta_{r\,r+1} & \dots & \beta_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{r+1\,r+1}-x & \dots & \beta_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{n\,r+1} & \dots & \beta_{nn}-x \end{vmatrix} =$$
$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}-x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1r} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}-x & \dots & \alpha_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{r1} & \alpha_{r2} & \dots & \alpha_{rr}-x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} \beta_{r+1\,r+1}-x & \dots & \beta_{r+1\,n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_{n\,r+1} & \dots & \beta_{nn}-x \end{vmatrix}.$$

Поскольку первый множитель в произведении после второго знака равенства в этой записи есть в точности характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}|_U$, записанный в виде определителя через матрицу этого оператора в базисе $\boldsymbol{e}_1, \dots, \boldsymbol{e}_r$, получаем требуемое утверждение. □

Проверить с помощью определений следующее утверждение предоставляется читателю.

Предложение 4.2.3. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор.*

Для любого натурального числа h образ и ядро линейного оператора $\mathcal{A}^h$ являются инвариантными подпространствами относительно $\mathcal{A}$.

Для любого $\lambda \in \mathbb{F}$ подпространство $\boldsymbol{U}$ является инвариантным относительно линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда оно инвариантно относительно $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$.

4.2.4. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}$ над полем $\mathbb{F}$. Вектор $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ называется *собственным вектором* линейного оператора $\mathcal{A}$, *принадлежащим собственному значению* $\lambda \in \mathbb{F}$, если выполняются следующие условия: $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ и

$$\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}. \tag{4.14}$$

Множество всех собственных значений линейного оператора называется его *спектром* и обозначается через $\mathscr{S}(\mathcal{A})$.

Предложение 4.2.4. *Вектор $\boldsymbol{v}$ является собственным вектором линейного оператора $\mathcal{A}$ тогда и только тогда, когда $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ есть одномерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{v}$ — собственный вектор линейного оператора $\mathcal{A}$, принадлежащий собственному значению λ. Так как $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$, имеем $\operatorname{dim}\langle \boldsymbol{v} \rangle = 1$. Для любого $\boldsymbol{x} \in \langle \boldsymbol{v} \rangle$, так как $\boldsymbol{x} = \alpha \boldsymbol{v}$ для некоторого $\alpha \in \mathbb{F}$, в силу равенства (4.14) получаем $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}(\alpha \boldsymbol{v}) = \alpha \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \alpha \lambda \boldsymbol{v} = \lambda \alpha \boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{x}$, откуда следует, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}) \in \langle \boldsymbol{v} \rangle$. Таким образом, $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ — одномерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$.

Обратно, пусть $\langle \boldsymbol{v} \rangle$ — одномерное подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Тогда $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$ и $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) \in \langle \boldsymbol{v} \rangle$, т.е. $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \lambda \boldsymbol{v}$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}$, что и требуется доказать. □

Теорема 4.2.2. *Каждое собственное значение линейного оператора $\mathcal{A}$ является корнем характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})$, и, обратно, каждый корень $f_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})$, лежащий в поле $\mathbb{F}$, является собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$.*

Множество всех собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$, принадлежащих собственному значению $\lambda \in \mathbb{F}$, и нулевой вектор $\boldsymbol{o}$ образуют линейное подпространство $\boldsymbol{U}$, совпадающее *с ядром линейного оператора $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$ и инвариантное относительно оператора $\mathcal{A}$; при этом* $\mathsf{dim}\boldsymbol{U}$ *не превосходит кратности λ как корня характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}(\boldsymbol{x})$.*

Доказательство. Пусть λ — собственное значение линейного оператора $\mathcal{A}$ и $\boldsymbol{v}$ — принадлежащий ему собственный вектор. Тогда в силу (4.14) имеем $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) - \lambda\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$, откуда следует, что $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}}$. Обратно, если $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}}$, то либо $\boldsymbol{w} = \boldsymbol{o}$, либо $\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{o}$ и $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})(\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{o}$, откуда следует, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{w}) = \lambda\boldsymbol{w}$. Мы видим, что ядро линейного оператора $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$ для собственного значения λ линейного оператора $\mathcal{A}$ совпадает с множеством, состоящим из нулевого вектора и всех собственных векторов этого оператора, принадлежащих указанному собственному значению. Таким образом, доказана часть второго утверждения теоремы.

Положим $\mathsf{dim}\boldsymbol{V} = n$. Так как ядро оператора $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$ содержит ненулевой вектор $\boldsymbol{v}$, согласно теореме 4.1.1 имеем $\mathsf{r}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) < n$. В силу упомянутой теоремы ранг матрицы оператора $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$ в любом базисе меньше порядка этой матрицы. Таким образом, определитель указанной матрицы равен 0, а этот определитель и представляет собой значение $f_{\mathcal{A}}(x)$ при $x = \lambda$. Мы доказали, что $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$.

Обратно, предположим, что $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = 0$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{F}$. Зафиксируем некоторый базис $\mathbf{N}$ пространства $\boldsymbol{V}$ и в соответствии с определением запишем характеристический многочлен линейного оператора $\mathcal{A}$ в виде $f_{\mathcal{A}}(x) = \mathsf{det}(\boldsymbol{A}_N - x\boldsymbol{E}_n)$. Подставив вместо x число λ, получим $0 = f_{\mathcal{A}}(\lambda) = \mathsf{det}(\boldsymbol{A}_N - \lambda\boldsymbol{E}_n)$. Таким образом, $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}_N - \lambda\boldsymbol{E}_n) < n$, откуда в силу теоремы 4.1.1 получаем $\mathsf{r}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) < n$ и $\mathsf{d}(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}) \geq 1$. Следовательно, найдется вектор $\boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{o}$, для которого $(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$. Отсюда следует, как и выше, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \lambda\boldsymbol{v}$. Таким образом, λ является собственным значением линейного оператора $\mathcal{A}$.

Для завершения доказательства теоремы остается заметить, что в силу предложения 4.2.3 ядро $\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$, а по предложению 4.2.2 ограничение $\mathcal{A}$ на это ядро имеет характеристический многочлен, скажем $g(x)$, являющийся делителем $f_{\mathcal{A}}(x)$. Выберем какой-нибудь базис $\mathbf{M}$ в $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E}}$, и пусть $m = \mathsf{d}(\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E})$. Читателю предлагается проверить, что матрица ограничения $\mathcal{A}$ на указанное подпространство является скалярной матрицей порядка m со значением λ на главной диагонали. Характеристический многочлен этого ограничения равен определителю диагональной матрицы порядка m со значением $\lambda - x$ на главной диагонали, т.е. равен $(\lambda - x)^m$. Теперь ясно, что m не превосходит кратности λ как корня характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}(x)$. □

Из доказанной теоремы получается следующий способ нахождения собственных значений и собственных векторов линейного оператора $\mathcal{A}$. Сначала находим характеристический многочлен линейного оператора, затем все его корни, лежащие в поле $\mathbb{F}$, т.е. спектр $\mathscr{S}(\mathcal{A})$. Для каждого элемента спектра λ находим ядро линейного оператора $\mathcal{A} - \lambda\mathcal{E}$.

Рассмотрим конкретный пример. Для линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе матрицей $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, найти собственные значения и принадлежащие им собственные векторы[1].

Сначала нужно найти характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(x)$ данного линейного оператора. Это сделано при решении примера в п. 4.2.2: $f_{\mathcal{A}}(x) = (x-2)^3(x+2)$. Числа $\lambda_1 = 2$ и $\lambda_2 = -2$ являются собственными значениями линейного оператора $\mathcal{A}$. Чтобы найти собственные векторы, принадлежащие собственному значению λ_1, найдем ядро линейного оператора $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}$. Для этого можно воспользоваться любым из способов, изложенных в

[1] Мы будем искать координаты собственных векторов в том базисе, в котором данный оператор имеет матрицу A.

п. 4.1.2. Используем первый способ; второй будет продемонстрирован в п. 4.3.1 при нахождении жорданова базиса оператора $\mathcal{A}$.

Матрица оператора $\mathcal{A}_1$ имеет вид $\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Применяя метод Гаусса–Жордана к однородной системе линейных уравнений с такой матрицей, получаем следующую цепочку матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

По последней матрице записываем однородную систему линейных уравнений, ее общее решение и фундаментальную систему решений (которая будет базисом ядра $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_1}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_3 - 4x_4 = 0; \\ x_2 + x_4 = 0, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x_1 = x_3 + 4x_4; \\ x_2 = -x_4, \end{array} \right. \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произвольный собственный вектор, принадлежащий собственному значению 2, может быть записан в виде $\gamma_1(-1,0,1,0) + {}$ $+\gamma_2(-4,-1,1,0)$, где по крайней мере одно из чисел γ_1, γ_2 отлично от нуля.

Аналогично находятся собственные векторы, принадлежащие собственному значению λ_2. Мы находим ядро линейного оператора $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A} - \lambda_2\mathcal{E}$. Выписываем матрицу этого оператора и приводим ее к ступенчатому виду:

$$\begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 4 & 0 & -4 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь получаются следующие однородная система линейных уравнений, ее общее решение и фундаментальная система решений (которая будет базисом ядра $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_2}$):

$$\begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 + x_4 = 0; \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} x_1 = 0; \\ x_2 = -x_4; \\ x_3 = 0, \end{cases} \quad \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Произвольный собственный вектор, принадлежащий собственному значению -2, может быть записан в виде $\gamma_1(0, -1, 0, 1)$ для некоторого $\gamma_1 \neq 0$.

Предложение 4.2.5. *Собственные векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ линейного оператора $\mathcal{A}$, принадлежащие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$, линейно независимы.*

Доказательство. Воспользуемся индукцией по k. Для $k = 1$ утверждение очевидно, ибо собственный вектор по определению ненулевой. Пусть уже доказано, что собственные векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_{k-1}$ линейного оператора $\mathcal{A}$, принадлежащие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1}$, линейно независимы. Рассмотрим собственные векторы $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ линейного оператора $\mathcal{A}$, принадлежащие различным собственным значениям $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Пусть

$$\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o} \text{ —} \tag{4.15}$$

произвольная линейная зависимость между векторами $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$. Найдем образ левой части этого равенства при линейном операторе $\mathcal{A}$:

$$\mathcal{A}(\alpha_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_k \boldsymbol{v}_k) = \alpha_1 \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_1) + \ldots + \alpha_k \mathcal{A}(\boldsymbol{v}_k) = \alpha_1 \lambda_1 \boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_k \lambda_k \boldsymbol{v}_k.$$

Следовательно, из (4.15) получаем равенство

$$\alpha_1\lambda_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \alpha_k\lambda_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}. \tag{4.16}$$

Умножив обе части равенства (4.15) на λ_k, получим $\lambda_k\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + \lambda_k\alpha_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$. Почленно вычитая это равенство из (4.16), получаем $(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha_1\boldsymbol{v}_1 + \ldots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha_{k-1}\boldsymbol{v}_{k-1} = \boldsymbol{o}$. По индуктивному предположению последнее равенство влечет за собой $(\lambda_1 - \lambda_k)\alpha_1 = 0, \ldots, (\lambda_{k-1} - \lambda_k)\alpha_{k-1} = 0$. Поскольку собственные значения $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ различны, из последних равенств вытекает, что $\alpha_1 = 0, \ldots, \alpha_{k-1} = 0$. Равенство (4.15) влечет за собой $\alpha_k\boldsymbol{v}_k = \boldsymbol{o}$, откуда $\alpha_k = 0$. Таким образом, система собственных векторов $\boldsymbol{v}_1, \ldots, \boldsymbol{v}_k$ линейно независима и шаг индукции доказан. □

4.2.5. Линейные операторы простой структуры

Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется *оператором простой структуры*, если существует базис пространства $\boldsymbol{V}$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Следующее утверждение непосредственно вытекает из соответствующих определений.

Предложение 4.2.6. *Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ будет оператором простой структуры тогда и только тогда, когда его матрица в некотором базисе является диагональной.*

Из этого утверждения в силу сказанного в п. 4.2.1 о матрицах одного и того же линейного оператора в разных базисах получается такое следствие.

Следствие 4.2.1. *Матрица $\boldsymbol{A}$ подобна диагональной матрице тогда и только тогда, когда линейный оператор, заданный этой матрицей в некотором базисе линейного пространства соответствующей размерности, является линейным оператором простой структуры.*

Чтобы проверить, будет ли данный линейный оператор линейным оператором простой структуры, необходимо найти все его собственные векторы и посмотреть, можно ли построить из них базис всего пространства. Учитывая предложение 4.2.5, достаточно проверить, что сумма размерностей подпространств, состоящих из собственных векторов, принадлежащих одному собственному значению, и нулевого вектора, равна размерности всего пространства (т.е. порядку матрицы оператора). Одно достаточное условие того, что линейный оператор является оператором простой структуры, дается следующим утверждением, которое непосредственно получается из предложения 4.2.5.

Предложение 4.2.7. *Если линейный оператор, действующий на линейном пространстве размерности n, имеет n различных собственных значений, то этот оператор является линейным оператором простой структуры.*

4.2.6. Идемпотентные линейные операторы и матрицы

Линейный оператор $\mathcal{A}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется *идемпотентным*, если $\mathcal{A}^2 = \mathcal{A}$. Идемпотентная матрица была определена в конце п. 1.1.9. Ясно, что идемпотентная матрица является квадратной. С помощью формулы (4.9) легко проверить, что линейный оператор идемпотентен тогда и только тогда, когда идемпотентна его матрица в некотором (что равносильно, в любом) базисе.

Пусть $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{W}$ для некоторых линейных подпространств $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{W}$ линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Для каждого вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ в силу предложения 3.3.4 существуют однозначно определенные векторы $\boldsymbol{u}_x$ и $\boldsymbol{v}_x$ такие что $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_x + \boldsymbol{v}_x$. Рассмотрим отображение $\mathcal{P} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{V}$, определенное следующим образом: $\mathcal{P}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}_x$. Читателю предлагается проверить, что $\mathcal{P}$ является идемпотентным линейным оператором пространства $\boldsymbol{V}$. Он называется линейным оператором *проектирования* пространства $\boldsymbol{V}$ на подпространство $\boldsymbol{U}$ параллельно подпространству $\boldsymbol{W}$.

Теорема 4.2.3. *Каждый идемпотентный линейный оператор является оператором проектирования.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — идемпотентный линейный оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}$. Положим $\boldsymbol{U} = \mathcal{A}(\boldsymbol{V})$, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$ и покажем, что $\mathcal{A}$ является линейным оператором проектирования пространства $\boldsymbol{V}$ на подпространство $\boldsymbol{U}$ параллельно подпространству $\boldsymbol{W}$. Заметим, что $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ для любого $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$. В самом деле, если $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$, то $\boldsymbol{u} = \mathcal{A}\boldsymbol{v}$ для некторого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$, и $\mathcal{A}u = \mathcal{A}(\mathcal{A}\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}^2\boldsymbol{v} = \mathcal{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}$, т. е. $\mathcal{A}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$. Для завершения доказательства достаточно установить, что $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{W}$. Покажем, что $\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{o}\}$. Пусть $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W}$. Тогда $\boldsymbol{x} = \mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, откуда следует требуемое равенство. Покажем, что $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$. Пусть $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Тогда $\mathcal{A}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}$ и $\mathcal{A}(\boldsymbol{x} - \mathcal{A}\boldsymbol{x}) = \mathcal{A}\boldsymbol{x} - \mathcal{A}^2\boldsymbol{x} = \mathcal{A}\boldsymbol{x} - \mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$, т. е. $\boldsymbol{x} - \mathcal{A}\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{W}$. Таким образом, $\boldsymbol{x} = \mathcal{A}\boldsymbol{x} + (\boldsymbol{x} - \mathcal{A}\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$, и $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$, т. е. $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{W}$. □

Из доказательства последней теоремы легко вывести следующее утверждение.

Следствие 4.2.2. *Линейный оператор идемпотентен тогда и только тогда, когда он является оператором простой структуры и его собственные значения равны* $0, 1$.

Для идемпотентных матриц получается следующее утверждение.

Следствие 4.2.3. *Квадратная матрица* $\boldsymbol{A}$ *порядка* n *идемпотентна тогда и только тогда, когда она подобна диагональной матрице, у которой на главной диагонали нули и единицы, причем число единиц равно* $\mathsf{r}(\boldsymbol{A})$.

След любой идемпотентной матрицы равен ее рангу.

Доказательство. Легко видеть, что любая матрица, подобная идемпотентной матрице, сама будет идемпотентной. Из определения произведения матриц следует, что диагональная матрица будет идемпотентной тогда и только тогда, когда у нее на главной диагонали числа α такие, что $\alpha^2 = \alpha$, т. е. нули и единицы. Так как ранги подобных матриц равны и ранг диагональной матрицы равен числу ненулевых элементов на главной диагонали, получаем доказательство одной из импликаций в следствии.

Докажем, что идемпотентная матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n с элементами из поля $\mathbb{F}$ подобна диагональной матрице, у которой на главной диагонали нули и единицы, причем число единиц равно $\mathsf{r}(\boldsymbol{A})$. Определим на пространстве столбцов $\mathbb{F}^n$ отображение $\mathcal{A}$, полагая для $\boldsymbol{x} \in \mathbb{F}^n$ $\mathcal{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Легко проверить, что $\mathcal{A}$ является идемпотентным линейным оператором пространства $\mathbb{F}^n$. В силу следствия 4.2.2 для $\mathcal{A}$ существует базис из собственных векторов, в котором матрица этого оператора диагональна с нулями и единицами на главной диагонали. Требуемое утверждение получается теперь с учетом формулы 4.11. □

§ 4.3. Жорданово разложение для линейного оператора

Всюду в этом параграфе рассматривается линейный оператор $\mathcal{A}$, действующий на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ размерности n над полем $\mathbb{F}$ и такой что его характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(x)$ разлагается на линейные множители над полем $\mathbb{F}$:

$$f_{\mathcal{A}}(x) = (-1)^n (x-\lambda_1)^{k_1}(x-\lambda_2)^{k_2}\dots(x-\lambda_m)^{k_m}; \qquad (4.17)$$

здесь $\lambda_1,\ \lambda_2,\dots,\lambda_m$—различные собственные значения линейного оператора $\mathcal{A}$ (которыми исчерпываются все корни характеристического многочлена), $k_1,\ k_2,\dots,k_m$—их кратности. Так как степень $f_{\mathcal{A}}(x)$ равна n, имеем

$$k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n. \tag{4.18}$$

4.3.1. Корневые подпространства

Для собственного значения λ_i $(1 \leq i \leq m)$ положим $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E}$. В силу второго утверждения теоремы 4.2.2 имеем $\{\boldsymbol{o}\} \subset \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i}$. Рассматривая степени оператора $\mathcal{A}_i^s$ при $s = 1, 2, \ldots$, мы видим, что $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i^s} \subseteq \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i^{s+1}}$. Так как размерность каждого подпространства не превосходит n, существует s_i — наименьшее натуральное число со свойством

$$\{\boldsymbol{o}\} \subset \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i} \subset \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i^2} \subset \ldots \subset \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i^{s_i-1}} \subset \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i^{s_i}} = \\ = \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i^{s_i+1}} = \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i^{s_i+2}} = \ldots . \tag{4.19}$$

Подпространство $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i^{s_i}}$ из (4.19) называется *корневым подпространством* линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующим собственному значению λ_i, и обозначается через $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, \lambda_i)$. Положим $\mathcal{A}_i^{\circ} = \mathcal{A}_i^{s_i}$ при $i = 1, \ldots, m$. Тогда $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, \lambda_i) = \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i^{\circ}}$. Заметим, что для образов степеней линейного оператора $\mathcal{A}_i$ с учетом теоремы 4.1.1 из условий (4.19) получаются следующие условия:

$$\boldsymbol{V} \supset \mathcal{A}_i(\boldsymbol{V}) \supset \mathcal{A}_i^2(\boldsymbol{V}) \supset \ldots \supset \mathcal{A}_i^{s_i-1}(\boldsymbol{V}) \supset \mathcal{A}_i^{s_i}(\boldsymbol{V}) = \\ = \mathcal{A}_i^{s_i+1}(\boldsymbol{V}) = \mathcal{A}_i^{s_i+2}(\boldsymbol{V}) = \ldots . \tag{4.20}$$

Лемма 4.3.1. *Пусть $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{V}(\mathcal{A}, \lambda_i)$ — корневое подпространство линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующее собственному значению λ_i, и μ — число из поля $\mathbb{F}$, отличное от λ_i. Тогда выполняются следующие условия:*

1) $\boldsymbol{K}_i$ и $\mathcal{A}_i^{\circ}(\boldsymbol{V})$ есть инвариантные относительно $\mathcal{A}$ подпространства;

2) $\boldsymbol{K}_i \cap \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}-\mu\mathcal{E}} = \{\boldsymbol{o}\}$;

3) $(\mathcal{A} - \mu\mathcal{E})(\boldsymbol{K}_i) = \boldsymbol{K}_i$;

4) $f_{\mathcal{A}|_{K_i}} = (x - \lambda_i)^{d_i}$, где $d_i = \mathsf{dim}\boldsymbol{K}_i$.

Доказательство. Будучи ядром оператора $(\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{s_i}$, линейное подпространство $\boldsymbol{K}_i$ очевидным образом инвариантно относительно оператора $\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E}$. Согласно предложению 4.2.3 $\boldsymbol{K}_i$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$, так что первая часть утверждения 1) доказана. Вторая часть доказывается аналогично с использованием того факта, что $\mathcal{A}_i^o(\boldsymbol{V}) = (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})^{s_i}(\boldsymbol{V})$ является инвариантным относительно линейного оператора $\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E}$ подпространством.

Пусть $\mu \neq \lambda_i$. Возьмем произвольный элемент $\boldsymbol{v}$ в $\boldsymbol{K}_i \cap \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}-\mu\mathcal{E}}$. Так как $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}-\mu\mathcal{E}}$, видим, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \mu\boldsymbol{v}$. Далее, имеем $\mathcal{A}_i(\boldsymbol{v}) = (\mathcal{A}-\lambda_i\mathcal{E})(\boldsymbol{v}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{v}) - \lambda_i\boldsymbol{v} = \mu\boldsymbol{v} - \lambda_i\boldsymbol{v} = (\mu-\lambda_i)\boldsymbol{v}$, откуда $\mathcal{A}_i(\boldsymbol{v}) = (\mu-\lambda_i)\boldsymbol{v}$. Следовательно, $\mathcal{A}_i^{s_i}(\boldsymbol{v}) = (\mu-\lambda_i)^{s_i}\boldsymbol{v}$. Так как $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}_i$, заключаем, что $\mathcal{A}_i^{s_i}(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$. Поскольку $\mu - \lambda_i \neq 0$, из равенства $(\mu-\lambda_i)^{s_i}\boldsymbol{v} = 0$ следует, что $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$. Этим доказано утверждение 2).

Так как $\boldsymbol{K}_i$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$, согласно предложению 4.2.3 оно инвариантно относительно $\mathcal{A}-\mu\mathcal{E}$. Рассмотрим ограничение $\mathcal{B}$ оператора $\mathcal{A}-\mu\mathcal{E}$ на $\boldsymbol{K}_i$. Ядро $\mathcal{B}$ согласно утверждению 2) равно $\{\boldsymbol{o}\}$. По теореме 4.1.1 образ $\boldsymbol{K}_i$ при $\mathcal{B}$ имеет размерность $\mathsf{dim}\boldsymbol{K}_i$, т.е. совпадает с $\boldsymbol{K}_i$, что доказывает 3).

Для доказательства утверждения 4) заметим, что $f_{\mathcal{A}|_{K_i}}(x)$ делит характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(x)$ согласно предложению 4.2.2. Принимая во внимание (4.17), заключаем, что корнями $f_{\mathcal{A}|_{K_i}}(x)$ могут быть лишь числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ и этот многочлен разлагается над полем $\mathbb{F}$ на линейные множители. Согласно утверждению 2) лишь λ_i может быть собственным значением ограничения $\mathcal{A}$ на $\boldsymbol{K}_i$, т.е. корнем характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}|_{K_i}}(x)$. Так как степень этого многочлена равна $\mathsf{dim}\boldsymbol{K}_i$, тем самым утверждение 4) доказано. □

Теорема 4.3.1. *Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ над полем $\mathbb{F}$ с характеристическим многочленом (4.17). Тогда*

1) $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}(\mathcal{A},\lambda_1) \oplus \boldsymbol{V}(\mathcal{A},\lambda_2) \oplus \ldots \oplus \boldsymbol{V}(\mathcal{A},\lambda_m)$;

2) $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}(\mathcal{A},\lambda_i) = k_i$ *при* $i = 1,\dots,m$*;*

3) $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_i^o} \oplus \mathcal{A}_i^o(\boldsymbol{V})$*;*

4) для любого $i = 1,\dots,m$ *имеет место равенство*

$$\boldsymbol{V}(\mathcal{A},\lambda_1)\oplus\ldots\oplus\boldsymbol{V}(\mathcal{A},\lambda_{i-1})\oplus\boldsymbol{V}(\mathcal{A},\lambda_{i+1})\oplus\ldots\oplus\boldsymbol{V}(\mathcal{A},\lambda_m) = \\ = \mathcal{A}_i^o(\boldsymbol{V}).$$

Доказательство. Воспользуемся индукцией по n — размерности пространства $\boldsymbol{V}$ и докажем, что выполняются утверждения 1)–4). Если $n = 1$, то базис $\boldsymbol{V}$ образует один вектор $\boldsymbol{e}$. Тогда $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}) = \lambda_1\boldsymbol{e}$ и $\boldsymbol{V}(\mathcal{A},\lambda_1) = \boldsymbol{V}$, $(\mathcal{A}-\lambda_1)(\boldsymbol{V}) = \{\boldsymbol{o}\}$, $k_1 = 1$. База индукции доказана.

Предположим, что требуемые утверждения доказаны для всех линейных подпространств $\boldsymbol{W}$ размерности, не превосходящей $n-1$, и всех линейных операторов на этих пространствах, имеющих спектр в поле $\mathbb{F}$. Докажем их для $\boldsymbol{V}$ и $\mathcal{A}$.

Сначала проверим утверждение 3). Положим $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{V}(\mathcal{A},\lambda_i)$ и $\boldsymbol{W} = \mathcal{A}_i^o(\boldsymbol{V})$. Так как $\mathsf{dim}\boldsymbol{K}_i > 0$, имеем $\mathsf{dim}\boldsymbol{W} < n$, и к $\boldsymbol{W}$ применимо предположение индукции. Согласно (4.20) имеем $\mathcal{A}_i(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}$, и потому $\mathcal{A}_i^o(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}$. Рассмотрим ограничение $\mathcal{A}_i^o|_W$. В силу теоремы 4.1.1 ядро этого ограничения равно $\{\boldsymbol{o}\}$, ибо образ совпадает с $\boldsymbol{W}$. Отсюда следует, что $\boldsymbol{K}_i \cap \boldsymbol{W} = \{\boldsymbol{o}\}$. Таким образом, снова по теореме 4.1.1 получаем $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{K}_i \oplus \boldsymbol{W}$, и утверждение 3) доказано.

Докажем утверждение 2). Согласно утверждению 1) леммы 4.3.1 подпространства $\boldsymbol{K}_i$ и $\boldsymbol{W}$ являются инвариантными относительно оператора $\mathcal{A}$. Возьмем базис $\boldsymbol{V}$, составленный из базисов $\boldsymbol{K}_i$ и $\boldsymbol{W}$. В этом базисе матрица $\mathcal{A}$ имеет блочный вид $\begin{pmatrix} \boldsymbol{A}_{K_i} & \boldsymbol{O}_1 \\ \boldsymbol{O}_2 & \boldsymbol{A}_W \end{pmatrix}$, где $\boldsymbol{A}_{K_i}$ — матрица ограничения $\mathcal{A}|_{K_i}$; $\boldsymbol{A}_W$ — матрица $\mathcal{A}|_W$; $\boldsymbol{O}_1$ и $\boldsymbol{O}_2$ — нулевые матрицы подходящих размеров. Тогда ясно, что $f_{\mathcal{A}}(x) = f_{\mathcal{A}|_{K_i}}(x) f_{\mathcal{A}|_W}(x)$. Так как $\mathcal{A}_i(\boldsymbol{W}) = \boldsymbol{W}$ в силу (4.20) и $\mathcal{A}_i = \mathcal{A} - \lambda_i\mathcal{E}$, ясно, что λ_i не является корнем многочлена $f_{\mathcal{A}|_W}(x)$. В силу утверждения 4) леммы 4.3.1, принимая во внимание разложение (4.17) для характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}(x)$, заключаем, что $f_{\mathcal{A}|_{K_i}}(x) = (-1)^{k_i}(x-\lambda_i)^{k_i}$ и $k_i = \mathsf{dim}\boldsymbol{K}_i$. Таким образом, утверждение 2) доказано. Мы видим также, что

$$f_{\mathcal{A}|_W}(x) = (-1)^{n-k_i} \times \\ \times (x-\lambda_1)^{k_1} \ldots (x-\lambda_{i-1})^{k_{i-1}}(x-\lambda_{i+1})^{k_{i+1}} \ldots (x-\lambda_m)^{k_m}. \quad (4.21)$$

Для доказательства утверждения 4) заметим, что для подпространства $\boldsymbol{W} = \mathcal{A}_i^0(\boldsymbol{V})$ и линейного оператора $\mathcal{B} = \mathcal{A}\,|_W$ можно применить предположение индукции, ибо $\mathsf{dim}\boldsymbol{W} < \mathsf{dim}\boldsymbol{V}$. Следует принять также во внимание, что в силу равенства (4.21) $\boldsymbol{W}(\mathcal{B}, \lambda_j) = \boldsymbol{V}(\mathcal{A}, \lambda_j)$ для всех $j \neq i$ из множества чисел $\{1, 2, \ldots, m\}$. Отсюда сразу получается утверждение 4).

Утверждение 1) является непосредственным следствием утверждений 3) и 4). □

Из доказанной теоремы получается следующий способ отыскания корневых подпространств линейного оператора $\mathcal{A}$, имеющего спектр в поле $\mathbb{F}$. Пусть дана матрица $\boldsymbol{A}$ оператора в некотором базисе. Найдем базисы корневых подпространств. Для этого сначала найдем характеристический многочлен $f_{\mathcal{A}}(x)$ и разложим его на линейные множители; пусть (4.17) — соответствующее разложение. Возьмем собственное значение λ_1 и найдем матрицу линейного оператора $\mathcal{A}_1 = \mathcal{A} - \lambda_1\mathcal{E}$. Это будет матрица $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{A} - \lambda_1\boldsymbol{E}_n$. Запишем матрицу $(\boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{A}_1^\top)$ и найдем базис ядра линейного оператора $\mathcal{A}_1$ вторым из описанных в п. 4.1.2 способов. Если $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_1} = k_1$, то в качестве базиса корневого подпространства $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, \lambda_1)$ можно взять базис ядра $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_1}$, т.е. векторы, представленные строками координат в матрице $(\boldsymbol{M}_1 \mid \boldsymbol{L}_1)$, полученной элементарными преобразованиями из $(\boldsymbol{E}_n \mid \boldsymbol{A}_1^\top)$, слева от черты, имеющими нулевые продолжения справа. Ненулевые строки матрицы $\boldsymbol{L}_1$ образуют базис образа $\mathcal{A}_1(\boldsymbol{V})$. Предположим, что $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_1} < k_1$. Будем искать базис ядра $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_1^2}$. Для этого найдем образы векторов, представленных строками матрицы $\boldsymbol{L}_1$, при действии оператора $\mathcal{A}_1$. В силу формулы (4.6), транспонируя обе ее части, заключаем, что достаточно умножить $\boldsymbol{L}_1$ на матрицу $\boldsymbol{A}_1^\top$. Рассмотрим матрицу $(\boldsymbol{M}_1 \mid \boldsymbol{L}_1 \mid \boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_1^\top)$ и элементарными преобразованиями со строками этой матрицы приведем матрицу на месте $\boldsymbol{L}_1\boldsymbol{A}_1^\top$ к ступенчатому виду. Получим матрицу $(\boldsymbol{M}_2 \mid \boldsymbol{L}_2 \mid \boldsymbol{N}_2)$. Тогда строки матрицы $\boldsymbol{M}_2$, имеющие нулевые продолжения в $\boldsymbol{N}_2$, образуют базис ядра $\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_1^2}$, а ненулевые строки матрицы $\boldsymbol{N}_2$ образуют базис образа $\mathcal{A}_1^2$. Если $\operatorname{dim}\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_1^2} = k_1$, то $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, \lambda_1) = \boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_1^2}$ и его базис найден. Если же $\operatorname{dim}\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}_1^2} < k_1$, то продолжаем процесс, описанный выше. Этот процесс заканчивается, когда размерность ядра очередной степени оператора $\mathcal{A}_1$ совпадает с k_1. На этом шаге ранг рассматриваемой степени $\mathcal{A}_1$ совпадает с рангом следующей (т.е. на 1 большей) его степени; это можно использовать для проверки.

Далее берем следующее значение λ_2 и повторяем для него описанный в предыдущем абзаце процесс с тем отличием, что вместо единичной матрицы $\boldsymbol{E}_n$ на первом шаге берется прямоугольная матрица $\boldsymbol{P}_r$, полученная справа на последнем шаге, с отброшенными нулевыми строками (это базис образа $\mathcal{A}_1^\circ(\boldsymbol{V})$), и к ней приписывается матрица $\boldsymbol{P}_r\boldsymbol{A}_2^\top$, где $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{A} - \lambda_2\boldsymbol{E}_n$. Затем полученную матрицу элементарными преобразованиями строк приводим к виду, когда справа получается ступенчатая матрица. Процесс продолжается далее до построения базиса $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, \lambda_2)$. Для остальных собственных значений проделываются аналогичные шаги.

Рассмотрим конкретный пример. Найти базисы корневых подпространств линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе матрицей

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.22}$$

Характеристический многочлен вычисляется, как в примере п. 4.2.2:

$$f_{\mathcal{A}}(x) = (x-2)^3(x+2).$$

Его корни $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$. Найдем базис корневого подпространства, соответствующего собственному значению $\lambda_1 = 2$:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 4 & 0 & -4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right);$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Мы видим, что корневое подпространство $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, 2)$ имеет базис из векторов с координатами $(0,1,2,0)$, $(1,0,1,0)$, $(4,-1,0,1)$ и является ядром оператора $(\mathcal{A} - 2\mathcal{E})^2$. Корневое подпространство $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, -2)$ совпадает с образом этого оператора и порождается вектором $(0,4,0,-4)$ или, что равносильно, вектором $(0,1,0,-1)$.

4.3.2. Построение жорданова базиса

Пусть $\boldsymbol{K}_i = \boldsymbol{V}(\mathcal{A}, \lambda_i)$ — корневое подпространство линейного оператора $\mathcal{A}$, соответствующее собственному значению λ_i. Обозначим ограничение $\mathcal{A}|_{K_i}$ и через $\mathcal{B}$. Положим $\mathcal{B}_i = \mathcal{B} - \lambda_i \mathcal{E}$, где через $\mathcal{E}$ обозначен единичный оператор на $\boldsymbol{K}_i$. По определению корневого подпространства для каждого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{K}_i$ существует натуральное число $h \leq k_i = \mathsf{dim}\boldsymbol{K}_i$ такое, что $\mathcal{B}_i^h(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$. Таким образом, $\mathcal{B}_i^{k_i} = \mathcal{O}$. Линейный оператор $\mathcal{A}$, для которого $\mathcal{A}^s = \mathcal{O}$, но $\mathcal{A}^{s-1} \neq \mathcal{O}$ при некотором натуральном s, называется *нильпотентным оператором ступени* s.

Возьмем ненулевой вектор $\boldsymbol{v}$ в $\boldsymbol{K}_i$ и рассмотрим последовательность векторов $\boldsymbol{v}$, $\mathcal{B}_i(\boldsymbol{v}), \ldots, \mathcal{B}_i^s(\boldsymbol{v}), \ldots$. Пусть l — наименьшее число со свойством $\mathcal{B}_i^l(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$; такое число существует согласно сказанному в предыдущем абзаце. Последовательность векторов $\boldsymbol{v}$, $\mathcal{B}_i(\boldsymbol{v}), \ldots, \mathcal{B}_i^{l-1}(\boldsymbol{v})$ называется *ниль-слоем* длины l. Система векторов, состоящая из ниль-слоев, называется *жордановой системой относительно оператора* $\mathcal{B}_i = \mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E}$. Запись жордановой системы в форме таблицы, каждая строка которой представляет собой ниль-слой и все строки выровнены по правому краю (т.е. имеют общую вертикальную правую границу), называется *жордановой таблицей*.

Лемма 4.3.2. *Жорданова система линейно независима тогда и только тогда, когда в представлении ее в форме жордановой таблицы векторы правого столбца образуют линейно независимую систему.*

Доказательство. Если жорданова система линейно независима, то любая ее подсистема также линейно независима и, в частности, векторы правого столбца жордановой таблицы образуют линейно независимую систему. Обратно, предположим, что система из векторов правого столбца жордановой таблицы линейно независима, а вся жорданова система линейно зависима, и придем к противоречию. Рассмотрим линейную комбинацию векторов жордановой системы, равную нулевому вектору, по крайней мере один из коэффициентов которой отличен от нуля. Отметим в таблице все векторы, коэффициенты при которых отличны от нуля. Выберем ниль-слой (т.е. строку таблицы), в котором отмеченный вектор расположен так, что все векторы во всех столбцах левее его не отмечены. Пусть r — число столбцов таблицы правее выбранного вектора. Подействуем на линейную комбинацию оператором $\mathcal{B}_i^r$. Образ $\mathcal{B}_i(\boldsymbol{v})$ любого вектора $\boldsymbol{v}$ из жордановой таблицы находится в таблице в соседнем столбце справа от $\boldsymbol{v}$, если $\boldsymbol{v}$ стоит не в самом правом столбце, и равен нулевому вектору, если $\boldsymbol{v}$ стоит в самом правом столбце. Поэтому образ левой части линейной комбинации при $\mathcal{B}_i^r$ является линейной комбинацией векторов правого столбца, по крайней мере один из коэффициентов которой отличен от нуля, и эта линейная комбинация равна нулевому вектору. Получили противоречие, которое показывает, что жорданова система линейно независима. □

Элементарными преобразованиями жордановой таблицы называются следующие преобразования:

1) перестановка слоев;

2) исключение нулевых векторов сдвигом слоя вправо (на число нулевых векторов);

3) умножение слоя на ненулевое число;

4) прибавление к слою длины l отрезка длины l слоя, расположенного над или под данным (второй слой, из которого берется отрезок, должен быть не короче первого).

Предлагаем читателю убедиться, что таблица, получаемая из жордановой с помощью указанных преобразований, будет линейно эквивалентна исходной таблице, и путем применения преобразования 2) всегда может быть приведена к жордановой таблице, линейно эквивалентной исходной.

Жордановым базисом пространства $\boldsymbol{V}$ *относительно линейного оператора* $\mathcal{A}$ называется базис, составленный из базисов корневых подпространств $\boldsymbol{K}_i$ при $i = 1, \ldots, m$ так, что в каждом корневом подпространстве базис является жордановой системой относительно оператора $\mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E}$. Базисы корневых подпространств, обладающие указанным свойством, будем также называть *жордановыми.*

Существование жорданова базиса доказывается следующим утверждением.

Теорема 4.3.2. *Корневое подпространство $\boldsymbol{K}_i$ имеет жорданов базис относительно линейного оператора $\mathcal{B} = \mathcal{A} - \lambda_i \mathcal{E}$. Число q_l ниль-слоев длины l в этом базисе не зависит от выбора базиса и определяется формулами $q_l = r_{l-1} - 2r_l + r_{l+1}$,* где *$r_i = r(\mathcal{B}^i)$, $i = 0, \ldots, t_i$, t_i — ступень нильпотентности оператора $\mathcal{B}$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_{k_i}$ — некоторый базис корневого подпространства $\boldsymbol{K}_i$. Составим жорданову таблицу из ниль-слоев, начинающихся с указанных векторов. Ясно, что эта таблица будет порождающим множеством для пространства $\boldsymbol{K}_i$. Перестроим таблицу с помощью элементарных преобразований так, чтобы правый столбец ее образовывал линейно независимую систему (имел бы ступенчатый вид и не содержал нулевых строк). Проведя соответствующие преобразования в исходной жордановой таблице, мы придем к жордановой системе, линейно независимой в силу леммы 4.3.2 и порождающей подпространство $\boldsymbol{K}_i$ согласно отмеченному выше. Таким образом, жорданов базис построен.

Пусть дан произвольный жорданов базис и q_l — число ниль-слоев длины l в нем. Тогда легко подсчитать, что

$$\begin{aligned}
r_0 = \mathsf{dim}\boldsymbol{K}_i &= q_1 + 2q_2 + 3q_3 + 4q_4 + \ldots \\
r_1 = \mathsf{dim}\mathcal{B}(\boldsymbol{K}_i) &= q_2 + 2q_3 + 3q_4 + \ldots \\
r_2 = \mathsf{dim}\mathcal{B}^2(\boldsymbol{K}_i) &= q_3 + 2q_4 + \ldots \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}$$

Вычитая из каждого равенства следующее за ним, получим

$$
\begin{aligned}
r_0 - r_1 &= q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + \dots \\
r_1 - r_2 &= q_2 + q_3 + q_4 + \dots \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}
$$

Повторяя эту операцию для полученных равенств, приходим к требуемым выражениям для $q_0, q_1, \dots$. $\square$

Построим матрицу линейного оператора $\mathcal{A}$ в жордановом базисе. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r$ — ниль-слой для собственного значения λ. Тогда $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_1) = \lambda\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{e}_2) = \lambda\boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_3, \dots, \mathcal{A}(\boldsymbol{e}_r) = \lambda\boldsymbol{e}_r$. Легко понять, что подпространство $\boldsymbol{S} = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \dots, \boldsymbol{e}_r \rangle$ является инвариантным относительно $\mathcal{A}$, и матрица ограничения $\mathcal{A}|_S$ имеет вид

$$
\begin{pmatrix}
\lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\
1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\
0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \dots & \cdot & \cdot \\
0 & 0 & 1 & \dots & \lambda & 0 \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda
\end{pmatrix}. \tag{4.23}
$$

Такая матрица называется *жордановой клеткой*. В жордановом базисе матрица линейного оператора $\mathcal{A}$ состоит из жордановых клеток вида (4.23), расположенных по главной диагонали; остальные коэффициенты матрицы линейного оператора равны нулю. Число этих клеток равно числу ниль-слоев в жордановом базисе. Порядок каждой клетки равен числу векторов в соответствующем ниль-слое.

Рассмотрим пример. Найти жорданов базис линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе матрицей (4.22).

Воспользуемся результатами, полученными в п. 4.3.1, при рассмотрении этого примера. Мы нашли собственные значения

$\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -2$ и базисы корневых подпространств $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, 2) = \langle \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \rangle$, где $\boldsymbol{e}_1 = (0, 1, 2, 0)$, $\boldsymbol{e}_2 = (1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_3 = (4, -1, 0, 1)$ и $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, -2) = \langle \boldsymbol{e}_4 \rangle$, $\boldsymbol{e}_4 = (0, 1, 0, -1)$. Построим жорданову таблицу для первого подпространства и преобразуем ее.

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ & & & & 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \sim \left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left|\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 1 & 2 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ & & & & 4 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right|.$$

Жорданов базис корневого подпространства $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, 2)$ состоит из двух ниль-слоев: $\boldsymbol{g}_1 = (0, 1, 2, 0)$, $\boldsymbol{g}_2 = (3, 0, 3, 0)$ и $\boldsymbol{g}_3 = (4, -1, 0, 1)$. Жорданов базис корневого подпространства $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, -2)$ состоит из одного вектора $\boldsymbol{g}_4 = (0, 1, 0, -1)$. Жорданов базис всего пространства состоит из векторов $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3, \boldsymbol{g}_4$. Матрица оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Она построена из трех жордановых клеток: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, (2) и (-2).

4.3.3. Жорданова нормальная форма матрицы

Рассмотрим квадратную матрицу $\boldsymbol{A}$ порядка n над полем $\mathbb{F}$, у которой характеристический многочлен разлагается на линейные множители над $\mathbb{F}$. Обозначим через $\mathcal{A}$ линейный оператор, заданный матрицей $\boldsymbol{A}$ в базисе $\boldsymbol{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \ldots, \boldsymbol{e}_n = (0, 0, \ldots, 1)$ пространства строк $\mathbb{F}_n$. Будем называть $\mathcal{A}$ *оператором, заданным* матрицей $\boldsymbol{A}$. Этот оператор имеет характеристический многочлен, совпадающий с характеристическим многочленом матрицы $\boldsymbol{A}$. Будем также называть собственные значения и собственные векторы линейного оператора $\mathcal{A}$ *собственными значениями* и *собственными векторами* матрицы $\boldsymbol{A}$. Применяя результаты предыдущих пунктов, мы можем построить жорданов базис для этого оператора. В этом базисе линейный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\hat{\boldsymbol{A}}$, состоящую из жордановых клеток. Пусть $\boldsymbol{T}$ — матрица перехода от исходного базиса к жорданову. Тогда $\hat{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$. Матрица $\hat{\boldsymbol{A}}$ называется *жордановой нормальной формой* матрицы $\boldsymbol{A}$. Мы видим, что матрица $\hat{\boldsymbol{A}}$ подобна матрице $\boldsymbol{A}$ и матрица $\boldsymbol{T}$ осуществляет подобие.

В силу доказанного в предыдущем пункте жорданова нормальная форма матрицы определяется однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток по главной диагонали.

Приведем примеры нахождения жордановой формы матрицы. Для данных матриц

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

найти жордановы формы и невырожденные матрицы, осуществляющие подобие.

Найдем характеристический многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$. Имеем, используя формулу (1.20) (на с. 45) разложения определителя по первой строке,

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} 4-x & -5 & 2 \\ 5 & -7-x & 3 \\ 6 & -9 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$= (4-x)\begin{vmatrix} -7-x & 3 \\ -9 & 4-x \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4-x \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 5 & -7-x \\ 6 & -9 \end{vmatrix} =$$

$$= (4-x)((x+7)(x-4)+27)+5(20-5x-18)+2(-45+42+6x) =$$

$$= (4-x)(x^2+3x-1) - 25x + 10 + 12x - 6 =$$
$$= -x^3 - 3x^2 + x + 4x^2 + 12x - 4 - 13x + 4 = -x^3 + x^2.$$

Таким образом, $f_A(x) = -x^3 + x^2 = x^2(1-x)$. Матрица $\boldsymbol{A}$ имеет собственные числа $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 1$. Найдем корневые подпространства линейного оператора $\mathcal{A}$, заданного матрицей $\boldsymbol{A}$. Для $\lambda_1 = 0$ имеем

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -5 & -7 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Умножая матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ на матрицу $\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ -5 & -7 & -9 \\ 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$ и приписывая полученную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ справа в последней расширенной матрице, продолжаем преобразования:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Базис корневого подпространства $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, 0)$ образуют векторы $\boldsymbol{e}_1 = (-1,-1,0)$ и $\boldsymbol{e}_2 = (-1,-2,-3)$. Чтобы найти жорданов базис, заметим, что $\boldsymbol{A}\boldsymbol{e}_1^\top = -\boldsymbol{e}_2^\top$ (это видно из второй строки расширенной матрицы). Таким образом, в качестве жорданова базиса корневого подпространства $\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, 0)$ можно взять векторы

$\boldsymbol{g}_1 = (-1,-1,0)$ и $\boldsymbol{g}_2 = (1,2,3)$. Собственному значению $\lambda_2 = 1$ соответствует собственный вектор $\boldsymbol{g}_3 = (1,1,1)$, который определяется по последнему столбцу расширенной матрицы. Записываем жорданову форму матрицы $\boldsymbol{A}$, строя ее из двух клеток — первая клетка порядка 2 с собственным значением $\lambda_1 = 0$, вторая клетка порядка 1 с собственным значением $\lambda_2 = 1$: $\hat{\boldsymbol{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; это не что иное, как матрица оператора $\mathcal{A}$ в жордановом базисе $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$. Матрица $\boldsymbol{T}$, осуществляющая подобие, суть матрица перехода от базиса, состоящего из строк единичной матрицы, к базису $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$. Она состоит из координат последних векторов, записанных в столбцы: $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Найдем характеристический многочлен матрицы $\boldsymbol{B}$:

$$f_B(x) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6-x & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1-x & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ -2 & -6-x & 13 \\ -1 & -4 & 8-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & -3 & 3 \\ 0 & 2-x & -3+2x \\ -1 & -4 & 8-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)\begin{vmatrix} 1-x & -3 & 0 \\ 0 & 2-x & -1+x \\ -1 & -4 & 4-x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)[(1-x)\begin{vmatrix} 2-x & -1+x \\ -4 & 4-x \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2-x & -1+x \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)^2(x^2-6x+8+4x-4) - 3(1-x)^2 =$$
$$= (1-x)^2(x^2-2x+1) = (x-1)^4.$$

Таким образом, $f_B(x) = (x-1)^4$. Матрица $\boldsymbol{B}$ имеет собственное значение 1 кратности 4. Линейный оператор $\mathcal{B}$, заданный матрицей $\boldsymbol{B}$, имеет в качестве единственного корневого подпространства все пространство столбцов $\mathbb{F}^4$. Найдем жорданов базис этого подпространства. Построим жорданову таблицу, исходя из базиса $\boldsymbol{e}_1 = (1,0,0,0)^\top$, $\boldsymbol{e}_2 = (0,1,0,0)^\top$, $\boldsymbol{e}_3 = (0,0,1,0)^\top$, $\boldsymbol{e}_4 = (0,0,0,1)^\top$. Для этого матрицу $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}_4 = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 0 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 \end{pmatrix}$ умножаем справа на $\boldsymbol{e}_1$, полученный столбец транспонируем и записываем в таблицу, а затем матрицу $\boldsymbol{B} - \boldsymbol{E}_4$ умножаем на полученный столбец до тех пор, пока не получится нулевой столбец. Проделываем это для всех векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ и заполняем жорданову таблицу, выравнивая ее по правому краю.

$$\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -7 & -3 & -4 & 9 & 3 & 9 & 3 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 13 & 3 & 7 & -18 & -6 & -18 & -6 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ -3 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & -3 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim \left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & -3 & 1 & 0 & 0 & -3 & -1 & -3 & -1 \\ & & & & 6 & 0 & 0 & 1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & -3 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & 6 & 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & & & & & -3 & -1 & 0 & -1 \\ & & & & & & & & 6 & 2 & 0 & 2 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 3 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right| \sim$$

$$\sim\left|\begin{array}{cccc|cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & -1 & 3 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & & & & & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right|.$$

В качестве жорданова базиса можно взять векторы $\boldsymbol{g}_1 = (1, 0, 0, 0)$, $\boldsymbol{g}_2 = (0, -2, 0, -1)$, $\boldsymbol{g}_3 = (3, 1, 3, 1)$, $\boldsymbol{g}_4 = (0, 0, 1, 0)$. Жорданова форма матрицы $\boldsymbol{B}$ состоит из двух клеток, первая порядка 3 и вторая порядка 1, соответствующих собственному значению 1. Имеем $\hat{\boldsymbol{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Задачи: [17], №171–200.

Глава 5

Евклидовы и унитарные линейные пространства и их линейные отображения

Здесь рассматриваются линейные пространства над полем $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$, в которых наряду с линейными операциями определено скалярное произведение векторов, что позволяет решать задачи, связанные с измерением длин векторов и углов между ними.

§ 5.1. Евклидовы и унитарные пространства

5.1.1. Аксиомы

Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство над полем действительных чисел $\mathbb{R}$ [над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$]. Оно называется *евклидовым* [*унитарным*] пространством, если удовлетворяет следующим аксиомам.

1. Для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ существует единственное число $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V \in \mathbb{R}$ $[(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V \in \mathbb{C}]$, называемое *скалярным произведением* векторов $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$. Если пространство $\boldsymbol{V}$ фиксировано, то вместо $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V$ пишем просто $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

2. Для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ справедливо $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})$ $[(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u}) = \overline{(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})}$, где $\overline{z}$ — число, сопряженное с комплексным числом $z]$.

3. Для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ справедливо $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v},\, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w}) + (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$.

4. Для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ $[\alpha \in \mathbb{C}]$ справедливо $(\alpha\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

5. Для любого $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{V}$ $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \in \mathbb{R}$, $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) \geq 0$ и $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{u}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$.

Следствия из аксиом собраны в следующем предложении.

Предложение 5.1.1. *Пусть $\boldsymbol{V}$ — евклидово [унитарное] пространство. Имеют место следующие утверждения:*

1) для любого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ справедливы равенства $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{o}) = 0 = (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{v})$;

2) для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ $[\alpha \in \mathbb{C}]$ справедливо равенство $(\boldsymbol{u}, \alpha\boldsymbol{v}) = \alpha(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$ $[(\boldsymbol{u}, \alpha\boldsymbol{v}) = \overline{\alpha}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})]$;

3) для любых $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}$ справедливо равенство $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{w})$.

Доказательство. Покажем, что $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{v}) = 0$ для любого $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Пусть $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. По аксиоме 3 имеем $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{o} + \boldsymbol{o}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{v}) + (\boldsymbol{o}, \boldsymbol{v})$, откуда $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{v}) = 0$. По аксиомам 2 из равенства $(\boldsymbol{o}, \boldsymbol{v}) = 0$ следует $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{o}) = 0$. Таким образом, утверждение 1) доказано.

Утверждение 2) является непосредственным следствием аксиом 2 и 4. Приведем соответствующие выкладки для случая унитарных пространств: $(\boldsymbol{u}, \alpha\boldsymbol{v}) = \overline{(\alpha\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})} = \overline{\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})} = \overline{\alpha}\overline{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{u})} = \overline{\alpha}(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})$.

Аналогично доказывается, что утверждение 3) есть непосредственное следствие аксиом 2 и 3. $\square$

5.1.2. Примеры

1. Линейное пространство обычных векторов является евклидовым пространством относительно скалярного произведения векторов (см. п. 2.1.6).

2. Линейное пространство строк $\mathbb{R}_n$ является евклидовым пространством относительно скалярного произведения, заданного формулой

$$((x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n.$$

Проверка аксиом осуществляется в этом и следующем примере непосредственно.

3. Линейное пространство строк $\mathbb{C}_n$ является унитарным пространством относительно скалярного произведения, заданного формулой

$$((x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (y_1, y_2, \ldots, y_n)) = x_1 \overline{y_1} + x_2 \overline{y_2} + \ldots + x_n \overline{y_n}.$$

4. Линейное пространство всех многочленов с вещественными коэффициентами является евклидовым пространством относительно скалярного произведения

$$(f(x), g(x)) = \int_\alpha^\beta f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

где α, β — фиксированные вещественные числа, $\alpha < \beta$. Проверка аксиом осуществляется здесь с использованием свойств определенного интеграла.

5.1.3. Неравенство Коши–Буняковского

Для любого вектора $\boldsymbol{x}$ в евклидовом или унитарном пространстве $\boldsymbol{V}$ его скалярный квадрат $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$ есть неотрицательное действительное число согласно аксиоме 5; поэтому корректно ввести *длину* вектора $\boldsymbol{x}$ формулой

$$|\boldsymbol{x}| = \sqrt{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})}$$

аналогично случаю обычных векторов трехмерного пространства. Неравенство, установленное в следующей теореме, называется *неравенством Коши–Буняковского.*

Теорема 5.1.1. *Пусть* $\boldsymbol{V}$ *— евклидово [унитарное] линейное пространство. Для любых векторов* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ *справедливо неравенство* $|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})| \leq |\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|$, *причем равенство имеет место тогда и только тогда, когда векторы* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Проведем доказательство для случая унитарного пространства; случай евклидова пространства рассматривается аналогично. Если $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ или $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{o}$, то $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$ и $|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}| = 0$, что и требуется доказать.

Пусть $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{o}$. Положим $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}$ для некоторого комплексного числа α и вычислим $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$:

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\alpha \boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{x}, \alpha \boldsymbol{y}) + (\alpha \boldsymbol{y}, \alpha \boldsymbol{y}) =$$
$$= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + \alpha(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) + \overline{\alpha}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \alpha\overline{\alpha}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}).$$

Заметим, что $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) > 0$ при любом α тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ линейно независимы, и в любом случае $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) \geq$ ≥ 0. Положим $\alpha = -\frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$. Тогда имеем, поскольку $(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ — действительное число, $\overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} = (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})$ и $\overline{\alpha} = -\frac{\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}}{(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})}$, откуда

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - \frac{\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) =$$
$$= (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) - 2\frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} + \frac{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})\overline{(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})}}{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y})} = |\boldsymbol{x}|^2 - \frac{|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2}{|\boldsymbol{y}|^2}.$$

Таким образом, $|\boldsymbol{x}|^2 - \dfrac{|(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2}{|\boldsymbol{y}|^2} \geq 0$, откуда $|\boldsymbol{x}|^2|\boldsymbol{y}|^2 \geq |(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})|^2$. Доказываемые утверждения теперь очевидны. □

Следствие 5.1.1. *Для любых векторов* $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ *евклидова [унитарного] пространства* $\boldsymbol{V}$ *и любого действительного [комплексного] числа* α *справедливы условия:*

1) $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}| \leq |\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|$ *(неравенство Минковского);*

2) $|\alpha\boldsymbol{x}| = |\alpha||\boldsymbol{x}|$.

Доказательство. Как и при доказательстве теоремы 5.1.1, первое утверждение докажем для случая унитарного пространства. Рассмотрим цепочку равенств и неравенств, обеспечиваемую неотрицательностью скалярного квадрата вектора, свойством $|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|$ модуля комплексных чисел и теоремой 5.1.1:

$$|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 = (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})| =$$
$$= |(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y})| \leq (\boldsymbol{x},\boldsymbol{x})+|(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})|+|\overline{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}|+(\boldsymbol{y},\boldsymbol{y}) \leq$$
$$\leq |x|^2+2|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|+|\boldsymbol{y}|^2 = (|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2,$$

откуда $|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}|^2 \leq (|\boldsymbol{x}|+|\boldsymbol{y}|)^2$. Неравенство Минковского непосредственно следует из полученного неравенства.

Второе утверждение непосредственно следует из определения длины вектора, аксиомы 5 и утверждения 2) предложения 5.1.1. □

В случае евклидова пространства *угол* между векторами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ определяется из формулы

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}}) = \frac{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})}{|\boldsymbol{x}||\boldsymbol{y}|}. \tag{5.1}$$

Неравенство Коши–Буняковского гарантирует, что правая часть в равенстве (5.1) принимает значения из промежутка $[-1,1]$ — области значений функции $\cos x$.

В случае унитарного пространства угол между векторами не определяется.

Всюду ниже в этом параграфе для рассмотрений, которые проводятся одинаковым образом для евклидовых и унитарных пространств, рассматривается случай унитарного пространства; евклидов случай получается из него игнорированием взятия комплексно сопряженного числа.

5.1.4. Ортогональность векторов. Процесс ортогонализации

Пусть $\boldsymbol{V}$ — евклидово или унитарное пространство. Векторы $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ из $\boldsymbol{V}$ называются *ортогональными*, если $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0$. Обозначать это будем так: $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$. Система векторов называется *ортогональной*, если любые два различных вектора этой системы ортогональны.

Предложение 5.1.2. *Ортогональная система попарно различных ненулевых векторов линейно независима.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ — произвольная ортогональная система попарно различных ненулевых векторов пространства $\boldsymbol{V}$. Предположим, что некоторая линейная комбинация этой системы равна нулевому вектору: $\alpha_1\boldsymbol{a}_1 + \alpha_2\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \alpha_k\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{o}$. Рассмотрим скалярное произведение обеих частей этого равенства на вектор $\boldsymbol{a}_i$ $(1 \le i \le k)$: $\alpha_1(\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_i) + \alpha_2(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_i) + \ldots + \alpha_k(\boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{a}_i) = 0$. Учитывая, что $(\boldsymbol{a}_j, \boldsymbol{a}_i) = 0$ при $i \ne j$, получаем $\alpha_i(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) = 0$. Поскольку $\boldsymbol{a}_i \ne o$, имеем $(\boldsymbol{a}_i, \boldsymbol{a}_i) > 0$, и потому $\alpha_i = 0$. Мы видим, что при всех $i = 1, 2, \ldots, k$ имеет место равенство $\alpha_i = 0$. Таким образом, система векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ линейно независима. □

В доказательстве следующей теоремы проводится так называемый *процесс ортогонализации* системы векторов. Он применим как к линейно независимым, так и к линейно зависимым системам векторов. В последнем случае на некоторых шагах получаются нулевые векторы.

Теорема 5.1.2. *Пусть* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *— произвольная линейно независимая система векторов евклидова или унитарного пространства* $\boldsymbol{V}$*. Тогда существует такая ортогональная система векторов* $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_k$*, что при всех* $s = 1, 2, \ldots, k$ *имеет место равенство* $\langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_s \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_s \rangle$.

Доказательство. Воспользуемся индукцией по k. При $k = 1$ возьмем $\boldsymbol{b}_1 = \boldsymbol{a}_1$, тогда равенство $\langle \boldsymbol{a}_1 \rangle = \langle \boldsymbol{b}_1 \rangle$ выполняется очевидным образом. Осуществим шаг индукции. Пусть для $k = r-1$ уже построена ортогональная система векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{r-1}$, удовлетворяющая требуемым условиям. Построим вектор $\boldsymbol{b}_r$ следующим образом. Положим

$$\boldsymbol{b}_r = \boldsymbol{a}_r + \gamma_1 \boldsymbol{b}_1 + \ldots + \gamma_{r-1} \boldsymbol{b}_{r-1}, \tag{5.2}$$

где коэффициенты γ_1, $\gamma_2, \ldots$, γ_{r-1} будут определены из условий $\boldsymbol{b}_r \perp \boldsymbol{b}_1$, $\boldsymbol{b}_r \perp \boldsymbol{b}_2, \ldots$, $\boldsymbol{b}_r \perp \boldsymbol{b}_{r-1}$. Имеем $(\boldsymbol{b}_r, \boldsymbol{b}_i) = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, r-1$, откуда $(\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_i) + \gamma_i (\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i) = 0$ (мы пользуемся ортогональностью системы векторов $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_{r-1}$). Таким образом, поскольку $\boldsymbol{b}_i \neq \boldsymbol{o}$, имеем

$$\gamma_i = -\frac{(\boldsymbol{a}_r, \boldsymbol{b}_i)}{(\boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{b}_i)}, \; i = 1, 2, \ldots, r-1,$$

и коэффициенты γ_1, $\gamma_2, \ldots$, γ_{r-1} определяются однозначно. По построению система $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{r-1}, \boldsymbol{b}_r$ ортогональна. Так как $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_{r-1} \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{r-1} \rangle$, из равенства (5.2) следует, что $\boldsymbol{a}_r$ линейно выражается через систему векторов $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$, а $\boldsymbol{b}_r$ линейно выражается через систему векторов $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$. Таким образом, $\langle \boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r \rangle = \langle \boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r \rangle$. В силу линейной независимости системы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_r$ система $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ также линейно независима, поэтому векторы $\boldsymbol{b}_1, \boldsymbol{b}_2, \ldots, \boldsymbol{b}_r$ отличны от нулевого вектора. Шаг индукции доказан. Построение вектора $\boldsymbol{b}_r$ составляет шаг процесса ортогонализации. $\square$

Таким образом, конечномерное евклидово или унитарное пространство всегда имеет ортогональный базис. В таком базисе легко определяются координаты вектора. Пусть $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n$ — ортогональный базис пространства $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{v}$ — его произвольный вектор. Имеем $\boldsymbol{v} = \beta_1\boldsymbol{g}_1 + \beta_2\boldsymbol{g}_2 + \ldots + \beta_n\boldsymbol{g}_n$. Домножая обе части этого равенства скалярно на $\boldsymbol{g}_i$ при $1 \leq i \leq n$ и пользуясь ортогональностью базиса, получаем $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{g}_i) = \beta_i(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_i)$, откуда находим i-ю координату вектора $\boldsymbol{v}$ в базисе $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \ldots, \boldsymbol{g}_n$:

$$\beta_i = \frac{(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{g}_i)}{(\boldsymbol{g}_i, \boldsymbol{g}_i)}. \tag{5.3}$$

Ортогональный базис, в котором длина каждого вектора равна 1, называется *ортонормированным.* Из произвольного ортогонального базиса можно получить ортонормированный, если умножить каждый базисный вектор на величину, обратную к его длине. Пусть $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots, \boldsymbol{e}_n$ — ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{V}$. Тогда координаты любого вектора $\boldsymbol{v}$ в этом базисе можно найти по формулам, получаемым из (5.3), с учетом ортонормированности базиса:

$$\alpha_i = (\boldsymbol{v}, \boldsymbol{e}_i),\ i = 1, 2, \ldots, n.$$

Скалярное произведение векторов легко вычисляется по их координатам в ортонормированном базисе; см. формулу (5.6) в следующем пункте.

5.1.5. Матрица Грама

Пусть $\boldsymbol{V}$ — евклидово или унитарное пространство. *Матрицей Грама* системы векторов $\mathbf{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_n)$ называется матрица

$$\boldsymbol{G}_{\mathbf{A}} = \begin{pmatrix} (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_n) \\ (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_1) & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_2) & \ldots & (\boldsymbol{a}_n, \boldsymbol{a}_n) \end{pmatrix}. \tag{5.4}$$

Из аксиомы 2 определения евклидовых и унитарных пространств следует, что в случае евклидова [унитарного] пространства $\boldsymbol{V}$ матрица $\boldsymbol{G}_{\mathbf{A}}$ является симметрической [эрмитовой].

Пусть $\mathbf{F} = (\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, \ldots, \boldsymbol{f}_n)$ — некоторый базис $\boldsymbol{V}$. Как по координатам векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ в этом базисе найти значение скалярного произведения $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$? Пусть $\boldsymbol{x} = \alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n$, $\boldsymbol{y} = \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + \beta_n \boldsymbol{f}_n$. Имеем, используя аксиомы евклидовых и унитарных пространств и следствия этих аксиом:

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) &= (\alpha_1 \boldsymbol{f}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + \alpha_n \boldsymbol{f}_n, \beta_1 \boldsymbol{f}_1 + \beta_2 \boldsymbol{f}_2 + \ldots + \beta_n \boldsymbol{f}_n) = \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\beta}_j (\boldsymbol{f}_i, \boldsymbol{f}_j) = ([\boldsymbol{x}]_{\mathbf{F}})^\top \boldsymbol{G}_{\mathbf{F}} \overline{[\boldsymbol{y}]}_{\mathbf{F}},
\end{aligned}
$$

т.е.

$$
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ([\boldsymbol{x}]_{\mathbf{F}})^\top \boldsymbol{G}_{\mathbf{F}} \overline{[\boldsymbol{y}]}_{\mathbf{F}}, \tag{5.5}
$$

где через $\boldsymbol{G}_{\mathbf{F}}$ обозначена матрица Грама базиса $\mathbf{F}$, а через $\overline{[\boldsymbol{y}]}_{\mathbf{F}}$ — столбец из чисел, комплексно сопряженных с числами столбца $[\boldsymbol{y}]_{\mathbf{F}}$.

Очевидно, что базис $\mathbf{F}$ является ортонормированным тогда и только тогда, когда его матрица Грама единичная. Применяя формулу (5.5) для ортонормированного базиса $\mathbf{E}$, приходим к следующему выражению скалярного произведения через координаты векторов в ортонормированном базисе:

$$
(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = ([\boldsymbol{x}]_{\mathbf{E}})^\top \overline{[\boldsymbol{y}]}_{\mathbf{E}}. \tag{5.6}
$$

Определитель матрицы Грама системы векторов $\mathbf{A}$ называется *определителем Грама* системы $\mathbf{A}$.

Теорема 5.1.3. *Для любой системы векторов определитель Грама есть неотрицательное вещественное число, которое равно нулю тогда и только тогда, когда эта система линейно зависима.*

Доказательство. Непосредственная проверка с использованием свойств определителей показывает, что определители Грама систем $\mathbf{A} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k)$ и $\mathbf{B} = (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_{k-1}, \boldsymbol{b}_k)$, где

$\boldsymbol{b}_k = \boldsymbol{a}_k + \gamma_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \gamma_{k-1}\boldsymbol{a}_{k-1}$, совпадают. Отсюда легко вывести, что если система $\mathbf{C}$ получается из системы $\mathbf{A}$ применением процесса ортогонализации, то $\mathsf{det}(\boldsymbol{G}_{\mathbf{C}}) = \mathsf{det}(\boldsymbol{G}_{\mathbf{A}})$. Для ортогональной системы векторов матрица Грама диагональна, со скалярными квадратами векторов системы (т.е. неотрицательными действительными числами) на главной диагонали. Среди этих чисел есть нуль тогда и только тогда, когда система $\mathbf{A}$ линейно зависима. □

Напомним, что для данной матрицы $\boldsymbol{A}$ через $\boldsymbol{A}^*$ обозначается сопряженная к $\boldsymbol{A}$ матрица.

Следствие 5.1.2. *Для любой матрицы $\boldsymbol{A}$ из $\mathbb{C}^{n\times k}$ справедливы равенства*

$$\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) = \mathsf{r}(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{A}).$$

Доказательство. Согласно утверждению 3) предложения 3.2.4 имеет место $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*) \le \mathsf{r}(\boldsymbol{A})$. Для доказательства противоположного неравенства заметим, что если в матрице $\boldsymbol{A}$ строки максимальной линейно независимой системы строк имеют номера $i_1, \ldots, i_r$, то минор в матрице $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*$ на пересечении строк и столбцов с этими номерами является определителем Грама указанной максимальной линейно независимой системы строк, рассматриваемой как система векторов соответствующего унитарного пространства, и потому отличен от нуля. □

5.1.6. Ортогональное дополнение

Пусть $\boldsymbol{V}$ — евклидово или унитарное пространство и $\mathbf{A} \subseteq \boldsymbol{V}$. Положим $\boldsymbol{A}^{\perp} = \{\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V} \mid \boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{a}$ для всех $\boldsymbol{a} \in \boldsymbol{V}\}$ и назовем $\boldsymbol{A}^{\perp}$ *ортогональным дополнением* к множеству векторов $\boldsymbol{A}$.

Следующее простое утверждение предлагается доказать читателю в качестве упражнения.

Предложение 5.1.3. *Пусть $\boldsymbol{V}$ — конечномерное евклидово или унитарное пространство и $\mathbf{A}, \mathbf{B} \subseteq \boldsymbol{V}$. Тогда включения $\mathbf{A} \subseteq \mathbf{B}$ и $\mathbf{B}^{\perp} \subseteq \mathbf{A}^{\perp}$ равносильны, и $\mathbf{A}^{\perp} = \langle \mathbf{A} \rangle^{\perp}$.*

Теорема 5.1.4. *Пусть $\boldsymbol{V}$ — конечномерное евклидово или унитарное пространство и $\mathbf{A} \subseteq \boldsymbol{V}$. Тогда $\boldsymbol{A}^{\perp}$ является линейным подпространством $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{V} = \langle \mathbf{A} \rangle \oplus \mathbf{A}^{\perp}$. В частности, если $\boldsymbol{U}$ — линейное подпространство $\boldsymbol{V}$, то $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{U}^{\perp}$.*

Доказательство. Непосредственная проверка с использованием аксиом евклидова или унитарного пространства показывает, что ортогональное дополнение к подмножеству замкнуто относительно взятия суммы векторов и произведения вектора на число, т.е. является линейным подпространством.

Покажем, что $\langle \mathbf{A} \rangle \cap \mathbf{A}^{\perp} = \{o\}$. Пусть $\boldsymbol{b} \in \langle \mathbf{A} \rangle \cap \mathbf{A}^{\perp}$. Тогда $\boldsymbol{b} = \alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s \boldsymbol{a}_s$ для некоторых $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_s \in \boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}$ для всех $\boldsymbol{a} \in \mathbf{A}$. В частности, $\boldsymbol{b} \perp \boldsymbol{a}_i$ для всех $i = 1, \ldots, s$. Следовательно, $(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}) = (\alpha_1 \boldsymbol{a}_1 + \ldots + \alpha_s \boldsymbol{a}_s,\ \boldsymbol{b}) = \alpha_1 (\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{b}) + \ldots + \alpha_s (\boldsymbol{a}_s, \boldsymbol{b}) = 0$. Отсюда $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$.

Убедимся, что $\boldsymbol{V} = \langle \mathbf{A} \rangle + \mathbf{A}^{\perp}$. Возьмем какой-либо ортогональный базис $\langle \mathbf{A} \rangle$ и дополним его некоторым ортогональным базисом $\mathbf{A}^{\perp}$. Получим конечную ортогональную систему векторов, так как $\boldsymbol{V}$ конечномерно. Предположим, что данная система не является базисом $\boldsymbol{V}$, и приведем это предположение к противоречию. В самом деле, в этом случае указанную систему можно дополнить до ортогонального базиса $\boldsymbol{V}$. Любой вектор этого базиса, не принадлежащий исходной системе, ортогонален всем векторам некоторого базиса подпространства $\langle \mathbf{A} \rangle$ и потому ортогонален каждому вектору из $\langle \mathbf{A} \rangle$, а значит, этот вектор ортогонален и каждому вектору из $\mathbf{A}$. Таким образом, он принадлежит $\mathbf{A}^{\perp}$ и потому линейно выражается через базис $\mathbf{A}^{\perp}$. Мы видим, что ортогональный базис $\boldsymbol{V}$ оказался линейно зависимой системой векторов, т.е. пришли к противоречию. □

Пусть $\boldsymbol{U}$ — линейное подпространство и $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$. Тогда существуют однозначно определенные векторы $\boldsymbol{v}_U \in \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{v}_{U^\perp} \in \boldsymbol{U}^\perp$ такие, что $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_U + \boldsymbol{v}_{U^\perp}$. Вектор $\boldsymbol{v}_U$ называется *ортогональной компонентой* [1] вектора $\boldsymbol{v}$ на подпространство $\boldsymbol{U}$, а $\boldsymbol{v}_{U^\perp}$ — *ортогональной составляющей* вектора $\boldsymbol{v}$ на подпространство $\boldsymbol{U}$.

Предложение 5.1.4. *Пусть* $\boldsymbol{V}$ *— конечномерное евклидово или унитарное пространство,* $\boldsymbol{U}, \boldsymbol{W}$ *— его линейные подпространства. Тогда*

1) $(\boldsymbol{U}^\perp)^\perp = \boldsymbol{U}$;

2) $(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W})^\perp = \boldsymbol{U}^\perp \cap \boldsymbol{W}^\perp$;

3) $(\boldsymbol{U} \cap \boldsymbol{W})^\perp = \boldsymbol{U}^\perp + \boldsymbol{W}^\perp$.

Доказательство. Докажем равенство 1). Из определения ортогонального дополнения следует, что $\boldsymbol{U} \subseteq (\boldsymbol{U}^\perp)^\perp$. Согласно теореме 5.1.4 имеем $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{U} \oplus \boldsymbol{U}^\perp = \boldsymbol{U}^\perp \oplus (\boldsymbol{U}^\perp)^\perp$, откуда в силу предложения 3.3.4 выводим $\mathsf{dim}\boldsymbol{U} = \mathsf{dim}(\boldsymbol{U}^\perp)^\perp$. По предложению 3.3.3 получаем требуемое равенство.

Установим равенство 2). Пусть $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W})^\perp$. Тогда $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ для любого $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{U} + \boldsymbol{W}$, в частности, $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{u}$ для любого $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{w}$ для любого $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Таким образом, $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}^\perp \cap \boldsymbol{W}^\perp$. Мы доказали, что $(\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W})^\perp \subseteq \boldsymbol{U}^\perp \cap \boldsymbol{W}^\perp$. Для доказательства обратного включения возьмем любой вектор $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}^\perp \cap \boldsymbol{W}^\perp$. Тогда $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{u}$ для любого $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{w}$ для любого $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$. Следовательно, $\boldsymbol{x} \perp (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$ для любых $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{W}$, т.е. $\boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{U} + \boldsymbol{W})^\perp$. Обратное включение доказано.

Равенство 3) получается из 2) и 1) несложными рассуждениями. $\square$

[1] Для этого понятия применяется также термин "ортогональная проекция"; в частности, он был использован в [16].

5.1.7. Расстояния и углы между векторами и линейными многообразиями

Пусть $\boldsymbol{V}$ — евклидово или унитарное пространство. *Расстоянием* между вектором $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ и линейным многообразием $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a}+\boldsymbol{U}$ называется минимум длин векторов $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}$, когда $\boldsymbol{x}$ пробегает векторы из $\boldsymbol{L}$. *Расстоянием* между линейными многообразиями $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{W}$ называется минимум длин векторов $\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}$, когда $\boldsymbol{x}$ пробегает векторы из $\boldsymbol{L}$, а $\boldsymbol{y}$ пробегает векторы из $\boldsymbol{M}$.

Предложение 5.1.5. *Расстояние между вектором $\boldsymbol{v}$ и линейным многообразием $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$ всегда существует и равно длине ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{a}$ на линейное подпространство $\boldsymbol{U}$.*

Расстояние между линейными многообразиями $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{W}$ всегда существует и равно длине ортогональной составляющей вектора $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ на линейное подпространство $\boldsymbol{U}+\boldsymbol{W}$.

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{a} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{\perp}$, где $\boldsymbol{u}$ — ортогональная компонента, а $\boldsymbol{u}^{\perp}$ — ортогональная составляющая вектора $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{a}$ на линейное подпространство $\boldsymbol{U}$. Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{u}_1$ — любой вектор из $\boldsymbol{L}$. Тогда $\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x} = \boldsymbol{v} - \boldsymbol{a} - \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{u}^{\perp} - \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}^{\perp}$. Отсюда $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x})^2 = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}^{\perp})(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{u}^{\perp}) = (\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1)^2 + (\boldsymbol{u}^{\perp})^2$, поскольку $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1 \in \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{u}^{\perp} \in \boldsymbol{U}^{\perp}$. Таким образом, $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x})^2$ достигает наименьшего значения при $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{o}$ и это значение равно $(\boldsymbol{u}^{\perp})^2$. Так как $|\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x}|$ достигает наименьшего значения вместе с $(\boldsymbol{v} - \boldsymbol{x})^2$, получаем первое утверждение предложения.

Второе утверждение доказывается сходным образом. □

Пусть $\boldsymbol{V}$ — евклидово пространство. *Углом* между ненулевым вектором $\boldsymbol{v}$ и ненулевым линейным подпространством $\boldsymbol{U}$ называется наименьший из углов между векторами $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{x}$, когда $\boldsymbol{x}$ пробегает $\boldsymbol{U} \setminus \{\boldsymbol{o}\}$. *Углом* между ненулевым вектором $\boldsymbol{v}$ и линейным многообразием $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{U}$ размерности больше нуля называется угол между $\boldsymbol{v}$ и направляющим подпространством $\boldsymbol{U}$ многообразия $\boldsymbol{L}$.

Предложение 5.1.6. *Угол между ненулевым вектором $\boldsymbol{v}$ и ненулевым линейным подпространством $\boldsymbol{U}$ существует и равен углу между $\boldsymbol{v}$ и ортогональной компонентой $\boldsymbol{v}$ на $\boldsymbol{U}$, если эта компонента отлична от нуля, а если она равна нулю, то угол равен $\pi/2$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{x}$ — произвольный ненулевой вектор подпространства $\boldsymbol{U}$. Так как, очевидно, $\cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}})$ не зависит от длины вектора $\boldsymbol{x}$, будем считать, что $|\boldsymbol{x}| = 1$. Тогда $\cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}}) = (\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})/|\boldsymbol{v}|$. Поскольку $|\boldsymbol{v}|$ — величина постоянная, $\cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}})$ зависит лишь от скалярного произведения $(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x})$. Представив $\boldsymbol{v}$ в виде $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^{\perp}$, где $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{u}^{\perp} \in \boldsymbol{U}^{\perp}$, имеем

$$(\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}^{\perp},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{u}^{\perp},\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}).$$

Так как $\cos\alpha$ — убывающая функция при $\alpha \in [0,\pi]$, наименьшее значение угла получается при наибольшем значении его косинуса, т.е. при наибольшем значении скалярного произведения $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})$. Если $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, то при любом $\boldsymbol{x}$ имеем $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) = 0$, т.е. $\cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}})$ имеет постоянное значение, равное нулю. При этом по определению угол между $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{U}$ равен $\pi/2$. Предположим, что $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{o}$. Согласно теореме 5.1.1 имеем $|(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x})| \leq |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{x}| = |\boldsymbol{u}|$. При $\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|}\boldsymbol{u}$ получаем $(\boldsymbol{u},\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{u}|$, т.е. $\cos(\widehat{\boldsymbol{v},\boldsymbol{x}})$ принимает наибольшее возможное значение при $\boldsymbol{x} = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|}\boldsymbol{u}$, а следовательно и для вектора $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u}$. $\square$

5.1.8. Примеры решения задач

Во всех задачах векторы задаются своими координатами в некотором ортонормированном базисе евклидова или унитарного пространства.

1. Найти скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a} = (i, 1-i, 2+i)$ и $\boldsymbol{b} = (1-2i, 3+i, 2-3i)$ и длину вектора $\boldsymbol{a}$.

Решение. Согласно формуле (5.6) имеем[1] $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) = i(1+2i) + (1-i)(3-i) + (2+i)(2+3i) = i-2+3-3i-i-1+4+2i+6i-3 = 1+5i$.

Аналогично находим скалярный квадрат вектора $\boldsymbol{a}$: $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{a}) = i(-i) + (1-i)(1+i) + (2+i)(2-i) = 1+2+5 = 8$; отсюда $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

2. Найти ортогональный базис подпространства, порожденного векторами $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (2,1,2,1)$, $\boldsymbol{a}_3 = (3,2,3,2)$, $\boldsymbol{a}_4 = (1,0,2,1)$.

Решение. Применим процесс ортогонализации к векторам $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{a}_4$. Положим $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{a}_1$. Второй вектор будем искать в виде $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \alpha_{21}\boldsymbol{e}_1$. Неизвестный коэффициент α_{21} найдем из условия $(\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1) = 0$. Имеем $\alpha_{21} = -\frac{(\boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{e}_1)}{\boldsymbol{e}_1^2} = -\frac{6}{4} = -\frac{3}{2}$ и $\boldsymbol{e}_2 = \boldsymbol{a}_2 - \frac{3}{2}\boldsymbol{e}_1 = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$. Третий вектор ищем в виде $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_3 + \alpha_{31}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{32}\boldsymbol{e}_2$. Неизвестные коэффициенты α_{31}, α_{32} найдем из условий $(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_1) = 0$ и $(\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2) = 0$. Имеем $\alpha_{31} = -\frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_1)}{\boldsymbol{e}_1^2} = -\frac{5}{2}$, $\alpha_{32} = -\frac{(\boldsymbol{a}_3, \boldsymbol{e}_2)}{\boldsymbol{e}_2^2} = -1$. Находим $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_3 - \frac{5}{2}\boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 = (0,0,0,0)$. Это говорит о том, что векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ линейно зависимы. При нахождении ортогонального базиса вектор $\boldsymbol{a}_3$ можно отбросить. Ищем по-прежнему третий вектор в виде $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_4 + \alpha_{41}\boldsymbol{e}_1 + \alpha_{42}\boldsymbol{e}_2$. Аналогично проделанному выше имеем $\alpha_{41} = -\frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{e}_1)}{\boldsymbol{e}_1^2} = -1$, $\alpha_{42} = -\frac{(\boldsymbol{a}_4, \boldsymbol{e}_2)}{\boldsymbol{e}_2^2} = -1$ и $\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{a}_4 - \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_2 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Таким образом, ортогональный базис данного подпространства образуют векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.

3. Найти ортогональное дополнение подпространства, порожденного векторами $\boldsymbol{a}_1 = (1,1,1,1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1,2,1,2)$.

Решение. Искомое ортогональное дополнение состоит из векторов, ортогональных $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2$. Обозначим координаты такого про-

[1] Вторые множители в произведениях суть числа, комплексно сопряженные с координатами вектора b.

извольного вектора через $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{x}_3, \boldsymbol{x}_4$. Для введенных неизвестных имеем однородную систему линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

Методом Гаусса–Жордана находим общее решение данной системы $x_1 = -x_3$, $x_2 = -x_4$. Фундаментальная система решений рассматриваемой системы линейных уравнений образует базис ортогонального дополнения: $\boldsymbol{b}_1 = (-1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{b}_2 = (0, -1, 0, 1)$.

4. Найти ортогональную компоненту и ортогональную составляющую вектора $\boldsymbol{x} = (4, -4, 12, 8)$ на подпространство $\boldsymbol{U}$, порожденное векторами $\boldsymbol{a}_1 = (1, 1, 1, 1)$, $\boldsymbol{a}_2 = (1, 2, 1, 2)$.

Решение. Находим ортогональный базис подпространства $\boldsymbol{U}$ с помощью процесса ортогонализации. Имеем $\boldsymbol{f}_1 = \boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{f}_2 = \boldsymbol{a}_2 + \alpha \boldsymbol{e}_1$; $\alpha = -\frac{3}{2}$ и $\boldsymbol{f}_2 = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Заменим вектор $\boldsymbol{f}_2$ на $\boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{f}_2 = (-1, 1, -1, 1)$. Ясно, что векторы $\boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{f}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$ образуют ортогональный базис $\boldsymbol{U}$. Затем находим базис $\boldsymbol{U}^{\perp}$, как сделано в предыдущей задаче. При необходимости применяем процесс ортогонализации к полученным векторам. Используя решение предыдущей задачи, возьмем векторы $\boldsymbol{e}_3 = (-1, 0, 1, 0)$, $\boldsymbol{e}_4 = (0, -1, 0, 1)$. Они ортогональны, поэтому процесс ортогонализации применять не требуется. Векторы $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4$ образуют ортогональный базис пространства $\boldsymbol{V}$. Разложим вектор $\boldsymbol{x}$ по этому базису, используя формулы (5.3): $\boldsymbol{x} = \beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta_2 \boldsymbol{e}_2 + \beta_3 \boldsymbol{e}_3 + \beta_4 \boldsymbol{e}_4$, $\beta_i = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{e}_i)/\boldsymbol{e}_i^2$, $\boldsymbol{x} = 5\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 + 4\boldsymbol{e}_3 + 6\boldsymbol{e}_4$. Так как $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2 \in \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_4 \in \boldsymbol{U}^{\perp}$, заключаем, что ортогональная компонента $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{U}$ равна $5\boldsymbol{e}_1 - 3\boldsymbol{e}_2 = (8, 2, 8, 2)$ и ортогональная составляющая $\boldsymbol{x}$ на $\boldsymbol{U}$ равна $4\boldsymbol{e}_3 + 6\boldsymbol{e}_4 = (-4, -6, 4, 6)$.

§ 5.2. Линейные отображения и операторы евклидовых и унитарных пространств

Как и выше, всюду в этом параграфе в рассмотрениях, которые проводятся одинаковым образом для евклидовых и унитарных пространств, рассуждения проводятся лишь для случая унитарного пространства; евклидов случай получается из него игнорированием взятия комплексно сопряженного числа.

5.2.1. Сопряженное отображение

Следующее простое утверждение будет часто использоваться.

Лемма 5.2.1. *Пусть* $\boldsymbol{V}$ *— евклидово или унитарное пространство и* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}$*. Если для любого* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ *имеет место равенство* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b})$*, то* $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$*.*

Доказательство. Имеем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{b}) = 0$, откуда $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0$. Полагая $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, получаем $(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}, \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = 0$, откуда $\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} = \boldsymbol{o}$ и $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$. □

Для определения сопряженного отображения нам потребуется следующие определение и утверждение. *Линейным функционалом* на линейном пространстве $\boldsymbol{V}$ над полем $\mathbb{F}$ называется всякое линейное отображение из $\boldsymbol{V}$ в $\mathbb{F}$, рассматриваемое как одномерное подпространство над собой.

Предложение 5.2.1. *Пусть* $\mathcal{F}$ *— линейный функционал, определенный на евклидовом или унитарном линейном пространстве* $\boldsymbol{V}$*. Тогда существует единственный вектор* $\boldsymbol{a}_{\mathcal{F}} \in \boldsymbol{V}$ *такой, что* $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_{\mathcal{F}})$ *для любого* $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$*.*

Доказательство. Если $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = 0$ для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, то положим $\boldsymbol{a}_{\mathcal{F}} = \boldsymbol{o}$. Предположим, что $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) \neq 0$ для некоторого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$.

Тогда ядро $\boldsymbol{V}_{\mathcal{F}}$ функционала $\mathcal{F}$ отлично от $\boldsymbol{V}$, и поэтому существует ненулевой вектор $\boldsymbol{b}$, ортогональный ко всем векторам из $\boldsymbol{V}_{\mathcal{F}}$. Будем искать вектор $\boldsymbol{a}_{\mathcal{F}}$ в виде $\gamma\boldsymbol{b}$, где γ — неопределенный коэффициент. Пусть $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Положим $\mathcal{F}(\boldsymbol{b}) = \beta$, $\mathcal{F}(\boldsymbol{x}) = \xi$. Имеем $\mathcal{F}(\boldsymbol{x} - \frac{\xi}{\beta}\boldsymbol{b}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{x}) - \frac{\xi}{\beta}\mathcal{F}(\boldsymbol{b}) = 0$, откуда $\boldsymbol{x} - \frac{\xi}{\beta}\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{V}_{\mathcal{F}}$. Итак, $\boldsymbol{x} = \frac{\xi}{\beta}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{w}$ для некоторого $\boldsymbol{w} \in \boldsymbol{V}_{\mathcal{F}}$. Учитывая, что $(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}) = 0$, получаем $(\boldsymbol{x}, \gamma\boldsymbol{b}) = (\frac{\xi}{\beta}\boldsymbol{b} + \boldsymbol{w}, \gamma\boldsymbol{b}) = \frac{\xi}{\beta}\overline{\gamma}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b})$. Полагая $\gamma = \frac{\overline{\beta}}{(\boldsymbol{b},\boldsymbol{b})}$, видим,что тогда $(\boldsymbol{x}, \gamma\boldsymbol{b}) = \xi = \mathcal{F}(\boldsymbol{x})$ при любом $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Полагая $\boldsymbol{a}_{\mathcal{F}} = \gamma\boldsymbol{b}$ с найденным значением γ, получаем требуемое утверждение о существовании вектора $\boldsymbol{a}_{\mathcal{F}}$. Согласно лемме 5.2.1 вектор $\boldsymbol{a}_{\mathcal{F}}$ определен однозначно. $\square$

Следствие 5.2.1. *Пусть $\boldsymbol{V}$ — евклидово или унитарное пространство. Тогда все линейные функционалы на $\boldsymbol{V}$ исчерпываются отображениями $\boldsymbol{x} \mapsto (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a})$, где $\boldsymbol{a}$ — фиксированный вектор из $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{x}$ пробегает все векторы из $\boldsymbol{V}$.*

Теорема 5.2.1. *Пусть $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ — евклидовы или унитарные пространства. Для любого линейного отображения $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ существует единственное линейное отображение $\mathcal{A}^* : \boldsymbol{W} \longrightarrow \boldsymbol{V}$, называемое сопряженным с $\mathcal{A}$ отображением, для которого*

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y})) \text{ при любых } \boldsymbol{x} \in V,\ \boldsymbol{y} \in W. \tag{5.7}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{A} : \boldsymbol{V} \longrightarrow \boldsymbol{W}$ — линейное отображение. Зафиксируем вектор $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}$ и рассмотрим функцию[1] $\mathcal{F}_y : \boldsymbol{V} \longrightarrow \mathbb{F}$, сопоставляющую каждому вектору $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ число $(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$. Так как $\mathcal{A}$ — линейное отображение, по свойствам скалярного произведения имеем для любых $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in \boldsymbol{V}$ и любого $\gamma \in \mathbb{F}$

$$\mathcal{F}_y(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2) = (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1) + \mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2),\ \boldsymbol{y}) =$$

[1] Здесь $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ для случая евклидовых пространств и $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ для случая унитарных пространств.

$$= (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{y}) + (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_2), \boldsymbol{y}) = \mathcal{F}(\boldsymbol{x}_1) + \mathcal{F}(\boldsymbol{x}_2);$$

$$\mathcal{F}(\gamma\boldsymbol{x}_1) = (\mathcal{A}(\gamma\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{y}) = (\gamma\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{y}) = \gamma(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}_1), \boldsymbol{y}) = \gamma\mathcal{F}_y(\boldsymbol{x}_1).$$

Таким образом, $\mathcal{F}_y$ есть линейный функционал на пространстве $\boldsymbol{V}$. Согласно предложению 5.2.1 существует единственный вектор $\boldsymbol{a}_y \in V$, для которого $\mathcal{F}_y(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{a}_y)$ при всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$. Положим $\mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}) = \boldsymbol{a}_y$. Получаем отображение $\mathcal{A}^*$ из $\boldsymbol{W}$ в $\boldsymbol{V}$.

Докажем, что отображение $\mathcal{A}^*$ является линейным. Пусть $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2 \in \boldsymbol{W}$. Для произвольного $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ имеем $(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)) = (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}_1) + (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}_2) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_1)) + (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_2)) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_1) + \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_2))$, т.е. для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ справедливо равенство $(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2)) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_1) + \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_2))$. По лемме 5.2.1 заключаем, что $\mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_1 + \boldsymbol{y}_2) = \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_1) + \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}_2)$. Аналогично проверяется, что $\mathcal{A}^*(\gamma\boldsymbol{y}) = \gamma\mathcal{A}^*(\boldsymbol{y})$ при любом $\gamma \in \mathbb{F}$ и любом $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}$. □

Теорема 5.2.2. *Пусть $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ — евклидовы или унитарные пространства, M — базис $\boldsymbol{V}$, N — базис $\boldsymbol{W}$ с матрицами Грама $\boldsymbol{G}_{\mathbf{M}}$ и $\boldsymbol{G}_{\mathbf{N}}$ соответственно, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — линейные отображения из $\boldsymbol{V}$ в $\boldsymbol{W}$ с матрицами $\boldsymbol{A}_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ и $\boldsymbol{B}_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$. Тогда матрица $\boldsymbol{A}^*_{\mathbf{N},\mathbf{M}}$ сопряженного отображения $\mathcal{A}^*$ выражается формулой*

$$\overline{\boldsymbol{A}^*}_{\mathbf{N},\mathbf{M}} = \boldsymbol{G}_{\mathbf{M}}^{-1}\boldsymbol{A}_{\mathbf{M},\mathbf{N}}^{\top}\boldsymbol{G}_{\mathbf{N}}. \tag{5.8}$$

В случае, когда базисы $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ ортонормированные, для матрицы сопряженного отображения справедлива более простая формула

$$\boldsymbol{A}^*_{\mathbf{N},\mathbf{M}} = (\boldsymbol{A}_{\mathrm{M},\mathrm{N}})^*. \tag{5.9}$$

Имеют место формулы

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})^* = \mathcal{A}^* + \mathcal{B}^*; \tag{5.10}$$

$$(\gamma\mathcal{A})^* = \overline{\gamma}\mathcal{A}^*; \tag{5.11}$$

$$\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}. \tag{5.12}$$

Если $\boldsymbol{Z}$ — евклидово или унитарное пространство и $\mathcal{C} : \boldsymbol{W} \longrightarrow \boldsymbol{Z}$ — линейное отображение, то $(\mathcal{B}\mathcal{C})^* = \mathcal{C}^*\mathcal{B}^*$.

Доказательство. Для доказательства равенства (5.8) зафиксируем произвольные векторы $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}$ и рассмотрим их столбцы координат $[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{M}}$ и $[\boldsymbol{y}]_{\mathrm{N}}$ в базисах M и N соответственно. Положим $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\mathrm{M},\mathrm{N}}$ и $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*_{\mathrm{N},\mathrm{M}}$. Тогда согласно формуле (4.6) имеем $[\mathcal{A}(\boldsymbol{x})]_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{M}}$, $[\mathcal{A}^*(\boldsymbol{y})]_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{A}^*[\boldsymbol{y}]_{\mathrm{N}}$. По формуле (5.5) получаем

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{M}})^\top \boldsymbol{G}_{\mathrm{N}} \overline{[\boldsymbol{y}]}_{\mathrm{N}} = [\boldsymbol{x}]_{\mathrm{M}}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{G}_{\mathrm{N}} \overline{[\boldsymbol{y}]}_{\mathrm{N}},$$

$$(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y})) = [\boldsymbol{x}]_{\mathrm{M}}^\top \boldsymbol{G}_{\mathrm{M}} \overline{\boldsymbol{A}^*[\boldsymbol{y}]}_{\mathrm{N}} = [\boldsymbol{x}]_{\mathrm{M}}^\top \boldsymbol{G}_{\mathrm{M}} \overline{\boldsymbol{A}^*[\boldsymbol{y}]}_{\mathrm{N}}.$$

Таким образом, для любых столбцов $[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{M}}$ и $[\boldsymbol{y}]_{\mathrm{N}}$ имеют место равенства $[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{M}}^\top \boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{G}_{\mathrm{N}} \overline{[\boldsymbol{y}]}_{\mathrm{N}} = [\boldsymbol{x}]_{\mathrm{M}}^\top \boldsymbol{G}_{\mathrm{M}} \overline{\boldsymbol{A}^*[\boldsymbol{y}]}_{\mathrm{N}}$. Беря в качестве $[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{M}}$ столбцы единичной матрицы порядка $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}$, а в качестве $[\boldsymbol{y}]_{\mathrm{N}}$ столбцы единичной матрицы порядка $\mathsf{dim}\boldsymbol{W}$, приходим к равенству $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{G}_{\mathrm{N}} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{M}} \overline{\boldsymbol{A}^*}$. В силу теоремы 5.1.3 матрица $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$ невырожденная. Согласно теореме 1.2.4 она обратима. Формула (5.8) непосредственно получается из последнего равенства.

Формулы (5.10) и (5.11) доказываются сходным образом, и мы для определенности установим лишь первую из них. Для всех $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}$ имеем $(\boldsymbol{x}, (\mathcal{A}+\mathcal{B})^*(\boldsymbol{y})) = ((\mathcal{A}+\mathcal{B})(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})+(\mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}))+(\boldsymbol{x}, \mathcal{B}^*(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y})+\mathcal{B}^*(\boldsymbol{y}))$. Таким образом, для любого $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ справедливо равенство $(\boldsymbol{x}, (\mathcal{A}+\mathcal{B})^*(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}) + \mathcal{B}^*(\boldsymbol{y}))$. Опираясь на лемму 5.2.1, констатируем, что $(\mathcal{A}+\mathcal{B})^*(\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}) + \mathcal{B}^*(\boldsymbol{y})$. Так как последнее равенство имеет место для любого $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}$, по определению получаем формулу (5.10).

Формула (5.12) получается из равенств $(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y})) = \overline{(\mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}), \boldsymbol{x})} = \overline{(\boldsymbol{y}, \mathcal{A}^{**}(\boldsymbol{x}))} = (\mathcal{A}^{**}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{y})$, имеющих место при любых $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{W}$, применением леммы 5.2.1.

Для доказательства последнего утверждения теоремы рассмотрим произвольные векторы $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}$. Имеем

$$\begin{aligned}((\mathcal{B}\mathcal{C})(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}) &= (\mathcal{C}(\mathcal{B}(\boldsymbol{x})), \boldsymbol{z}) = (\mathcal{B}(\boldsymbol{x}), \mathcal{C}^*(\boldsymbol{z})) = \\ &= (\boldsymbol{x}, \mathcal{B}^*(\mathcal{C}^*(\boldsymbol{z}))) = (\boldsymbol{x}, (\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*)(\boldsymbol{z})).\end{aligned}$$

Таким образом, для любых векторов $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}$ справедливо равенство $((\mathcal{BC})(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{x}, (\mathcal{C}^*\mathcal{B}^*)(\boldsymbol{z}))$, откуда по теореме 5.2.1 получаем требуемое равенство $(\mathcal{BC})^* = \mathcal{C}^*\mathcal{B}^*$. □

Рассмотрим пример. Линейное отображение $\mathcal{A}$ евклидова пространства строк $\mathbb{R}_3$ в пространство $\mathbb{R}_2$ задано матрицей

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

в базисах

$$\mathrm{M} = (\boldsymbol{e}_1 = (1,0,1);\ \boldsymbol{e}_2 = (0,1,1);\ \boldsymbol{e}_3 = (1,1,1))$$

и

$$\mathrm{N} = (\boldsymbol{f}_1 = (1,2);\ \boldsymbol{f}_2 = (2,1)).$$

Найти матрицу $\boldsymbol{A}_1$ сопряженного отображения $\mathcal{A}^*$ в тех же базисах.

Решение. Найдем матрицы Грама базисов M и N: $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{G}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$. Затем найдем обратную матрицу к $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$: $\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Теперь найдем матрицу $\boldsymbol{A}_1$ по формуле (5.8). Сначала вычислим

$$\boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}^{-1}\boldsymbol{A}^{\top} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ -1 & -8 \\ 2 & 13 \end{pmatrix},$$

а затем найдем

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}^{-1}\boldsymbol{A}^{\top}\boldsymbol{G}_{\mathrm{N}} = \begin{pmatrix} -1 & -10 \\ -1 & -8 \\ 2 & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -45 & -54 \\ -37 & -44 \\ 62 & 73 \end{pmatrix}.$$

Итак, матрица сопряженного оператора имеет вид

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} -45 & -54 \\ -37 & -44 \\ 62 & 73 \end{pmatrix}.$$

5.2.2. Нормальные операторы

Рассмотрим теперь линейные операторы на евклидовом или унитарном пространстве $\boldsymbol{V}$. Для каждого такого оператора $\mathcal{A}$ определен сопряженный оператор $\mathcal{A}^*$. Матрица сопряженного оператора определяется в следующем утверждении, получающемся из теоремы 5.2.2.

Предложение 5.2.2. *Пусть* M — *базис евклидова или унитарного пространства* $\boldsymbol{V}$, $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}_{\mathrm{M}}$ — *его матрица Грама и* $\mathcal{A}$ — *линейный оператор. Тогда матрицы оператора* $\mathcal{A}$ *и сопряженного оператора* $\mathcal{A}^*$ *связаны формулой* $\boldsymbol{A}^*_{\mathrm{M}} = \boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{A}^{\top}_{\mathrm{M}}\boldsymbol{G}$. *Если* M— *ортонормированный базис, то* $\boldsymbol{A}^*_{\mathrm{M}} = (\boldsymbol{A}_{\mathrm{M}})^*$.

Линейный оператор $\mathcal{A}$ евклидова или унитарного пространства называется *нормальным*, если $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, т.е. если оператор перестановочен со своим сопряженным оператором. Это свойство равносильно тому, что для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ справедливо равенство

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = (\mathcal{A}^*(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}^*(\boldsymbol{y})). \tag{5.13}$$

В самом деле, левая часть равенства (5.13) равна $(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(\boldsymbol{y})))$, а правая — $(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^{**}(\mathcal{A}^*(\boldsymbol{y}))) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}(\mathcal{A}^*(\boldsymbol{y})))$. Применение леммы 5.2.1 влечет требуемое.

Лемма 5.2.2. *Для любого нормального оператора* $\mathcal{A}$ *на евклидовом или унитарном пространстве* $\boldsymbol{V}$ *и любого числа* α *оператор* $\mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$ *является нормальным.*

Доказательство. Имеем по теореме 5.2.2 $(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^* = (\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})(\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathcal{E}) = \mathcal{A}\mathcal{A}^*-\alpha\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathcal{A}+\alpha\overline{\alpha}\mathcal{E} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}-\alpha\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathcal{A}+\alpha\overline{\alpha}\mathcal{E} = (\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathcal{E})(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E}) = (\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^*(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})$, что и требуется доказать. □

Лемма 5.2.3. *Если $\boldsymbol{v}$ — собственный вектор нормального оператора $\mathcal{A}$, принадлежащий собственному значению α, то $\boldsymbol{v}$ является собственным вектором оператора $\mathcal{A}^*$, принадлежащим собственному значению $\overline{\alpha}$.*

Доказательство. Так как $(\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$, заключаем, что $((\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})(\boldsymbol{v}))^2 = 0$. В силу леммы 5.2.2 и равенства (5.13) имеем $((\mathcal{A}-\alpha\mathcal{E})^*(\boldsymbol{v}))^2 = 0$, откуда $((\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathcal{E})(\boldsymbol{v}))^2 = 0$, т.е. $(\mathcal{A}^*-\overline{\alpha}\mathcal{E})(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{o}$. Следовательно, $\boldsymbol{v}$ есть собственный вектор оператора $\mathcal{A}^*$, принадлежащий собственному значению $\overline{\alpha}$. □

Лемма 5.2.4. *Собственные векторы нормального линейного оператора, принадлежащие различным собственным значениям, ортогональны.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ — собственные векторы нормального оператора, принадлежащие различным собственным значениям α, β. В силу условия (5.7) имеем $(\mathcal{A}(\boldsymbol{v}), \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{w}))$. По лемме 5.2.3 получаем $(\alpha\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{v}, \overline{\beta}\boldsymbol{w})$. Отсюда следует, что $\alpha(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = \beta(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w})$. Так как $\alpha \neq \beta$, получаем $(\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) = 0$, что и требуется доказать. □

Лемма 5.2.5. *Если $\mathcal{A}$ — произвольный оператор евклидова или унитарного пространства, то для любого инвариантного относительно $\mathcal{A}$ подпространства $\boldsymbol{U}$ его ортогональное дополнение инвариантно относительно $\mathcal{A}^*$.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{U}$ — подпространство, инвариантное относительно $\mathcal{A}$. Возьмем произвольный вектор $\boldsymbol{x}$ из $\boldsymbol{U}^\perp$ и покажем, что $\mathcal{A}^*(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{U}^\perp$. Для любого $\boldsymbol{u} \in \boldsymbol{U}$ имеем $(\boldsymbol{u}, \mathcal{A}^*(\boldsymbol{x})) =$

$= (\mathcal{A}(\boldsymbol{u}), \boldsymbol{x}) = 0$, поскольку $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}) \in \boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{U}^{\perp}$. Следовательно, $\mathcal{A}^*(\boldsymbol{x}) \in \boldsymbol{U}^{\perp}$. □

Следующее утверждение показывает, что нормальные операторы в унитарном пространстве имеют простую структуру.

Теорема 5.2.3. *Для любого нормального оператора унитарного пространства $\boldsymbol{V}$ существует ортонормированный базис $\boldsymbol{V}$, состоящий из собственных векторов этого оператора.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор унитарного пространства $\boldsymbol{V}$. Воспользуемся индукцией по $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}$. Для одномерного пространства утверждение очевидно. Пусть оно доказано для всех нормальных линейных операторов, действующих на унитарных пространствах размерности меньше $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}$. Так как многочлен с комплексными коэффициентами разлагается над полем комплексных чисел на линейные множители (см. следствие 7.2.1), все собственные значения $\mathcal{A}$ являются комплексными числами. Пусть α — собственное значение $\mathcal{A}$ и $\boldsymbol{u}$ — принадлежащий ему собственный вектор. Тогда линейное подпространство $\boldsymbol{U} = \langle \boldsymbol{u} \rangle$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$, и в силу леммы 5.2.3 оно инвариантно также относительно сопряженного оператора $\mathcal{A}^*$. Согласно лемме 5.2.5 и равенству (5.12) линейное подпространство $\boldsymbol{U}^{\perp}$ инвариантно относительно линейных операторов $\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Очевидно, что ограничение $\mathcal{A}^*|_{U^{\perp}}$ совпадает с $(\mathcal{A}|_{U^{\perp}})^*$. Так как $\mathsf{dim}\boldsymbol{U}^{\perp} < \mathsf{dim}V$, по индуктивному предположению существует ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{U}^{\perp}$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}|_{U^{\perp}}$. Каждый из указанных векторов является собственным и для оператора $\mathcal{A}$. Дополняя указанный базис вектором $\frac{1}{|\boldsymbol{u}|}\boldsymbol{u}$, получаем ортонормированный базис пространства $\boldsymbol{V}$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. □

Для евклидовых пространств строение нормального оператора выясняет следующее утверждение.

Теорема 5.2.4. *Для любого нормального оператора $\mathcal{A}$ евклидова пространства $\boldsymbol{V}$ существует ортонормированный базис $\boldsymbol{V}$, состоящий из двух частей: первая включает собственные векторы этого оператора, принадлежащие вещественным собственным значениям, а вторая состоит из пар векторов, соответствующих комплексным корням характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}(x)$, при этом корню $\alpha+\beta i$ отвечает пара векторов $\boldsymbol{e}$, $\boldsymbol{f}$, порождающая инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство, на котором ограничение $\mathcal{A}$ имеет матрицу* $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$.

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — нормальный оператор евклидова пространства $\boldsymbol{V}$. Воспользуемся индукцией по $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}$. Для одномерного пространства утверждение очевидно. Пусть оно доказано для всех нормальных линейных операторов, действующих на евклидовых пространствах размерности меньше $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}$. Если оператор $\mathcal{A}$ имеет (вещественное) собственное значение α, то провести доказательство шага индукции можно так же, как это сделано в доказательстве теоремы 5.2.3. Предположим, что все корни характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}(x)$ комплексные. Зафиксируем такой корень $\gamma=\alpha+\beta i$. Тогда число $\overline{\gamma}=\alpha-\beta i$ также будет корнем $f_{\mathcal{A}}(x)$ в силу предложения 7.2.2. Рассмотрим унитарное пространство $\boldsymbol{W}$ размерности $\mathsf{dim}\boldsymbol{V}$. Зафиксируем ортонормированные базисы M в $\boldsymbol{V}$ и N в $\boldsymbol{W}$. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}_1$ пространства $\boldsymbol{W}$, заданный в базисе N матрицей $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}_{\mathrm{M}}$ оператора $\mathcal{A}$ в базисе M. Читателю предлагается проверить, что $\mathcal{A}_1$ является нормальным оператором пространства $\boldsymbol{W}$. Числа γ и $\overline{\gamma}$ являются собственными значениями этого оператора. Рассмотрим собственный вектор оператора $\mathcal{A}_1$, принадлежащий γ, скажем, $\boldsymbol{x}$. Положим $[\boldsymbol{x}]_{\mathrm{N}}=\boldsymbol{x}_d+i\boldsymbol{x}_m$, где $\boldsymbol{x}_d,\boldsymbol{x}_m$ — столбцы действительных чисел. Тогда $\mathcal{A}_1(\boldsymbol{x})=\gamma\boldsymbol{x}$, откуда $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_d+i\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m=\boldsymbol{A}[\boldsymbol{x}]=(\alpha+\beta i)(\boldsymbol{x}_d+i\boldsymbol{x}_m)=(\alpha\boldsymbol{x}_d-\beta\boldsymbol{x}_m)+i(\beta\boldsymbol{x}_d+\alpha\boldsymbol{x}_m)$. Таким образом,

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_d = \alpha\boldsymbol{x}_d - \beta\boldsymbol{x}_m \text{ и } \quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m = \beta\boldsymbol{x}_d + \alpha\boldsymbol{x}_m. \tag{5.14}$$

Прямой подсчет показывает, что $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}_d - i\boldsymbol{x}_m) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_d - i\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}_m = (\alpha - \beta i)(\boldsymbol{x}_d - i\boldsymbol{x}_m)$. Таким образом, столбец $\boldsymbol{x}_d - i\boldsymbol{x}_m$ задает в базисе $\mathbf{N}$ координаты вектора $\boldsymbol{y}$, который является собственным для оператора $\mathcal{A}_1$. По лемме 5.2.4 имеем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_W = 0$. Вычисляя скалярное произведение $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_W$ в ортонормированном базисе $\mathbf{N}$, получаем $0 = (\boldsymbol{x}_d + i\boldsymbol{x}_m)\overline{(\boldsymbol{x}_d - i\boldsymbol{x}_m)} = (\boldsymbol{x}_d + i\boldsymbol{x}_m)(\boldsymbol{x}_d + i\boldsymbol{x}_m) = (\boldsymbol{x}_d^2 - \boldsymbol{x}_m^2) - 2i\boldsymbol{x}_d\boldsymbol{x}_m$, откуда

$$\boldsymbol{x}_d^2 = \boldsymbol{x}_m^2 \text{ и } \boldsymbol{x}_d\boldsymbol{x}_m = 0. \tag{5.15}$$

Рассмотрим векторы $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{v}$, заданные столбцами $\boldsymbol{x}_d$ и $\boldsymbol{x}_m$ в базисе $\mathbf{M}$ пространства $\boldsymbol{V}$. Равенства (5.15) показывают, что $|\boldsymbol{u}| = |\boldsymbol{v}|$ и $(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v})_V = 0$. Из равенств (5.14) вытекает, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{u}) = \alpha\boldsymbol{u} - \beta\boldsymbol{v}$, $\mathcal{A}(\boldsymbol{v}) = \beta\boldsymbol{u} + \alpha\boldsymbol{v}$. Таким образом, $\boldsymbol{U} = \langle\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}\rangle$ является инвариантным относительно $\mathcal{A}$ подпространством, в котором векторы $\boldsymbol{e} = \frac{1}{|\boldsymbol{u}|}\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{f} = \frac{1}{|\boldsymbol{v}|}\boldsymbol{v}$ образуют ортонормированный базис; в нем матрица ограничения $\mathcal{A}$ на $\boldsymbol{U}$ имеет требуемый вид. Вектор $\boldsymbol{x}$ унитарного пространства $\boldsymbol{W}$ является собственным относительно оператора $\mathcal{A}_1^*$ в силу леммы 5.2.3. Повторяя для матрицы $\boldsymbol{A}^\top$ проведенные выше для матрицы $\boldsymbol{A}$ рассуждения, видим, что $\boldsymbol{U}$ является инвариантным подпространством и относительно оператора $\mathcal{A}^*$. В силу леммы 5.2.5 ортогональное дополнение $\boldsymbol{U}^\perp$ инвариантно относительно $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$. Имеем $\mathsf{dim}\boldsymbol{U}^\perp < \mathsf{dim}\boldsymbol{V}$. Применяя к $\boldsymbol{U}^\perp$ и ограничениям $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}^*$ на это подпространство индуктивное предположение, завершаем доказательство. □

5.2.3. Ортогональные и унитарные операторы

Линейный оператор евклидова [унитарного] линейного пространства $\boldsymbol{V}$ называется *ортогональным* [*унитарным*], если сопряженный с ним совпадает с обратным отображением к этому оператору. Так как $\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^{-1}\mathcal{A}$, ортогональные и унитарные операторы являются нормальными. Принимая во внимание предложение 5.2.2, заключаем, что линейный оператор $\mathcal{A}$ будет ортогональным [унитарным] тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{A}^{\top} = \boldsymbol{A}^{-1} \tag{5.16}$$

в случае ортогонального оператора и условию

$$\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{A}^{-1} \tag{5.17}$$

в случае унитарного оператора.

Матрица $\boldsymbol{A}$ с действительными [комплексными] коэффициентами называется *ортогональной* [*унитарной*], если она удовлетворяет условию (5.16) [(5.17)] (которое равносильно равенству $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{\top} = \boldsymbol{E}$ [$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^{*} = \boldsymbol{E}$]). Легко убедиться, что матрица перехода от одного ортонормированного базиса к другому в евклидовом [унитарном] пространстве является ортогональной [унитарной].

Предложение 5.2.3. *Оператор $\mathcal{A}$ евклидова [унитарного] линейного пространства $\boldsymbol{V}$ является ортогональным [унитарным] линейным оператором тогда и только тогда, когда для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ справедливо равенство $(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.*

Доказательство. Если $\mathcal{A}$ — ортогональный [унитарный] линейный оператор, то, поскольку $\mathcal{A}\mathcal{A}^{*} = \mathcal{A}^{*}\mathcal{A} = \mathcal{E}$, для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ имеем $(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^{*}(\mathcal{A}(\boldsymbol{y}))) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$.

Пусть $\mathcal{A}$ — оператор (т.е. отображение в себя) евклидова или унитарного пространства $\boldsymbol{V}$ такой, что для любых векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$ справедливо равенство $(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Покажем, что $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x})+\mathcal{A}(\boldsymbol{y})$. Положим $\boldsymbol{z} = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})-\mathcal{A}(\boldsymbol{x})-\mathcal{A}(\boldsymbol{y})$ и вычислим $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z})$:

$$(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = (\mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{A}(\boldsymbol{y}),\ \mathcal{A}(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) - \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) - \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) =$$

$$= (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) - (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) - (\mathcal{A}(\boldsymbol{y}), \mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})) -$$
$$-(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \mathcal{A}(\boldsymbol{x})) + (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}(\boldsymbol{x})) + (\mathcal{A}(\boldsymbol{y}), \mathcal{A}(\boldsymbol{x})) -$$
$$-(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}), \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) + (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) + (\mathcal{A}(\boldsymbol{y}), \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) =$$
$$= (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) - (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) +$$
$$+(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) - (\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + (\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}) = 0.$$

Итак, $(\boldsymbol{z}, \boldsymbol{z}) = 0$, откуда $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{o}$. Таким образом, $\mathcal{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) = \mathcal{A}(\boldsymbol{x}) + \mathcal{A}(\boldsymbol{y})$. Аналогично доказывается равенство $\mathcal{A}(\alpha\boldsymbol{x}) = \alpha\mathcal{A}(\boldsymbol{x})$ для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ и любого числа α. Мы видим, что $\mathcal{A}$ — линейный оператор.

Докажем, что $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$. Из равенств

$$(\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(\boldsymbol{y}))) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$$

следует $(\boldsymbol{x}, \mathcal{A}^*(\mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$. Отсюда по лемме 5.2.1 вытекает, что $\mathcal{A}^*(\mathcal{A}(\boldsymbol{y})) = \boldsymbol{y}$ для любого $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$. Таким образом, $\mathcal{A}\mathcal{A}^* = \mathcal{E}$. Аналогично доказывается равенство $\mathcal{A}^*\mathcal{A} = \mathcal{E}$. Следовательно, $\mathcal{A}^* = \mathcal{A}^{-1}$. □

Теорема 5.2.5. *Пусть $\mathcal{A}$ — унитарный [ортогональный] оператор унитарного [евклидова] пространства $\boldsymbol{V}$. Тогда модули всех собственных значений этого оператора равны единице. Если $\boldsymbol{V}$ — унитарное пространство, то оно имеет ортонормированный базис из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Если $\boldsymbol{V}$ — евклидово пространство, то оно имеет ортонормированный базис, состоящий из двух частей: первая включает собственные векторы этого оператора, принадлежащие собственным значениям 1 и -1, а вторая состоит из пар векторов, соответствующих комплексным корням характеристического многочлена $f_{\mathcal{A}}(x)$, при этом корню $\cos\alpha + i\sin\alpha$ отвечает пара векторов $\boldsymbol{e}, \boldsymbol{f}$, порождающая инвариантное относительно $\mathcal{A}$ подпространство, на котором ограничение $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ -\sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$. Указанный базис называется* канонициским *для оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Пусть λ — произвольное собственное значение оператора $\mathcal{A}$ и $\boldsymbol{x}$ — собственный вектор, принадлежащий этому собственному значению. В силу предложения 5.2.3 имеем $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = (\mathcal{A}(\boldsymbol{x}), \mathcal{A}(\boldsymbol{x})) = (\lambda\boldsymbol{x}, \lambda\boldsymbol{x}) = \lambda\overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$, откуда $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = \lambda\overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x})$. Поскольку $\boldsymbol{x} \neq \boldsymbol{o}$, видим, что $|\lambda|^2 = \lambda\overline{\lambda}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 1$. Таким образом, $|\lambda| = 1$. Остальные утверждения доказываемой теоремы следуют из теорем 5.2.3 и 5.2.4. □

В качестве примера найдем канонический ортонормированный базис для ортогонального оператора $\mathcal{A}$, заданного в ортонормированном базисе евклидова пространства матрицей $\boldsymbol{A} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Запишем характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$:

$$f_{\mathcal{A}}(x) = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} - x & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - x & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - x & 1 - x & 1 - x \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - x & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} - x \end{vmatrix} =$$

$$= (1 - x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 - x & 1 \\ 0 & -1 & -x \end{vmatrix} = (1 - x)(x^2 - x + 1).$$

Корни характеристического многочлена: $x_1 = 1$, $x_{2,3} = \frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$. Для x_1 собственный вектор $\boldsymbol{f}_1 = (1, 1, 1)$ находится обычным образом. Для $x_2 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ находим собственный вектор с комплексными координатами для унитарного оператора, имеющего матрицу $\boldsymbol{A}$. Преобразуем матрицу $\boldsymbol{A} - x_2\boldsymbol{E}_3$:

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{6} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1-3i\sqrt{3} & 4 & -2 \\ -2 & 1-3i\sqrt{3} & 4 \\ 4 & -2 & 1-3i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1-3i\sqrt{3} & 4 \\ 4 & -2 & 1-3i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3-3i\sqrt{3} & 6 \\ 0 & -6 & -3-3i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-i\sqrt{3} & 2 \\ 0 & 2 & 1+i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & 2 & 1+i\sqrt{3} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим собственный вектор, принадлежащий собственному значению x_2: $\boldsymbol{f}_c = (-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}, 1, -\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})+i(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Полагаем $\boldsymbol{f}_2 = (-\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2})$, $\boldsymbol{f}_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$. Нормируя векторы $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$ и $\boldsymbol{f}_3$, получаем требуемый ортонормированный базис: $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)$, $\boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,-1)$, $\boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1)$. В этом базисе ортогональный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

5.2.4. Самосопряженные операторы

Пусть $\boldsymbol{V}$ — евклидово или унитарное пространство. Линейный оператор $\mathcal{A}$ пространства $\boldsymbol{V}$ называется *самосопряженным*, если $\mathcal{A} = \mathcal{A}^*$. Очевидно, что самосопряженный оператор является нормальным. Принимая во внимание предложение 5.2.2, заключаем, что линейный оператор $\mathcal{A}$ будет самосопряженным тогда и только тогда, когда в некотором ортонормированном базисе его матрица удовлетворяет условию

$$\boldsymbol{A}^\top = \boldsymbol{A} \tag{5.18}$$

в случае евклидова пространства и условию

$$\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A} \tag{5.19}$$

в случае унитарного пространства. Напомним, что матрица $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющая условию (5.18) [5.19], называется симметрической [эрмитовой].

Теорема 5.2.6. *Все корни характеристического многочлена любого самосопряженного оператора лежат в поле $\mathbb{R}$. Евклидово или унитарное пространство имеет ортонормированный базис из собственных векторов самосопряженного оператора.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор унитарного пространства $\boldsymbol{V}$. Из лемм 5.2.3 и 5.2.4 вытекает, что любое собственное значение оператора $\mathcal{A}$ совпадает с сопряженным к нему числом, т.е. является действительным числом. Согласно теореме 4.2.2 спектр оператора $\mathcal{A}$ унитарного пространства исчерпывается его собственными значениями.

Пусть $\mathcal{A}$ — самосопряженный оператор евклидова пространства $\boldsymbol{V}$. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}_1$ унитарного пространства $\boldsymbol{V}_1$ соответствующей размерности, заданный матрицей оператора $\mathcal{A}$ в некотором базисе (как это было сделано в доказательстве теоремы 5.2.4). Читателю предлагается проверить, что $\mathcal{A}_1$ — самосопряженный оператор пространства $\boldsymbol{V}_1$ и $f_{\mathcal{A}_1}(x) = f_{\mathcal{A}}(x)$. Следовательно, все корни $f_{\mathcal{A}}(x)$ лежат в поле $\mathbb{R}$.

Второе утверждение теоремы следует из теорем 5.2.3 и 5.2.4. □

Доказанная теорема влечет за собой утверждение, касающееся симметрических матриц, которое будет использовано при изучении квадратичных форм (см. п. 6.3.2). Напомним, что для квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n характеристическим многочленом называется определитель $\mathsf{det}(\boldsymbol{A} - x\boldsymbol{E}_n)$. Начиная с этого момента, *собственными значениями* матрицы $\boldsymbol{A}$ будем называть все (вообще говоря, комплексные) корни ее характеристического многочлена. Они образуют *спектр* матрицы, который будет обозначаться через $\mathscr{S}(\boldsymbol{A})$. *Собственным вектором* матрицы $\boldsymbol{A}$, принадлежащим собственному значению α этой матрицы, называется всякий ненулевой столбец $\boldsymbol{s} \in \mathbb{C}^n$ со свойством $\boldsymbol{A}\boldsymbol{s} = \alpha\boldsymbol{s}$. Эти определения согласуются с данными в п. 4.3.3 определениями в случае, когда линейный оператор $\mathcal{A}$, задаваемый матрицей, рассматривается на пространстве столбцов $\mathbb{C}^n$ с комплексными коэффициентами.

Из предложения 4.2.1 и следствия 7.2.1 получаем следующий результат.

Предложение 5.2.4. *Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Тогда сумма всех элементов спектра матрицы $\boldsymbol{A}$ (с учетом кратности) равна ее следу* $\mathsf{tr}(\boldsymbol{A})$.

Теорема 5.2.7. *Для любой симметрической матрицы $\boldsymbol{A}$ с действительными коэффициентами $\mathscr{S}(\boldsymbol{A}) \subseteq \mathbb{R}$ и существует ортогональная матрица $\boldsymbol{B}$ такая, что $\boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$ есть диагональная матрица с собственными значениями матрицы $\boldsymbol{A}$ на главной диагонали.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{A}$ — симметрическая матрица с действительными коэффициентами. Рассмотрим евклидово пространство $\boldsymbol{V}$ размерности, равной порядку матрицы $\boldsymbol{A}$, и выберем в нем некоторый ортонормированный базис $\mathbf{M}$. Рассмотрим линейный оператор $\mathcal{A}$, заданный в этом базисе матрицей $\boldsymbol{A}$. Очевидно, $\mathcal{A}$ является самосопряженным оператором. Ясно, что спектр оператора $\mathcal{A}$ исчерпывается собственными значениями матрицы $\boldsymbol{A}$. По теореме 5.2.6 упомянутый спектр лежит в поле $\mathbb{R}$ и существует ортонормированный базис $\mathbf{N}$ пространства $\boldsymbol{V}$, состоящий из собственных векторов оператора $\mathcal{A}$. Пусть $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}_{\mathbf{M},\mathbf{N}}$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{M}$ к базису $\mathbf{N}$. Так как оба базиса ортонормированные, матрица $\boldsymbol{B}$ ортогональна, т.е. $\boldsymbol{B}^{-1} = \boldsymbol{B}^\top$. Согласно формуле (4.11) из п. 4.2.1 матрица оператора $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{N}$ имеет вид $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^\top\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}$. Эта матрица является диагональной, и на главной диагонали располагаются собственные значения оператора $\mathcal{A}$. □

Рассмотрим пример. Для самосопряженного оператора $\mathcal{A}$ евклидова пространства, имеющего в некотором ортонормированном базисе матрицу $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, найти ортонормированный базис из собственных векторов и матрицу оператора $\mathcal{A}$ в этом базисе.

Решение. Найдем характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$:

$$f_{\mathcal{A}}(x) = \begin{vmatrix} 1-x & 2 & 2 \\ 2 & 1-x & 2 \\ 2 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5-x & 5-x & 5-x \\ 2 & 1-x & 2 \\ 2 & 2 & 1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (5-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1-x & 2 \\ 2 & 2 & 1-x \end{vmatrix} = (5-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1-x & 0 \\ 0 & 0 & -1-x \end{vmatrix} =$$

$$= (5-x)(-1-x)^2 = (x+1)^2(5-x).$$

Собственные значения оператора $\mathcal{A}$ $x_1 = 5$, $x_2 = -1$. Собственные векторы находятся с помощью обычной процедуры: $\boldsymbol{f}_1 = (1,1,1)$, $\boldsymbol{f}_2 = (-1,0,1)$, $\boldsymbol{f}_3 = (0,-1,1)$. Векторы $\boldsymbol{f}_2$ и $\boldsymbol{f}_3$, принадлежащие собственному значению -1, не ортогональны. Применяя к ним процесс ортогонализации, получаем векторы $\boldsymbol{g}_2 = \boldsymbol{f}_2$ и $\boldsymbol{g}_3 = \boldsymbol{f}_3 - \frac{1}{2}\boldsymbol{g}_2 = \frac{1}{2}(1,-2,1)$. Нормируя векторы $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{g}_2$ и $\boldsymbol{g}_3$, получаем искомый ортонормированный базис $\boldsymbol{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1), \boldsymbol{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-1,0,1), \boldsymbol{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}(1,-2,1)$. В этом базисе оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Задачи: [17], №201–222.

Глава 6

Приложения и некоторые дополнительные вопросы

§ 6.1. Нормы векторов, линейных операторов и матриц

Нормы векторов и матриц являются обобщениями понятия длины вектора в трехмерном пространстве. В частности, длина вектора в евклидовом или унитарном пространстве является нормой. Нормы векторов и матриц могут определяться по–разному. Они позволяют определить степенные ряды для матриц и весьма полезны при анализе численных методов. Вообще говоря, изучение норм относится не к линейной алгебре, а к фунциональному анализу. В частности, по этой причине все результаты в этом параграфе приведены без доказательств. Указанные результаты с полными доказательствами могут быть найдены в книге [21].

6.1.1. Нормы векторов

Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство над полем $\mathbb{F}$, которое совпадает с $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$. *Нормой* на $\boldsymbol{V}$ называется функция $\boldsymbol{x} \mapsto \|\boldsymbol{x}\|$ из $\boldsymbol{V}$ в $\mathbb{R}$, обладающая следующими свойствами:

1) $\|\boldsymbol{x}\| \geq 0$ при любом $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$;

2) $\|\boldsymbol{x}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$;

3) $\|\alpha\boldsymbol{x}\| = |\alpha|\|\boldsymbol{x}\|$ для любых $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ и $\alpha \in \mathbb{F}$;

4) $\|\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}\| \leq \|\boldsymbol{x}\| + \|\boldsymbol{y}\|$ для любых $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \boldsymbol{V}$.

Кратко обозначать норму будем через $\|\cdot\|$. Рассмотрим примеры норм. Если $\boldsymbol{V}$ — евклидово или унитарное пространство, то длина вектора является нормой. Условия 1)–4) вытекают из аксиом скалярного произведения, теоремы 5.1.1 и следствия 5.1.1. В пространстве строк $\mathbb{F}_n$ можно определить, например, следующие нормы: для вектора $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ полагаем

a) $\|\boldsymbol{x}\|_a = |x_1| + |x_2| + \ldots + |x_n|$;

b) $\|\boldsymbol{x}\|_b = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$;

c) $\|\boldsymbol{x}\|_c = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\}$.

Для норм a) и c) условия 1)–4) легко проверяются. Норма b) возникает из обычного скалярного произведения для строк (пример 2 в п. 5.1.2).

Следующее утверждение дает информацию о связи между любыми двумя нормами на конечномерном пространстве.

Теорема 6.1.1. *Пусть $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ — две нормы на конечномерном пространстве $\boldsymbol{V}$. Тогда существуют такие положительные числа α и β, что для любого вектора $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{V}$ справедливы неравенства $\|\boldsymbol{x}\|_1 \leq \alpha\|\boldsymbol{x}\|_2$ и $\|\boldsymbol{x}\|_2 \leq \beta\|\boldsymbol{x}\|_1$.*

Говорят, что последовательность векторов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ пространства $\boldsymbol{V}$ *сходится* к вектору $\boldsymbol{a}$ *по норме* $\|\cdot\|$, если для любого положительного числа ε существует натуральное число N, такое, что для любого натурального n из $n > N$ следует $\|\boldsymbol{x}_n - \boldsymbol{a}\| < \varepsilon$. Две нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ называются *эквивалентными*, если из сходимости любой последовательности к некоторому вектору по одной из них следует сходимость данной последовательности к тому же самому вектору по другой. Теорема 6.1.1 утверждает, что в конечномерном евклидовом или унитарном пространстве любые две нормы эквивалентны. Поэтому в дальнейшем мы не будем указывать норму, по которой рассматривается сходимость, так как все рассматриваемые пространства предполагаются конечномерными. Будем использовать также обычное обозначение $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n$ для предела последовательности.

Для сходящихся последовательностей векторов можно развернуть теорию, похожую на теорию пределов числовых последовательностей. В частности, если $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{x}_n = \boldsymbol{a}$ и $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{y}_n = \boldsymbol{b}$, то для любых скаляров $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty} (\alpha \boldsymbol{x}_n + \beta \boldsymbol{y}_n) = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b}.$$

Пусть $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots$ — последовательность векторов. Под *бесконечным рядом* $\sum_{n=1}^{\infty} \boldsymbol{x}_n$ понимается последовательность *частичных сумм* $S_1 = \boldsymbol{x}_1$, $S_2 = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2, \ldots$, $S_n = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \ldots + \boldsymbol{x}_n, \ldots$. Говорят, что *ряд сходится* к вектору $\boldsymbol{s}$, если $\lim_{n\to\infty} S_n = \boldsymbol{s}$. В этом случае также говорят, что *сумма ряда равна* $\boldsymbol{s}$. Теория рядов векторов аналогична теории числовых рядов.

6.1.2. Нормы линейных операторов и матриц

Пусть $\boldsymbol{V}$ — евклидово или унитарное пространство. Напомним, что $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V})$ обозначает множество всех линейных операторов пространства $\boldsymbol{V}$. Отображение $\|\cdot\|$ из $\boldsymbol{H} = \mathsf{Hom}(\boldsymbol{V})$ в поле $\mathbb{R}$ называется *операторной нормой*, если выполняются следующие условия:

1) $\|\mathcal{A}\| \geq 0$ при любом $\mathcal{A} \in \boldsymbol{H}$;
2) $\|\mathcal{A}\| = 0$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{A} = \mathcal{O}$;
3) $\|\alpha\mathcal{A}\| = |\alpha|\|\mathcal{A}\|$ для любых $\mathcal{A} \in \boldsymbol{H}$ и $\alpha \in \mathbb{F}$;
4) $\|\mathcal{A} + \mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\| + \|\mathcal{B}\|$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \boldsymbol{H}$;
5) $\|\mathcal{A}\mathcal{B}\| \leq \|\mathcal{A}\|\|\mathcal{B}\|$ для любых $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \boldsymbol{H}$.

Мы видим, что операторная норма является векторной нормой в линейном пространстве $\boldsymbol{H}$. Так как для конечномерного пространства $\boldsymbol{V}$ пространство $\boldsymbol{H} = \mathsf{Hom}(\boldsymbol{V})$ также конечномерно, в этом случае все операторные нормы эквивалентны между собой и эквивалентны любой векторной норме на $\boldsymbol{H}$.

Матричная норма определяется сходным образом, с заменой $\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V})$ на $\mathbb{C}^{n\times n}$ или $\mathbb{R}^{n\times n}$. Для операторов и матриц определяются сходящиеся последовательности, ряды и суммы рядов в соответствии с определениями, данными в предыдущем пункте.

Операторная норма $\|\cdot\|_{op}$ называется *согласованной* с векторной нормой $\|\cdot\|_{vc}$, если для любого линейного оператора $\mathcal{A}$ и любого вектора $\boldsymbol{v} \in \boldsymbol{V}$ справедливо неравенство $\|\mathcal{A}(\boldsymbol{v})\|_{vc} \le \|\mathcal{A}\|_{op}\|\boldsymbol{v}\|_{vc}$. Для любой векторной нормы $\|\cdot\|$ определяется следующая согласованная с ней операторная норма:

$$\|\mathcal{A}\| = \max\{\|\mathcal{A}(\boldsymbol{x})\| \mid \|\boldsymbol{x}\| = 1\}.$$

Аналогично определяется матричная норма, согласованная с векторной нормой в пространстве столбцов соответствующей размерности.

Одна из наиболее употребительных норм для операторов и матриц, называемая спектральной, определяется следующим образом. Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор на евклидовом или унитарном пространстве $\boldsymbol{V}$. Докажем, что спектр линейного оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ состоит из неотрицательных действительных чисел. Так как согласно последнему утверждению теоремы 5.2.2 и равенству (5.12) имеем $(\mathcal{A}^*\mathcal{A})^* = \mathcal{A}^*\mathcal{A}^{**} = \mathcal{A}^*\mathcal{A}$, оператор $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ является самосопряженным. По теореме 5.2.6 его спектр лежит в поле $\mathbb{R}$. Пусть α — произвольное собственное значение оператора $\mathcal{A}^*\mathcal{A}$ и $\boldsymbol{v}$ — принадлежащий ему собственный вектор. Имеем

$$\alpha(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\alpha\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\mathcal{A}^*\mathcal{A}(\boldsymbol{v}),\boldsymbol{v}) = (\mathcal{A}(\boldsymbol{v}),\mathcal{A}(\boldsymbol{v})),$$

откуда $\alpha(\boldsymbol{v},\boldsymbol{v}) = (\mathcal{A}(\boldsymbol{v}),\mathcal{A}(\boldsymbol{v}))$. Теперь ясно, что $\alpha \ge 0$. Положим

$$\|\mathcal{A}\|_s = \max\{\sqrt{\alpha} \mid \alpha \text{ — собственное значение оператора } \mathcal{A}^*\mathcal{A}\}.$$

Число $\|\mathcal{A}\|_s$ и называется *спектральной нормой* оператора $\mathcal{A}$.

Для квадратных матриц спектральная норма определяется сходным образом.

Для оператора $\mathcal{A}$ [квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$] *спектральным радиусом* $\rho(\mathcal{A})$ [$\rho(\boldsymbol{A})$] называется наибольший из модулей чисел спектра оператора $\mathcal{A}$ [матрицы $\boldsymbol{A}$]. На комплексной плоскости все значения спектра оператора $\mathcal{A}$ [матрицы $\boldsymbol{A}$] расположены в круге радиуса $\rho(\mathcal{A})$ [$\rho(\boldsymbol{A})$].

Сформулируем нужные нам результаты, касающиеся норм операторов и матриц, в виде следующего утверждения. Приведем его формулировку для матриц; формулировка для операторов получается очевидной заменой слов "матрица" и производных от него на слова "оператор" и соответствующие производные.

Теорема 6.1.2. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — квадратная матрица порядка n.*

Для любого положительного числа ε существует матричная норма $\|\cdot\|$, для которой $\rho(\boldsymbol{A}) \le \|\boldsymbol{A}\| \le \rho(\boldsymbol{A}) + \varepsilon$.

Если существует матричная норма, для которой $\|\boldsymbol{A}\| < 1$, то

1) $\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{A}^n = \boldsymbol{O}$, где $\boldsymbol{O}$ — нулевая матрица;

2) матрица $\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}$ обратима, причем обратная матрица может быть представлена сходящимся рядом

$$(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots + \boldsymbol{A}^n + \ldots .$$

§ 6.2. Неотрицательные матрицы

В этом параграфе рассматриваются *неотрицательные матрицы*, т.е. матрицы с неотрицательными вещественными элементами. Доказательства некоторых результатов здесь выходят за рамки собственно линейной алгебры, поэтому в соответствующих случаях рассматриваются элементарные доказательства для частного случая матриц порядка 2, в то время как сформулированные результаты верны в общем случае. Читатель, желающий получить больше информации о матрицах, может обратиться к книгам [6] и [21].

6.2.1. Положительные матрицы

Матрица (в том числе столбец или строка) называется *положительной*, если все элементы ее — положительные действительные числа.

Теорема 6.2.1. *Пусть $\boldsymbol{A}$ — положительная квадратная матрица порядка n. Тогда $\rho(\boldsymbol{A})$ является собственным значением матрицы $\boldsymbol{A}$ кратности 1 и существует положительный собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A}$, принадлежащий этому собственному значению.*

Доказательство. Доказательство проведем для случая квадратных матриц порядка 2. Пусть $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Запишем характеристический многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} \alpha - x & \beta \\ \gamma & \delta - x \end{vmatrix} = (\alpha - x)(\delta - x) - \beta\gamma = \\ = x^2 - (\alpha + \delta)x + \alpha\delta - \beta\gamma.$$

Это квадратный трехчлен. Найдем его дискриминант:

$$D = (\alpha + \delta)^2 - 4(\alpha\delta - \beta\gamma) = \alpha^2 - 2\alpha\delta + \delta^2 + 4\beta\gamma = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma,$$

т.е.

$$D = (\alpha - \delta)^2 + 4\beta\gamma. \tag{6.1}$$

Так как все элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ положительны, ясно, что $D > 0$. Корни характеристического многочлена имеют вид

$$\xi_1 = \frac{1}{2}(\alpha + \delta + \sqrt{D}),\ \xi_2 = \frac{1}{2}(\alpha + \delta - \sqrt{D}).$$

Очевидно, что $\xi_1 > 0$ и $\xi_1 > |\xi_2|$. Таким образом, ξ_1 — собственное значение матрицы $\boldsymbol{A}$ кратности 1, являющееся спектральным радиусом этой матрицы.

Убедимся, что существует положительный собственный вектор матрицы $\boldsymbol{A}$, принадлежащий собственному значению ξ_1. Рассмотрим систему линейных уравнений $\begin{cases} (\alpha - \xi_1)s_1 + \beta s_2 = 0; \\ \gamma s_1 + (\delta - \xi_1)s_2 = 0. \end{cases}$ Непосредственная проверка показывает, что уравнения здесь пропорциональны. Выразим из первого уравнения s_2 через s_1 и подставим вместо ξ_1 его значение:

$$s_2 = \frac{(\xi_1 - \alpha)}{\beta} s_1 = \frac{\delta - \alpha + \sqrt{D}}{2\beta} s_1. \tag{6.2}$$

С помощью выражения (6.1) для D легко понять, что $\sqrt{D} > |\delta - \alpha|$, поэтому коэффициент при s_1 в правой части равенства (6.2) положителен. Придавая s_1 значение 1, получаем положительный собственный вектор $(1, \frac{\delta-\alpha+\sqrt{D}}{2\beta})^\top$ матрицы A, принадлежащий собственному значению ξ_1. □

Рассмотрим пример. Для положительной матрицы

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$$

найти спектральный радиус и принадлежащий ему положительный собственный вектор.

Решение. Найдем характеристический многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$:

$$f_A(x) = \begin{vmatrix} 0,3 - x & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 - x & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 - x \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 0,8-x & 0,8-x & 0,8-x \\ 0,2 & 0,3-x & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (0,8-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0,2 & 0,3-x & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3-x \end{vmatrix} =$$

$$= (0,8-x)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0,1-x & -0,1 \\ 0 & -0,1 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (0,8-x)(x^2-0,1x+0,01).$$

Таким образом, $f_A(x) = (0,8-x)(x^2-0,1x+0,01)$. Его корни $\lambda_1 = 0,8$, $\lambda_{2,3} = 0,05 \pm \sqrt{0,0125} = 0,05 \pm 0,05\sqrt{5}$. Ясно, что $\rho(\boldsymbol{A}) = 0,8$. Находим положительный собственный вектор, принадлежащий собственному значению $0,8$.

$$\begin{pmatrix} -0,5 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & -0,5 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & -0,5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 3 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 7 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 7 & -6 \\ 0 & -19 & 13 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{23}{13} & 0 \\ 0 & -\frac{19}{13} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Для координат x_1, x_2, x_3 собственного вектора получаем уравнения $x_1 - \frac{23}{13}x_2 = 0$, $-\frac{19}{13}x_2 + x_3 = 0$. Отсюда $x_1 = \frac{23}{13}x_2$ и $x_3 = \frac{19}{13}x_2$. Придавая x_2 значение 13, получаем положительный собственный вектор $(23, 13, 19)$ матрицы $\boldsymbol{A}$, принадлежащий собственному значению $\rho(\boldsymbol{A}) = 0,8$.

Для неотрицательных матриц аналог теоремы 6.2.1 не справедлив. Имеет место следующая теорема, доказательство которой для случая квадратных матриц порядка 2 проводится аналогично доказательству теоремы 6.2.1.

Теорема 6.2.2. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— неотрицательная квадратная матрица порядка* n. *Тогда* $\rho(\boldsymbol{A})$ *является собственным значением матрицы* $\boldsymbol{A}$ *и существует неотрицательный собственный вектор матрицы* $\boldsymbol{A}$, *принадлежащий этому собственному значению.*

Пример единичной матрицы показывает, что спектральный радиус неотрицательной матрицы может быть ее кратным собственным значением.

6.2.2. Матрицы обмена

Напомним, что матрица называется матрицей обмена, если она квадратная, ее элементы — неотрицательные вещественные числа и сумма элементов в каждом столбце равна 1. Мы встречались с ними в § 0.2, когда рассматривали простую линейную модель обмена. То, что эта задача всегда имеет решение, обеспечивает следующее утверждение.

Теорема 6.2.3. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— матрица обмена. Тогда* $\boldsymbol{A}$ *имеет собственное значение* 1 *и существует неотрицательный собственный вектор, принадлежащий этому собственному значению.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения заметим, что если в характеристическом многочлене $f_A(x)$ матрицы $\boldsymbol{A}$, записанном в виде определителя, прибавить все строки к первой, то в первой строке все элементы будут равны $1 - x$, поскольку сумма элементов в каждом столбце матрицы $\boldsymbol{A}$ равна 1. Таким образом, по свойству 4 определителей множитель $1-x$ можно вынести за знак определителя. Следовательно, $f_A(x)$ делится на $1 - x$ и 1 является собственным значением матрицы $\boldsymbol{A}$.

Второе утверждение доказывается для случая матриц порядка 2 рассуждениями, аналогичными использованным в доказательстве теоремы 6.2.1, и оставляется в качестве упражнения читателю. □

Рассмотрим пример. Для матрицы обмена

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & 0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}$$

найти неотрицательный собственный вектор, принадлежащий собственному значению 1.

Решение. Находим собственный вектор, принадлежащий собственному значению 1.

$$\begin{pmatrix} -0,7 & 0,3 & 0,5 \\ 0,2 & -0,5 & 0,1 \\ 0,5 & 0,2 & -0,6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 5 & 2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -5 & 1 \\ 1 & 12 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 12 & -8 \\ 0 & -29 & 17 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{28}{17} & 0 \\ 0 & -\frac{29}{17} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Для координат x_1, x_2, x_3 собственного вектора получаем уравнения $x_1 - \frac{28}{17}x_2 = 0$, $-\frac{29}{17}x_2 + x_3 = 0$. Отсюда $x_1 = \frac{28}{17}x_2$ и $x_3 = \frac{29}{17}x_2$. Придавая x_2 значение 17, получаем положительный собственный вектор $(28, 17, 29)$ матрицы обмена $\boldsymbol{A}$, принадлежащий собственному значению 1.

6.2.3. Продуктивные матрицы

Матрица $\boldsymbol{A}$ называется *продуктивной*, если она неотрицательная квадратная порядка n и для любого неотрицательного столбца $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ существует неотрицательный вектор $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ такой, что

$$(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}. \tag{6.3}$$

Продуктивные матрицы возникают, в частности, в задачах межотраслевого баланса и простой линейной модели производства, см. § 0.2.

Условия, эквивалентные продуктивности матрицы, собраны в следующем утверждении.

Теорема 6.2.4. *Следующие условия для неотрицательной квадратной матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n эквивалентны:*

(1) *матрица $\boldsymbol{A}$ продуктивна;*

(2) *матрица $\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}$ обратима и матрица $(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})^{-1}$ неотрицательна;*

(3) *спектральный радиус матрицы $\boldsymbol{A}$ меньше единицы.*

Доказательство. Читателю предлагается убедиться, что условие (2) влечет за собой (1). Покажем, что из условия (1) следует (2). Рассмотрим столбцы $\boldsymbol{y}_1, \boldsymbol{y}_2, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ единичной матрицы $\boldsymbol{E}_n$, идущие по порядку слева направо. Эти столбцы неотрицательны, поэтому в силу определения продуктивной матрицы существуют неотрицательные столбцы $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$ такие, что $(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{x}_i = \boldsymbol{y}_i$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Обозначим через $\boldsymbol{X}$ матрицу, составленную из столбцов $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \ldots, \boldsymbol{x}_n$. Тогда $(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{X} = \boldsymbol{E}_n$, т.е. матрица $\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}$ обратима и $(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{X}$. Условие (2) доказано.

Убедимся, что из условия (2) следует (3). Пусть матрица $\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}$ обратима и матрица $(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})^{-1}$ неотрицательна. Обозначим через ρ спектральный радиус $\rho(\boldsymbol{A})$ матрицы $\boldsymbol{A}$ и через $\boldsymbol{v}$ неотрицательный собственный вектор, принадлежащий ρ. Рассмотрим вектор $\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})^{-1}\boldsymbol{v}$. Этот вектор неотрицателен. Имеем

$$\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{w}. \tag{6.4}$$

Покажем, что $\boldsymbol{w}$ является собственным вектором матрицы $\boldsymbol{A}$, также принадлежащим собственному значению ρ. Умножая обе части равенства (6.4) на $\boldsymbol{A}$ слева, получаем

$$\rho\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = (\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}).$$

Таким образом, $(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}) = \rho\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})(\rho\boldsymbol{w})$. Так как матрица $\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}$ обратима, из равенства

$$(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})(\boldsymbol{A}\boldsymbol{w}) = (\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})(\rho\boldsymbol{w})$$

получаем $\boldsymbol{A}\boldsymbol{w} = \rho\boldsymbol{w}$. Имеем из (6.4) $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})\boldsymbol{w} = (1-\rho)\boldsymbol{w}$. Так как $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$ — неотрицательные ненулевые столбцы, ясно, что $1-\rho \geq 0$. Поскольку $\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}$ — обратимая матрица, мы видим, что $1-\rho > 0$, откуда $\rho < 1$.

Убедимся, что из условия (3) следует (2). Так как $\rho(\boldsymbol{A}) < 1$, по теореме 6.1.2 заключаем, что $\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A}$ — обратимая матрица и $(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})^{-1} = \boldsymbol{E}_n + \boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^2 + \ldots + \boldsymbol{A}^n + \ldots$. Так как $\boldsymbol{A}$ — неотрицательная матрица, ясно, что $(\boldsymbol{E}_n - \boldsymbol{A})^{-1}$ также неотрицательна. □

Пример продуктивной матрицы приведен в п. 6.2.1. Указанная там матрица $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0,3 & 0,3 & 0,4 \\ 0,2 & 0,3 & 0,1 \\ 0,3 & 0,2 & 0,3 \end{pmatrix}$ имеет спектральный радиус $0,8$ и потому является продуктивной в силу теоремы 6.2.4.

§ 6.3. Квадратичные формы

6.3.1. Понятие квадратичной формы. Матричное представление

Квадратичной формой от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ над полем $\mathbb{F}$ называется выражение вида

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + \\ 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + \ldots + 2a_{1\,n}x_1x_n + \ldots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n, \quad (6.5)$$

где коэффициенты принадлежат полю $\mathbb{F}$. Таким образом, квадратичная форма является однородным многочленом второй степени от n переменных. Рассмотрим симметрическую матрицу $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$. По правилам умножения матриц имеем

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_1, x_2, \dots, x_n)\boldsymbol{A}(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top; \qquad (6.6)$$

это представление называется *матричным представлением* квадратичной формы $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Если обозначить столбец переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)^\top$ через $\boldsymbol{x}$, то формулу (6.6) можно записать в виде

$$f(X) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}. \qquad (6.7)$$

Рассмотрим новые переменные $y_1, y_2, \dots, y_n$ и предположим, что переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ линейно выражаются через них:

$$\begin{cases} x_1 = \sigma_{11}y_1 + \sigma_{12}y_2 + \ldots + \sigma_{1n}y_n; \\ x_2 = \sigma_{21}y_1 + \sigma_{22}y_2 + \ldots + \sigma_{2n}y_n; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n = \sigma_{n1}y_1 + \sigma_{n2}y_2 + \ldots + \sigma_{nn}y_n. \end{cases} \qquad (6.8)$$

Замена переменных (6.8) называется *неособой*, если из нее можно выразить $y_1, y_2, \dots, y_n$ через $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если коэффициенты σ_{ij} замены расположить в виде матрицы

$$\boldsymbol{S} = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_{nn} \end{pmatrix},$$

то замену можно записать в матричном виде

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{y}, \qquad (6.9)$$

где через $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ обозначены столбцы из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ и $y_1, y_2, \dots, y_n$ соответственно. Читателю предлагается доказать, что замена будет неособой тогда и только тогда, когда матрица $\boldsymbol{S}$ невырожденная, т.е. $\mathsf{det}(\boldsymbol{S}) \neq 0$.

Как изменяется матрица квадратичной формы после замены переменных? Подставляя в формулу (6.7) вместо $\boldsymbol{x}$ произведение $\boldsymbol{Sy}$ из (6.9), получаем $g(\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{Sy}) = (\boldsymbol{Sy})^\top \boldsymbol{A}(\boldsymbol{Sy}) = \boldsymbol{y}^\top \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{ASy} = \boldsymbol{y}^\top(\boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{AS})\boldsymbol{y}$. Таким образом, после замены (6.9) матрица квадратичной формы (6.7) принимает вид

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{AS}. \tag{6.10}$$

Рангом квадратичной формы называется ранг ее матрицы. Из формулы (6.10) в силу невырожденности матрицы $\boldsymbol{S}$ согласно утверждению 4) предложения 3.2.4 следует такое утверждение.

Предложение 6.3.1. *При неособой замене переменных ранг квадратичной формы не изменяется.*

6.3.2. Канонический и нормальный вид квадратичной формы

Две квадратичные формы называются *эквивалентными*, если одна из них может быть получена из другой неособой заменой переменных. Квадратичная форма тем проще, чем больше ее коэффициентов равны нулю. Представляет интерес вопрос, какова наиболее простая форма, эквивалентная данной. Говорят, что квадратичная форма имеет *канонический вид*, если в ней коэффициенты при всех произведениях различных переменных равны нулю. Квадратичная форма над полем $\mathbb{C}$ комплексных или полем $\mathbb{R}$ действительных чисел по определению имеет *нормальный вид*, если она имеет канонический вид и все ненулевые коэффициенты при квадратах равны 1 для поля $\mathbb{C}$ или равны 1 или -1 для поля $\mathbb{R}$. В силу предложения 6.3.1 число квадратов с ненулевыми коэффициентами в любом каноническом [нормальном] виде данной квадратичной формы одно и то же и равно рангу формы.

Теорема 6.3.1. *Произвольная квадратичная форма над числовым полем $\mathbb{F}$ эквивалентна квадратичной форме в каноническом виде над этим полем. Произвольная квадратичная форма над полем действительных чисел или полем комплексных чисел эквивалентна квадратичной форме в нормальном виде.*

Доказательство. Для доказательства первого утверждения воспользуемся индукцией по числу переменных n квадратичной формы. Для $n = 1$ оно очевидно, так как квадратичная форма от одной переменной имеет вид αx_1^2, где $\alpha \in \mathbb{F}$. Предположим, что наше утверждение доказано для всех квадратичных форм от k переменных, где $k < n$. Рассмотрим квадратичную форму (6.5) от n переменных. Если все ее коэффициенты равны нулю, то доказывать нечего. Предположим, что форма имеет ненулевой коэффициент. Рассмотрим два возможных случая.

1. По крайней мере один из коэффициентов $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ отличен от нуля. Переименовывая при необходимости переменные, без ограничения общности можем считать, что $a_{11} \neq 0$. Рассмотрим слагаемые квадратичной формы, содержащие x_1, и выделим в них полный квадрат:

$$\begin{gathered} a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{1\,n}x_1x_n = \\ = a_{11}[x_1^2 + 2x_1\tfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n}x_n) + (\tfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n}x_n))^2 - \\ -(\tfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n}x_n))^2] = \\ = a_{11}(x_1 + \tfrac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \tfrac{a_{1n}}{a_{11}}x_n)^2 - \tfrac{1}{a_{11}}(a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n}x_n)^2. \end{gathered}$$

Положим

$$y_1 = x_1 + \frac{a_{12}}{a_{11}}x_2 + \ldots + \frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n. \tag{6.11}$$

Тогда имеем

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}y_1^2 + g(x_2, \ldots, x_n),$$

где $g(x_2, \ldots, x_n)$ — квадратичная форма, получающаяся после возведения $a_{12}x_2 + \ldots + a_{1\,n}x_n$ в квадрат, деления полученного выражения на a_{11} и приведения подобных со слагаемыми из (6.5), не содержащими x_1. По индуктивному предположению форма $g(x_2, \ldots, x_n)$ эквивалентна форме $h(y_2, \ldots, y_n)$ канонического вида. Тогда $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}y_1^2 + h(y_2, \ldots, y_n)$, и последняя форма находится в каноническом виде. Так как $y_2, \ldots, y_n$ получаются из $x_2, \ldots, x_n$ с помощью неособой замены переменных, добавляя к этой замене формулу (6.11), получаем также неособую замену, поскольку определители матриц обоих замен одинаковы. Шаг индукции в случае 1 доказан.

2. Все коэффициенты $a_{11}, \ldots, a_{nn}$ равны нулю. Тогда среди a_{ij} при $i \neq j$ имеется ненулевой коэффициент. Без огрничения общности предположим, что $a_{12} \neq 0$. Полагая $z_1 = x_1 + x_2$, $z_2 = x_1 - x_2$, $z_k = x_k$ для $k = 3, \ldots, n$, приводим форму к виду, рассмотренному в случае 1. Очевидно, что используемая замена переменных неособая.

Итак, шаг индукции полностью доказан.

Для доказательства второго утверждения достаточно заметить, что в поле действительных чисел уравнение $\alpha^2 = \beta$ разрешимо для всех положительных чисел β, а в поле комплексных чисел такое уравнение разрешимо вообще для всех значений β. Поэтому выражение ax^2 с $a \neq 0$ после замены $x = \frac{1}{\sqrt{a}}y$ перейдет в y^2. Эта замена, очевидно, неособая. □

Только что описанный способ приведения квадратичной формы к каноническому виду называется *методом Лагранжа.*

Из теоремы 6.3.1 непосредственно получается следующий критерий эквивалентности квадратичных форм над полем $\mathbb{C}$.

Следствие 6.3.1. *Две квадратичные формы эквивалентны над полем $\mathbb{C}$ тогда и только тогда, когда они имеют одинаковые ранги (т.е. после приведения к нормальному виду имеют одно и то же число квадратов с коэффициентом 1).*

Отметим также следующее утверждение, касающееся произвольных симметрических матриц.

Следствие 6.3.2. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— симметрическая матрица из* $\mathbb{R}^{n\times n}$. *Тогда найдется такие верхнетреугольная матрица* $\boldsymbol{U}$ *и диагональная матрица* $\boldsymbol{D}$ *из* $\mathbb{R}^{n\times n}$, *что* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{U}$ *и на главной диагонали матрицы* $\boldsymbol{D}$ *элементы равны* 1, -1 *или* 0.

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$. Согласно теореме 6.3.1 ее можно привести к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$ с помощью замены переменных с верхнетреугольной обратимой матрицей $\boldsymbol{S}$. Из формулы (6.10) получаем $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$, где $\boldsymbol{D}$ — матрица нормального вида квадратичной формы $f(\boldsymbol{x})$. Умножая обе части последнего равенства слева на $(\boldsymbol{S}^\top)^{-1}$ и справа на $\boldsymbol{S}^{-1}$ и пользуясь тем, что $(\boldsymbol{S}^\top)^{-1} = (\boldsymbol{S}^{-1})^\top$, получаем $\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{S}^{-1})^\top \boldsymbol{D}\boldsymbol{S}^{-1}$. Обозначим $\boldsymbol{S}^{-1}$ через $\boldsymbol{U}$. Остается заметить, что обратная к верхнетреугольной матрице сама является верхнетреугольной. □

Рассмотрим пример. Привести к каноническому и к нормальному виду над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$ квадратичную форму

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

Решение. Применяя метод Лагранжа, получаем

$$\begin{gathered}
x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 = \\
= x_1^2 + 2x_1(2x_2 + 2x_3) + (2x_2 + 2x_3)^2 - \\
-(2x_2 + 2x_3)^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 = \\
= (x_1 + 2x_2 + 2x_3)^2 - 4x_2^2 - 4x_3^2 - 8x_2x_3 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_2x_3 = \\
y_1^2 - 3x^2 - 4x_2x_3 - 3x_3^2 = \\
= y_1^2 - 3(x_2^2 + 2x_2(\tfrac{2}{3}x_3) + \tfrac{4}{9}x_3^2 - \tfrac{4}{9}x_3^2) - 3x_3^2 = \\
y_1^2 - 3(x_2 + \tfrac{2}{3}x_3)^2 + \tfrac{4}{3}x_3^2 - 3x_3^2 = \\
= y_1^2 - 3y_2^2 - \tfrac{5}{3}y_3^2,
\end{gathered}$$

где $y_1 = x_1 + 2x_2 + 2x_3$; $y_2 = x_2 + \frac{2}{3}x_3$ и $y_3 = x_3$. Очевидно, что эта замена переменных неособая. Канонический вид данной квадратичной формы таков: $y_1^2 - 3y_2^2 - \frac{5}{3}y_3^2$. Заметим, что он определяется не однозначно. Для приведения к нормальному виду над полем $\mathbb{R}$ используем замену переменных $y_1 = z_1$, $y_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}z_2$, $y_3 = \sqrt{\frac{3}{5}}z_3$; получим нормальный вид $z_1^2 - z_2^2 - z_3^2$. Для приведения к нормальному виду над полем $\mathbb{C}$ используем замену переменных $y_1 = t_1$, $y_2 = \frac{i}{\sqrt{3}}t_2$, $y_3 = i\sqrt{\frac{3}{5}}t_3$. Мы приходим к нормальному виду $t_1^2 + t_2^2 + t_3^2$.

Для квадратичных форм над полем $\mathbb{R}$ существует специальный способ приведения к каноническому виду, так называемое *приведение к главным осям*. Этот способ основан на следствии 5.2.7. Ортогональная матрица $\boldsymbol{B}$, построенная для матрицы $\boldsymbol{A}$ квадратичной формы указанным в этом следствии способом, определяет неособую замену переменных (называемую *ортогональной*), приводящую квадратичную форму к каноническому виду, причем коэффициенты при квадратах в этом каноническом виде суть в точности собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$. Главные оси (или главные направления) квадратичной формы определяются векторами-столбцами матрицы $\boldsymbol{B}$.

В качестве примера рассмотрим ту же форму, что и в предыдущем примере. Ее матрица имеет вид $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$. Эта матрица рассматривалась в примере в п. 5.2.4. Собственные значения ее равны соответственно $5, -1, -1$, а требуемая ортогональная матрица $\boldsymbol{B}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}$$

(как матрица перехода, она получается выписыванием координат векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ из упомянутого примера в столбцы). Соответствующая ортогональная замена переменных имеет вид

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{\sqrt{3}}u_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}u_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}u_3; \\ x_2 &= \frac{1}{\sqrt{3}}u_1 \qquad - \qquad \frac{2}{\sqrt{6}}u_3; \\ x_3 &= \frac{1}{\sqrt{3}}u_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}u_2 + \frac{1}{\sqrt{6}}u_3. \end{aligned}$$

Канонический вид квадратичной формы таков: $5u_1^2 - u_2^2 - u_3^2$.

6.3.3. Положительно определенные формы

Здесь рассматриваются только формы над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ над полем $\mathbb{R}$ называется *положительно определенной* [*отрицательно определенной*], если при любых значениях переменных, среди которых имеется по крайней мере одно ненулевое, квадратичная форма принимает положительное [отрицательное] значение. Очевидно, что квадратичная форма $f(\boldsymbol{x})$ будет положительно определенной тогда и только тогда, когда форма $(-1)f(\boldsymbol{x})$ является отрицательно определенной.

Следующее утверждение предлагается доказать читателю.

Предложение 6.3.2. *Квадратичная форма $f(x_1, \ldots, x_n)$ от n переменных является положительно определенной тогда и только тогда, когда ее нормальный вид содержит точно n квадратов, т.е. имеет вид $y_1^2 + \ldots + y_n^2$.*

Можно ли по матрице квадратичной формы судить, является ли она положительно определенной? Для формулировки соответствующего утверждения необходимы два определения. *Главными минорами* матрицы называются миноры, стоящие на пересечении строк и столбцов с одинаковыми номерами. *Угловые* главные миноры порядка k образуются строками и столбцами с номерами $1, \ldots, k$. Следующую теорему называют критерием Сильвестра положительной определенности формы.

Теорема 6.3.2. *Квадратичная форма является положительно определенной тогда и только тогда, когда все угловые главные миноры ее матрицы положительны.*

Доказательство. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — положительно определенная квадратичная форма и $\boldsymbol{A}$ — ее матрица. Индукцией по n докажем, что все угловые главные миноры матрицы $\boldsymbol{A}$ положительны. База индукции (при $n = 1$) очевидна. Пусть утверждение доказано для всех положительно определенных форм менее чем от n переменных. Представим форму $f(x_1, \ldots, x_n)$ в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}) + 2a_{1\,n}x_1x_n + \ldots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n + {}$ $+a_{nn}x_n^2$, где $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — квадратичная форма от $n-1$ переменных. Эта форма также положительно определенная. В самом деле, если для некоторых чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, среди которых есть отличные от нуля, имеет место неравенство $g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \le 0$, то $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) = g(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \le 0$, что противоречит положительной определенности формы f. По предположению индукции все угловые главные миноры формы g (совпадающие с угловыми главными минорами формы f порядка $< n$) положительны. Остается показать, что $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) > 0$. Приведем форму f к нормальному виду. Пусть $\boldsymbol{S}$ — матрица неособой замены переменных, возникающая при этом. Тогда согласно формуле (6.7) в силу предложения 6.3.2 имеем $\boldsymbol{E}_n = \boldsymbol{S}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{S}$. По теореме 1.2.3 получаем $1 = \mathsf{det}(\boldsymbol{E}_n) = \mathsf{det}(\boldsymbol{S}^\top)\mathsf{det}(\boldsymbol{A})\mathsf{det}(\boldsymbol{S}) = \mathsf{det}(\boldsymbol{A})\mathsf{det}(\boldsymbol{S})^2$, откуда $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) = \frac{1}{\mathsf{det}(\boldsymbol{S})^2}$. Итак, $\mathsf{det}(\boldsymbol{A}) > 0$. Шаг индукции доказан.

Обратное утверждение теоремы доказывается также по индукции. База индукции очевидна. Предположим, что уже доказана положительная определенность любой квадратичной формы g от $n-1$ переменной, имеющей матрицу с положительными угловыми главными минорами. Рассмотрим форму

$f(x_1, \ldots, x_n)$, обладающую тем же свойством. Как и выше, представим f в виде $f(x_1, \ldots, x_n) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}) + 2a_{1\,n}x_1x_n + \ldots + 2a_{n-1\,n}x_{n-1}x_n + a_{nn}x_n^2$, где $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ — квадратичная форма от $n-1$ переменных. Так как угловые главные миноры матрицы формы g являются также угловыми главными минорами формы f, по индуктивному предположению форма g положительно определенная. Рассмотрим линейную замену переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$ на $y_1, \ldots, y_{n-1}$, приводящую эту форму к нормальному виду. Положим $y_n = x_n$. Форма f тогда примет вид $f = y_1^2 + \ldots + y_{n-1}^2 + 2b_{12}y_1y_n + \ldots + 2b_{n-1\,n}y_{n-1}y_n + b_{nn}y_n^2$, где b_{ij} — некоторые числа, точные выражения для которых здесь не важны. Заметим, что $y_i^2 + 2b_{in}y_iy_n = (y_i + b_{in}y_n)^2 - b_{in}^2y_n^2$. Сделав замену $z_1 = y_1 + b_{1n}y_n, \ldots, z_{n-1} = y_{n-1} + b_{1n}y_n$, $z_n = y_n$, приведем форму f к виду $z_1^2 + \ldots + z_{n-1}^2 + cz_n^2$. Определитель матрицы последней формы равен c. Повторяя рассуждения конца предыдущего абзаца, можно доказать, что определитель матрицы формы f имеет тот же знак, что и число c. Следовательно, $c > 0$. Поэтому форма f положительно определена. Шаг индукции доказан. $\square$

Из доказанного утверждения легко вывести следующий критерий того, что форма является отрицательно определенной.

Следствие 6.3.3. *Квадратичная форма является отрицательно определенной тогда и только тогда, когда знаки угловых главных миноров ее матрицы чередуются, причем миноры нечетного порядка отрицательны, а миноры четного порядка положительны.*

Приведем без доказательства еще критерий того, что квадратичная форма принимает положительные значения при условии, что ее переменные удовлетворяют данной системе линейных уравнений.

Предложение 6.3.3. *Пусть* $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}^\top \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ *— квадратичная форма от* n *переменных и* $\boldsymbol{B}$ *— матрица размеров* $m \times n$*, причем* $m < n$*. Форма* $f(\boldsymbol{x})$ *принимает положительные значения для всех ненулевых решений однородной системы линейных уравнений* $\boldsymbol{B}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{o}$ *тогда и только тогда, когда в блочной матрице* $\begin{pmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{B} \\ \boldsymbol{B}^\top & \boldsymbol{A} \end{pmatrix}$ *знаки последних* $n - m$ *угловых главных миноров совпадают со знаком числа* $(-1)^m$.

6.3.4. Закон инерции квадратичных форм

Как и в предыдущем пункте, здесь рассматриваются только формы над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Законом инерции квадратичных форм называется следующее утверждение.

Теорема 6.3.3. *Пусть* f *— квадратичная форма над полем* $\mathbb{R}$*. Тогда при любом способе приведения* f *к нормальному виду число квадратов с коэффициентом* 1 *получается одно и то же, равно как и число квадратов с коэффициентом* -1.

Доказательство. Пусть $g = x_1^2 + \ldots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \ldots - x_r^2$ и $h = y_1^2 + \ldots + y_l^2 - y_{l+1}^2 - \ldots - y_s^2$ — две формы в нормальном виде, эквивалентные f. По предложению 6.3.1 имеем $r = s$. Покажем, что $k = l$. Этим теорема будет доказана. Предположим, что $k < l$, и приведем это предположение к противоречию. Формы g и h эквивалентны между собой. Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{S}\boldsymbol{y}$ — неособая замена переменных, переводящая g в h. Распишем ее по переменным:

$$\begin{cases} x_1 = \sigma_{11}y_1 + \sigma_{12}y_2 + \ldots + \sigma_{1n}y_n, \\ x_2 = \sigma_{21}y_1 + \sigma_{22}y_2 + \ldots + \sigma_{2n}y_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \sigma_{n1}y_1 + \sigma_{n2}y_2 + \ldots + \sigma_{nn}y_n. \end{cases} \tag{6.12}$$

Предположим, что $y_{l+1} = \ldots = y_n = 0$ и рассмотрим следующую однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \sigma_{11}y_1 + \sigma_{12}y_2 + \ldots + \sigma_{1l}y_l = 0, \\ \sigma_{21}y_1 + \sigma_{22}y_2 + \ldots + \sigma_{2n}y_l = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sigma_{k1}y_1 + \sigma_{k2}y_2 + \ldots + \sigma_{kl}y_l = 0. \end{cases}$$

Так как $k < l$, рассматриваемая система имеет ненулевое решение, скажем, $c_1, c_2, \ldots, c_l$. Придадим переменным $y_1, \ldots, y_l$ найденные значения, а остальным переменным $y_{l+1}, \ldots, y_n$ — нулевые значения. Тогда форма h примет положительное значение. Вычисляя значения $x_1, \ldots, x_n$ для указанных значений $y_1, \ldots, y_n$ по формулам (6.12), получаем, что $x_1, \ldots, x_k$ принимают значение 0, а потому форма g принимает неположительное значение. Получили противоречие. Таким образом, $k \geq l$. Аналогично доказывается, что $l \geq k$. Таким образом, $k = l$. □

Из доказанной теоремы сразу получается следующий критерий эквивалентности двух квадратичных форм над полем $\mathbb{R}$.

Следствие 6.3.4. *Две квадратичные формы эквивалентны над полем $\mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда после приведения к нормальному виду число квадратов с коэффициентом 1 у них одно и то же и число квадратов с коэффициентом -1 одно и то же.*

§ 6.4. Дополнительные сведения о матрицах

6.4.1. Симметрические матрицы

В этом пункте рассматриваются матрицы над полем $\mathbb{R}$. Напомним, что для симметрической матрицы $\boldsymbol{A}$ порядка n согласно теореме 5.2.7 существует ортогональная матрица $\boldsymbol{U}$ и диагональная матрица $\boldsymbol{D}$ порядка n такие что

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}^{\top}\boldsymbol{D}\boldsymbol{U}, \tag{6.13}$$

причем $\boldsymbol{D}$ имеет на главной диагонали все собственные значения матрицы $\boldsymbol{A}$ с учетом кратности. Запишем $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{D}$ как линейные комбинации матричных единиц: $\boldsymbol{U} = \sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}$, $\boldsymbol{D} = \sum_{k=1}^{n}\delta_k\boldsymbol{E}_{kk}$ С учетом этих равенств из (6.13) получаем

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= (\textstyle\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ji}\boldsymbol{E}_{ij})(\sum_{k=1}^{n}\delta_k\boldsymbol{E}_{kk})(\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ij}\boldsymbol{E}_{ij}) = \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n}\delta_k(\sum_{i,j=1}^{n}\gamma_{ki}\gamma_{kj}\boldsymbol{E}_{ij}) = \sum_{k=1}^{n}\delta_k\boldsymbol{u}_k^{\top}\boldsymbol{u}_k,\end{aligned}$$

где $\boldsymbol{u}_k$ — k-ая строка матрицы $\boldsymbol{U}$. Следовательно, справедливо следующее равенство, определяющее *спектральное разложение* симметрической матрицы:

$$\boldsymbol{A} = \sum_{k=1}^{n}\delta_k\boldsymbol{u}_k^{\top}\boldsymbol{u}_k, \tag{6.14}$$

где δ_k — все собственные значения симметрической матрицы $\boldsymbol{A}$ с учетом кратности, $\boldsymbol{u}_k$ — строки подходящей ортогональной матрицы.

Предложение 6.4.1. *Ранг симметрической матрицы равен числу ее ненулевых собственных значений с учетом кратности.*

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{A}$ — симметрическая матрица порядка n и $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = r$. Из разложения (6.13) в силу утверждения 4) предложения 3.2.4 следует, что $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{D})$. Так как $\boldsymbol{D}$ — диагональная матрица, ее ранг равен числу ненулевых элементов на главной диагонали. Поскольку эти элементы исчерпывают спектр матрицы $\boldsymbol{A}$, получаем требуемое. □

Из предложения 6.4.1 в силу утверждения 5) предложения 3.2.4 вытекает следующее утверждение.

Следствие 6.4.1. *Пусть* $\boldsymbol{A}$ *— произвольная матрица из* $\mathbb{R}^{n\times k}$. *Тогда ее ранг равен числу ненулевых собственных значений каждой из симметрических матриц* $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^\top$ *с учетом кратности.*

Опираясь на разложение (6.13), можно определить степени симметрической матрицы при некоторых ограничениях на эту матрицу с произвольными рациональными и вещественными показателями.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — симметрическая матрица. Для любого натурального числа m из (6.13) с учетом того, что $\boldsymbol{U}$ — ортогональная матрица, т.е. $\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top = \boldsymbol{E}_n$, имеем $\boldsymbol{A}^m = (\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{D}\boldsymbol{U})^m = \boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{D}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{D})^{m-1}\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{D}^m\boldsymbol{U}$, откуда

$$\boldsymbol{A}^m = \boldsymbol{U}^\top\boldsymbol{D}^m\boldsymbol{U}. \tag{6.15}$$

Исходя из вида формулы (6.15), можно определить произвольную степень симметрической матрицы при условии, что определена соответствующая степень диагональной матрицы. Если на главной диагонали диагональной матрицы имеются только положительные числа, то ее произвольную вещественную степень естественно определить следующим образом:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_n \end{pmatrix}^\mu = \begin{pmatrix} \gamma_1^\mu & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \gamma_2^\mu & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_3^\mu & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \gamma_n^\mu \end{pmatrix}. \tag{6.16}$$

Если на главной диагонали диагональной матрицы элементы неотрицательны, то формулой (6.16) можно пользоваться для неотрицательных вещественных значений μ. Таким образом, для симметрической матрицы, все собственные значения которой положительны [неотрицательны], можно определить произвольную [неотрицательную] вещественную степень показателя m формулой (6.15).

В частности, если $\boldsymbol{A}$ — обратимая симметрическая матрица, то

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{U}.$$

Пусть $\boldsymbol{A}$ — симметрическая матрица, все собственные значения которой положительны. Тогда эта матрица обратима. Покажем, как можно найти матрицу $\boldsymbol{P}$ такую, что $\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{P} = \boldsymbol{A}^{-1}$. Взяв для $\boldsymbol{A}$ разложение (6.13), положим $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{U}$. Тогда $\boldsymbol{P}^\top \boldsymbol{P} = \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{D}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{D}^{-1} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Обратимся к симметрическим идемпотентным матрицам. Такие матрицы удовлетворяют условию $\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}$. Из формул (6.13) и (6.15) следует, что *спектр симметрической идемпотентной матрицы есть* $\{0, 1\}$. Если этот спектр не содержит нуля, то $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{E}_n$. Таким образом, *все симметрические идемпотентные матрицы, кроме единичной, являются вырожденными.* Из предложения 5.2.4 следует, что *ранг симметрической идемпотентной матрицы равен ее следу.*

В заключение этого пункта отметим без доказательства, что *для любой матрицы* $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times k}$, *при условии* $n \geq k$, *существуют такие матрицы* $\boldsymbol{U} \in \mathbb{R}^{n\times k}$, $\boldsymbol{W}, \boldsymbol{V} \in \mathbb{R}^{k\times k}$, *что* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{W}\boldsymbol{V}$, *причем* $\boldsymbol{U}^\top \boldsymbol{U} = \boldsymbol{E}_k$, $\boldsymbol{W}^\top \boldsymbol{W} = \boldsymbol{E}_k$, $\boldsymbol{W}$ *— диагональная матрица с неотрицательными элементами на главной диагонали.*

6.4.2. Кронекерово произведение матриц

По определению, для любых матриц $\boldsymbol{A} = (\alpha_{ij})_{n\times k}$, $\boldsymbol{B} = (\beta_{ij})_{m\times l}$ их *кронекерово произведение* есть матрица размеров $nm \times kl$

$$\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} \alpha_{11}\boldsymbol{B} & \alpha_{12}\boldsymbol{B} & \ldots & \alpha_{1k}\boldsymbol{B} \\ \alpha_{21}\boldsymbol{B} & \alpha_{22}\boldsymbol{B} & \ldots & \alpha_{2k}\boldsymbol{B} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \alpha_{n1}\boldsymbol{B} & \alpha_{n2}\boldsymbol{B} & \ldots & \alpha_{nk}\boldsymbol{B} \end{pmatrix}. \qquad (6.17)$$

Например,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 12 & 0 & 0 \\ 12 & 21 & 0 & 0 \\ 5 & 20 & 2 & 8 \\ 20 & 35 & 8 & 14 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\boldsymbol{A} \in \mathbb{F}^{n\times n}$, $\boldsymbol{B} \in \mathbb{F}^{m\times m}$. Прямое вычисление показывает, что

$$\begin{aligned} \mathsf{det}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) &= \mathsf{det}(\boldsymbol{A})^n \mathsf{det}(\boldsymbol{B})^m, \\ (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^\top &= \boldsymbol{A}^\top \otimes \boldsymbol{B}^\top, \\ \mathsf{tr}(\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B}) &= \mathsf{tr}(\boldsymbol{A})\mathsf{tr}(\boldsymbol{B}), \\ (\boldsymbol{A} \otimes \boldsymbol{B})^{-1} &= \boldsymbol{A}^{-1} \otimes \boldsymbol{B}^{-1}, \end{aligned}$$

причем последнее равенство выполняется при условии, что обе матрицы $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$ обратимы.

6.4.3. Псевдообратная матрица

Для произвольной матрицы из $\mathbb{C}^{n\times k}$ оказывается возможным определить матрицу, которая обладает некоторыми свойствами обратной матрицы и имеет применения для решения систем линейных уравнений.

Напомним, что через $\boldsymbol{A}^*$ обозначается матрица, сопряженная к матрице $\boldsymbol{A}$.

Матрица $\boldsymbol{A}^+$ называется *псевдообратной* для матрицы $\boldsymbol{A}$, если выполняются следующие условия:

а) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$,

б) $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{V}$ для некоторых матриц $\boldsymbol{U}$, $\boldsymbol{V}$.

Для доказательства существования псевдообратной матрицы потребуется следующее утверждение.

Лемма 6.4.1. *Для любой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times k}$ ранга r существуют матрица $\boldsymbol{B}$ размеров $n \times r$ и матрица $\boldsymbol{C}$ размеров $r \times k$ такие, что $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}$ и $\mathsf{r}(\boldsymbol{B}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{C}) = r$.*

Доказательство. Возьмем в качестве столбцов матрицы $\boldsymbol{B}$ какие-нибудь r линейно независимых столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$. Каждый столбец $\boldsymbol{a}_j$ матрицы $\boldsymbol{A}$ является линейной комбинацией выбранных столбцов с коэффициентами $\gamma_{1j}, \gamma_{2j}, \ldots, \gamma_{rj}$. Взяв эти числа в качестве j-го столбца матрицы $\boldsymbol{C}$, обеспечим выполнение равенства $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}$. Согласно утверждению 3) предложения 3.2.4 имеем $r \leq \mathsf{r}(\boldsymbol{B}), \mathsf{r}(\boldsymbol{C})$. С другой стороны, принимая во внимание размеры матриц $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, заключаем, что $\mathsf{r}(\boldsymbol{B}), \mathsf{r}(\boldsymbol{C}) \leq r$. Отсюда $\mathsf{r}(\boldsymbol{B}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{C}) = r$. □

Теорема 6.4.1. *Для любой матрицы $\boldsymbol{A} \in \mathbb{C}^{n\times k}$ существует единственная псевдообратная матрица. При этом выполняются следующие равенства:*

$$(\boldsymbol{A}^+)^+ = \boldsymbol{A}; \tag{6.18}$$

$$(\boldsymbol{A}^*)^+ = (\boldsymbol{A}^+)^*; \tag{6.19}$$

$$(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+; \tag{6.20}$$

$$(\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A})^* = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A}. \tag{6.21}$$

Доказательство. Для построения матрицы $\boldsymbol{A}^+$ воспользуемся разложением

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{BC}, \tag{6.22}$$

указанным в лемме 6.4.1. Найдем сначала $\boldsymbol{B}^+$. По определению должны выполняться равенства $\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$ и $\boldsymbol{B}^+ = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{B}^*$, где $\boldsymbol{U}_1$ — некоторая матрица. Отсюда $\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}$. Умножив обе части последнего равенства слева на $\boldsymbol{B}^*$, получим

$$\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}_1\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}. \tag{6.23}$$

Убедимся, что матрица $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}$ обратима. Она имеет размеры $r \times r$, где r — ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ и матрицы $\boldsymbol{B}$. Согласно следствию 5.1.2 имеем $r = \mathsf{r}(\boldsymbol{B}) = \mathsf{r}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})$. Следовательно, матрица $\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}$ — невырожденная. По теореме 1.2.4 она обратима.

Из равенства (6.23) следует, что $\boldsymbol{U}_1 = (\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}$. Подставляя правую часть в равенство $\boldsymbol{B}^+ = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{B}^*$, получаем следующую формулу:

$$\boldsymbol{B}^+ = (\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^*. \tag{6.24}$$

Проводя аналогичные рассуждения для матрицы $\boldsymbol{C}$, найдем

$$\boldsymbol{C}^+ = \boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}. \tag{6.25}$$

Покажем, что матрица

$$\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{B}^+ = \boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^*. \tag{6.26}$$

является псевдообратной для матрицы $\boldsymbol{A}$. Из (6.26) имеем $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^*$, откуда

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}.$$

Далее, обозначив через $\boldsymbol{K}$ матрицу $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}$, имеем $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{K}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{U}\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}^*$, где $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{K}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}\boldsymbol{C}$. Аналогично получаем $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{V} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{V}$, где $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}^*$.

Таким образом, существование псевдообратной матрицы для произвольной матрицы $\boldsymbol{A}$ доказано.

Установим единственность псевдообратной матрицы. Предположим, что для матрицы $\boldsymbol{A}$ имеется две псевдообратных матрицы $\boldsymbol{A}_1^+$ и $\boldsymbol{A}_2^+$, и докажем, что $\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{A}_2^+$. Пусть $\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{U}_1\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{A}_2^+ = \boldsymbol{U}_2\boldsymbol{A}^*$, $\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{V}_1$, $\boldsymbol{A}_2^+ = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{V}_2$. Положим $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{A}_2^+ - \boldsymbol{A}_1^+$, $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{U}_1$, $\boldsymbol{V} = \boldsymbol{V}_2 - \boldsymbol{V}_1$. Тогда $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{U}\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{V}$. Из равенств $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_1^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}_2^+\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$ следует $\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$, где $\boldsymbol{O}$ — нулевая матрица соответствующих размеров. Отсюда $(\boldsymbol{D}\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{D}^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*(\boldsymbol{A}^*\boldsymbol{V})^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{V}^*\boldsymbol{A}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. Таким образом, $(\boldsymbol{D}\boldsymbol{A})^*\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. Читателю предлагается убедиться, что тогда и $\boldsymbol{D}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{O}$. С помощью последнего равенства получаем $\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{U}\boldsymbol{A}^*)^* = \boldsymbol{D}\boldsymbol{A}\boldsymbol{U}^* = \boldsymbol{O}$. Итак, $\boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^* = \boldsymbol{O}$, откуда $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{O}$ и $\boldsymbol{A}_1^+ = \boldsymbol{A}_2^+$.

Единственность псевдообратной матрицы доказана. Следовательно, из любого разложения матрицы $\boldsymbol{A}$, удовлетворяющего условиям леммы 6.4.1, по формулам (6.26) получается одна и та же псевдообратная матрица.

Для доказательства равенства (6.19) воспользуемся разложением (6.22). Равенство $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{C}^*\boldsymbol{B}^*$ дает аналогичное разложение для матрицы $\boldsymbol{A}^*$. Заменяя в формуле (6.26) матрицы $\boldsymbol{B}$ на $\boldsymbol{C}^*$, $\boldsymbol{C}$ на $\boldsymbol{B}^*$ и повторяя рассуждения, использованные при построении матрицы $\boldsymbol{A}^+$ выше, будем иметь $(\boldsymbol{A}^*)^+ = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}\boldsymbol{C} = (\boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^* = (\boldsymbol{A}^+)^*$. Равенство (6.19) доказано.

Для доказательства равенства (6.18) заметим, что разложения (6.26), (6.24), (6.25) удовлетворяют условиям леммы 6.4.1. Повторяя построение псевдообратной матрицы исходя из соответствующего разложения и принимая во внимание, что псевдообратная матрица для обратимой матрицы совпадает с обратной, будем иметь $(\boldsymbol{A}^+)^+ = (\boldsymbol{B}^+)^+(\boldsymbol{C}^+)^+ = (\boldsymbol{B}^*)^+\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{C}^*)^+$. Согласно (6.19) и (6.24) имеем $(\boldsymbol{B}^*)^+ = (\boldsymbol{B}^+)^* = ((\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^*)^* = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}$ и аналогично из (6.25) получаем $(\boldsymbol{C}^*)^+ = (\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}\boldsymbol{C}$. Таким образом, $(\boldsymbol{A}^+)^+ = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}$, и равенство (6.18) доказано.

Для доказательства равенств (6.20) и (6.21) достаточно подставить в эти равенства вместо $\boldsymbol{A}^+$ полученное из (6.26) выражение $\boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^*$ и убедиться, что левая часть совпадает с правой. Проделаем это для равенства (6.20): $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{B}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^*)^{-1}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^*$, откуда $(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+)^* = \boldsymbol{B}(\boldsymbol{B}^*\boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^+$. □

Рассмотрим пример вычисления псевдообратной матрицы для матрицы $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Сначала найдем разложение матрицы $\boldsymbol{A}$, указанное в лемме 6.4.1. Найдем ранг матрицы $\boldsymbol{A}$ с помощью элементарных преобразований строк:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{6.27}$$

Отсюда $\mathsf{r}(\boldsymbol{A}) = 2$ и $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Матрица $\boldsymbol{B}$ образована первыми двумя столбцами матрицы $\boldsymbol{A}$, которые образуют максимальную линейную независимую подсистему столбцов матрицы $\boldsymbol{A}$. Матрица $\boldsymbol{C}$ получена из последней матрицы в (6.27) отбрасыванием последней (нулевой) строки.

Далее вычисляем

$$\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

и $(\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B})^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{B}^+ = (\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B})^{-1}\boldsymbol{B}^\top = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Затем находим

$$\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^\top)^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{E}_2$ и $\boldsymbol{C}^+ = \boldsymbol{C}^\top(\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^\top)^{-1} = \frac{1}{2}\boldsymbol{C}^\top$. Наконец, находим $\boldsymbol{A}^+ = \boldsymbol{C}^+\boldsymbol{B}^+ = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Рассмотрим систему линейных уравнений в матричной форме: $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$. Она может быть как совместной, так и несовместной. Столбец $\boldsymbol{x}_0$ называется *наилучшим приближенным решением* этой системы, если величина[1] $\|\boldsymbol{b} - \boldsymbol{Ax}_0\|_b$ достигает своего наименьшего значения и среди всех столбцов $\boldsymbol{x}$, для которых эта величина имеет наименьшее значение, столбец $\boldsymbol{x}_0$ имеет наименьшее значение нормы $\|\boldsymbol{x}_0\|_b$.

Отметим без доказательства, что *система линейных уравнений $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ имеет единственное наилучшее приближенное решение и оно определяется по формуле $\boldsymbol{x}_0 = \boldsymbol{A}^+\boldsymbol{b}$.*

§ 6.5. Приближенное решение систем линейных уравнений

В этом параграфе мы рассмотрим метод последовательных приближений для решения систем линейных уравнений и задачу оценивания ошибок, возникающих при вычислении обратных матриц и нахождении решений систем линейных уравнений.

6.5.1. Приближенные методы решения систем линейных уравнений

Наряду с точными методами решения систем линейных уравнений, к которым относится метод Гаусса-Жордана, используются и приближенные методы. Для систем с большим количеством неизвестных часто точные методы применять затруднительно или вообще невозможно. Мы рассмотрим один метод последовательных приближений, называемый *методом простой итерации.* Пусть $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ — матричная запись системы линейных уравнений из n уравнений с n неизвестными. Представим ее в виде $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{Dx}$, где $\boldsymbol{D}$ получается каким-либо способом из матрицы

[1] Определение нормы $\|\cdot\|_b$ см. в п. 6.1.1 на с. 229.

$\boldsymbol{A}$, например с помощью выражения из каждого i-го уравнения неизвестного x_i через остальные неизвестные. Возьмем произвольно начальное приближение $\boldsymbol{x}^{(0)}$ и будем вычислять последовательно $\boldsymbol{x}^{(n)} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{D}\boldsymbol{x}^{(n-1)}$ для $n = 1, 2, \ldots$. Оказывается, что если $\rho(\boldsymbol{D}) < 1$, то последовательность $\boldsymbol{x}^{(0)}, \boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(n)}, \ldots$ сходится к точному решению системы. Это можно использовать для приближенного нахождения решения. Выберем положительное число ε и будем вычислять значения $\boldsymbol{x}^{(n)}$ до тех пор, пока не выполнится неравенство $\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \boldsymbol{x}^{(n+1)}\| < \varepsilon$. За решение примем $\boldsymbol{x}^{(n+1)}$. На практике в качестве векторной нормы в пространстве столбцов можно использовать норму — длину столбца. При указанном выше способе получения $\boldsymbol{D}$ из $\boldsymbol{A}$ условие $\rho(\boldsymbol{D}) < 1$ выполняется, например, если в матрице $\boldsymbol{A}$ модуль любого элемента, стоящего в i-й строке и i-м столбце, больше, чем сумма модулей остальных элементов i-строки, для всех строк матрицы $\boldsymbol{A}$.

Рассмотрим пример. Решить методом простой итерации систему линейных уравнений

$$\begin{cases} 10x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = 16; \\ x_1 + 20x_2 + 2x_3 + x_4 = 24; \\ x_1 + x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 14; \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 + 20x_4 = 25. \end{cases}$$

Выразив из каждого уравнения неизвестное с соответствующим номером через остальные, получим систему уравнений, равносильную исходной:

$$\begin{cases} x_1 = 1{,}6 - 0{,}2x_2 - 0{,}3x_3 - 0{,}1x_4; \\ x_2 = 1{,}2 - 0{,}05x_1 - 0{,}1x_3 - 0{,}05x_4; \\ x_3 = 1{,}4 - 0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}2x_4; \\ x_4 = 1{,}25 - 0{,}1x_1 - 0{,}1x_2 - 0{,}05x_3. \end{cases} \tag{6.28}$$

Возьмем в качестве начального приближения значения

$$(1{,}6;\ 1{,}2;\ 1{,}4;\ 1{,}25),$$

даваемые свободными членами правых частей уравнений системы (6.28). В качестве ε выберем число $0,001$. Результаты вычислений оформим в виде таблицы. Каждая последующая строчка получается из предыдущей вычислением значений $x_i^{(n+1)}$ через $x_i^{(n)}$ по формулам (6.28). Дополнительно вычисляем длину вектора $\boldsymbol{x}^{(n+1)} - \boldsymbol{x}^{(n)}$. Заканчиваем вычисления, когда выполняется неравенство $|\boldsymbol{x}^{(n+1)} - \boldsymbol{x}^{(n)}| < \varepsilon$.

Итерация	x_1	x_2	x_3	x_4	$\lvert\boldsymbol{x}^{(n+1)} - \boldsymbol{x}^{(n)}\rvert$
$x^{(0)}$	$1,6$	$1,2$	$1,4$	$1,25$	—
$x^{(1)}$	$0,815$	$0,9175$	$0,87$	$0,9$	$1,048538$
$x^{(2)}$	$1,0655$	$1,02725$	$1,04675$	$1,03325$	$0,351840$
$x^{(3)}$	$0,9772$	$0,99039$	$0,98408$	$0,98839$	$0,122868$
$x^{(4)}$	$1,00786$	$1,00331$	$1,00556$	$1,00404$	$0,042590$
$x^{(5)}$	$0,99726$	$0,99885$	$0,99808$	$0,99860$	$0,014759$
$x^{(6)}$	$1,00095$	$1,00040$	$1,00067$	$1,00048$	$0,005121$
$x^{(7)}$	$0,99967$	$0,99986$	$0,99977$	$0,99983$	$0,001775$
$x^{(8)}$	$1,00011$	$1,00006$	$1,00008$	$1,00006$	$0,000616$

В качестве решения берем значения

$$(1,00011;\,1,00006;\,1,00008;\,1,00006).$$

Заметим, что точное решение рассматриваемой системы есть $(1;1;1;1)$.

6.5.2. Ошибки при нахождении обратных матриц

Пусть задана невырожденная матрица $\boldsymbol{A}$ порядка n. Можно считать, что возможно точное нахождение обратной матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$; однако, если вычисления производятся на цифровом компьютере, то неизбежны ошибки за счет округления. Более того, даже если все вычисления производятся с предельной точностью, элементы матрицы $\boldsymbol{A}$ могут являться результатами некоторых наблюдений или некоторых предварительных вычислений, вносящих ошибки. Как влияют округления и неточности в исходных данных на фактически найденную обратную матрицу?

Оказывается, что во многих алгоритмах эффект ошибок округлений при вычислениях можно смоделировать при помощи небольшого изменения начальных данных. Это значит, что вместо матрицы $\boldsymbol{A}$ мы рассматриваем матрицу $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}$, где изменение $\boldsymbol{D}$ начальных данных достаточно "мало", так что матрица $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}$ обратима. Тогда ошибка равна $\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}))^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})\boldsymbol{A}^{-1}$. Если $\rho(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})<1$, то матрица $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D}$ будет обратимой и согласно предложению 6.1.2 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})^{-1} = \boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}+(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})^2-\ldots+(-1)^k(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})^k+\ldots$. Отсюда $\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})^2\boldsymbol{A}^{-1}+\ldots+(-1)^{k-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})^k\boldsymbol{A}^{-1}+\ldots$. Таким образом, имеем точную формулу для ошибки

$$\begin{gathered}\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{A}^{-1}- \\ -(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})^2\boldsymbol{A}^{-1}+\ldots+(-1)^{k-1}(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})^k\boldsymbol{A}^{-1}+\ldots,\end{gathered} \tag{6.29}$$

если $\rho(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D})<1$. Рассмотрим произвольную матричную норму $\|\cdot\|$ (часто в качестве такой нормы берется спектральная норма $\|\cdot\|_s$). Предполагая, что $\|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}\|<1$ и $\|\boldsymbol{D}\|_s \le 1/\|\boldsymbol{A}^{-1}\|$, из (6.29) можно получить следующее неравенство для относительной ошибки вычисления матрицы $\boldsymbol{A}^{-1}$ (мы опускаем выкладки):

$$\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}-(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})^{-1}\|}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|} \le \frac{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|(\|\boldsymbol{D}\|/\|\boldsymbol{A}\|)}{1-\|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|(\|\boldsymbol{D}\|/\|\boldsymbol{A}\|)}.$$

Величина

$$\kappa(\boldsymbol{A}) = \begin{cases} \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\|, \text{ если матрица } \boldsymbol{A} \text{ невырожденна;} \\ \infty, \text{ если матрица } \boldsymbol{A} \text{ вырожденна} \end{cases} \tag{6.30}$$

называется *числом обусловленности матрицы* $\boldsymbol{A}$ *по отношению к норме* $\|\cdot\|$. Так как $\|\boldsymbol{E}\|=1$, для невырожденной матрицы $\boldsymbol{A}$

имеем $\kappa(\boldsymbol{A}) = \|\boldsymbol{A}^{-1}\|\|\boldsymbol{A}\| \geq \|\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{A}\| = \|\boldsymbol{E}\| = 1$. Таким образом, всегда $\kappa(\boldsymbol{A}) \geq 1$. Из неравенства (6.30) вытекает следующая оценка

$$\frac{\|\boldsymbol{A}^{-1} - (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{D})^{-1}\|}{\|\boldsymbol{A}^{-1}\|} \leq \frac{\kappa(\boldsymbol{A})}{1-\kappa(\boldsymbol{A})(\|\boldsymbol{D}\|/\|\boldsymbol{A}\|)} \cdot \frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} \tag{6.31}$$

относительной ошибки в обратной матрице через относительную ошибку в исходной матрице. Эта формула показывает, что относительная ошибка в обратной матрице имеет одинаковый порядок малости с относительной ошибкой в начальных данных при условии, что величина $\kappa(\boldsymbol{A})$ не слишком велика. Имея в виду задачу обращения матриц, при больших значениях $\kappa(\boldsymbol{A})$ говорят о *плохой обусловленности* матрицы $\boldsymbol{A}$ по отношению к данной норме, а при значениях $\kappa(\boldsymbol{A})$, близких к 1, говорят о *хорошей обусловленности* матрицы $\boldsymbol{A}$ по отношению к данной норме. Если матрица среднего размера с элементами умеренной величины плохо обусловлена, то в матрице $\boldsymbol{A}^{-1}$ обязательно будут большие элементы. Для отыскания числа обусловленности конкретных матриц мы будем использовать спектральную матричную норму.

Рассмотрим примеры. Найти число обусловленности матриц $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ и $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0,1 & 1 \\ -0,1 & 1 \end{pmatrix}$.

Имеем $\boldsymbol{A}^\top \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, откуда $\|\boldsymbol{A}\|_s = 2$. Далее, $\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $(\boldsymbol{A}^{-1})^\top \boldsymbol{A}^{-1} =$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 0 & 0,5 \end{pmatrix},$$

откуда $\|\boldsymbol{A}^{-1}\|_s = 0,5$. По формуле (6.30) получаем $\kappa(\boldsymbol{A}) = 2 \cdot 0,5 = 1$.

Для матрицы $\boldsymbol{B}$ аналогично получаем

$$\boldsymbol{B}^\top \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 0,1 & -0,1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,1 & 1 \\ -0,1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,02 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

откуда $\|\boldsymbol{B}\|_s = \max\{0,02, 2\} = 2$. Далее, $\boldsymbol{B}^{-1} = 5 \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix}$ и $(\boldsymbol{B}^{-1})^\top \boldsymbol{B}^{-1} = 25 \begin{pmatrix} 1 & 0,1 \\ -1 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0,1 & 0,1 \end{pmatrix} = 25 \begin{pmatrix} 1,01 & 0,99 \\ 0,99 & 1,01 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 25,25 & 24,75 \\ 24,75 & 25,25 \end{pmatrix}$. Характеристический многочлен последней матрицы равен $(25,25 - x)^2 - 24,75^2 = (25,25 - x - 24,75)(25,25 - x + 24,75) = (0,5 - x)(50 - x)$. Отсюда $\|\boldsymbol{B}\|_s = \max\{0,5; 50\} = 50$. Таким образом, $\kappa(\boldsymbol{B}) = 100$.

Мы видим, что в матрице $\boldsymbol{B}^{-1}$ есть элементы, в 5 раз превосходящие наибольший элемент $\boldsymbol{B}$, в то время как в матрице $\boldsymbol{A}^{-1}$ наибольший по модулю элемент такой же, как в матрице $\boldsymbol{A}$.

6.5.3. Ошибки при решении систем линейных уравнений

Здесь мы приведем априорные оценки точности решения системы линейных уравнений. Пусть требуется решить систему линейных уравнений $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$, где число уравнений равно числу неизвестных, но вследствие ошибок в вычислениях или неопределенности в начальных данных фактически решается система $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{D})\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{b} + \boldsymbol{d}$, где $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{d}$ — "малые" матрица и вектор. Тогда ошибку $\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}$ можно оценить сверху при условии $\rho(\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{D}) < 1$ следующим образом (здесь векторная норма предполагается согласованной с матричной нормой):

$$\frac{\|\boldsymbol{x} - \hat{\boldsymbol{x}}\|}{\|\boldsymbol{x}\|} \le \frac{\kappa(\boldsymbol{A})}{1 - \kappa(\boldsymbol{A})(\|\boldsymbol{D}\|/\|\boldsymbol{A}\|)} \cdot \frac{\|\boldsymbol{D}\|}{\|\boldsymbol{A}\|} + \frac{\kappa(\boldsymbol{A})}{1 - \kappa(\boldsymbol{A})(\|\boldsymbol{D}\|/\|\boldsymbol{A}\|)} \cdot \frac{\|\boldsymbol{d}\|}{\|\boldsymbol{b}\|}.$$

Число обусловлености $\kappa(\boldsymbol{A})$ снова определяет чувствительность оценки ошибки в решении к погрешностям в начальных данных.

Рассмотрим примеры хорошо обусловленной и плохо обусловленной систем линейных уравнений. Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0; \\ x_1 + x_2 = 2. \end{cases} \tag{6.32}$$

Ее матрица совпадает с рассмотренной в примерах предыдущего пункта матрицей $\boldsymbol{A}$, которая хорошо обусловлена. Решение системы — пара $(1, 1)$. Предположим, что правые части системы (6.32) определены неточно, как $0,1$ и $1,9$. Тогда новая система

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 0,1; \\ x_1 + x_2 = 1,9 \end{cases}$$

имеет решение $(1; 0,9)$, которое не сильно отличается от решения исходной системы. Геометрически хорошая обусловленность системы (6.32) может быть проиллюстрирована следующим образом. Решение этой системы есть координаты точки пересечения прямых $x_2 = x_1$, $x_2 = 2 - x_1$. Если правые части системы (6.32) изменяются не более чем на ε, то прямые, соответствующие новым уравнениям, заключены в полосах, указанных на рис. 14, и точка, соответствующая решению, помещается внутри квадрата с вершинами в выделенных точках, “не слишком далеко” от точки $(1, 1)$.

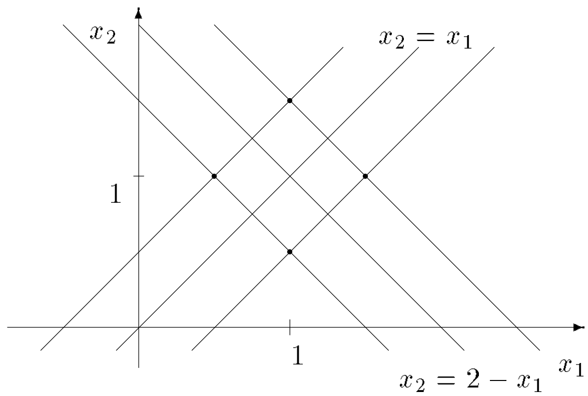

Рис. 14

Пусть теперь дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} 0,1x_1 + x_2 = 1,1; \\ -0,1x_1 + x_2 = 0,9. \end{cases} \tag{6.33}$$

Ее матрица совпадает с рассмотренной в примерах предыдущего пункта матрицей $\boldsymbol{B}$, которая плохо обусловлена. Решение системы — пара $(1,1)$. Предположим, что правые части системы (6.33) определены неточно, как $1,0$ и $1,0$. Тогда новая система $\begin{cases} 0,1x_1 + x_2 = 1,0; \\ -0,1x_1 + x_2 = 1,0, \end{cases}$ имеет решение $(0; 1,0)$, которое сильно отличается от решения исходной системы. Геометрически плохая обусловленность системы (6.33) может быть проиллюстрирована следующим образом. Решение этой системы есть координаты точки пересечения прямых $x_2 = 1,1 - 0,1x_1$, $x_2 = 0,9 + 0,1x_1$. Если правые части системы (6.33) изменяются не более чем на ε, то прямые, соответствующие новым уравнениям, заключены в полосах, указанных на рис. 15, и точка, соответствующая решению, помещается внутри параллелограмма с вершинами в выделенных точках, иногда “довольно далеко” от точки $(1,1)$.

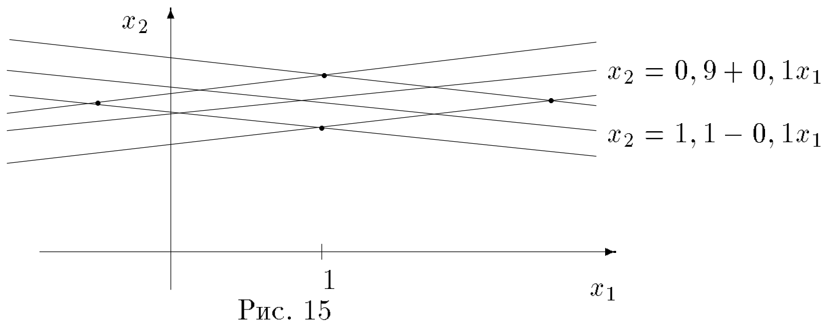

Рис. 15

Задачи: [17], №223–240

Глава 7

Дополнения

В этой главе собраны некоторые математические понятия и факты, используемые в курсе линейной алгебры, но не относящиеся к ее предмету.

§ 7.1. Элементы теории множеств

Понятия множества и элемента множества являются исходными в математике и не определяются в терминах других понятий. Соотношения между этими понятиями могут быть сформулированы в виде аксиом. Однако аксиоматическое изложение теории множеств весьма трудно для восприятия и особенно для первоначального знакомства с элементами этой теории (такое изложение может быть найдено, например, в книге [12], а также в главе 9 книги [23]). Здесь будет дано изложение "наивной" теории множеств в объеме, необходимом для понимания курса линейной алгебры; последовательному курсу "наивной" теории множеств посвящена книга [2]. Большинство из приводимых ниже понятий обычно рассматривается в школьном курсе математики.

7.1.1. Множества и операции с ними

Под *множеством* понимается совокупность объектов, называемых *элементами множества*, обычно объединенных каким–либо свойством; последнее особенно характерно при определении бесконечных множеств. Конечные множества можно задавать перечислением их элементов. Например,

$$\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$$

представляет собой множество натуральных чисел от нуля до девяти. А вот пример бесконечного множества натуральных чисел:

$$\{n \mid n\text{—четное натуральное число}\}.$$

В такой записи в фигурных скобках записывается сначала общий вид элемента множества, а затем, через вертикальную черту, условие, определяющее элементы множества. При этом подразумевается, что множество состоит из всех элементов, удовлетворяющих указанному условию.

Обозначаются множества заглавными буквами, а их элементы строчными. То, что a является элементом множества A, записывается так: $a \in A$ и читается "a принадлежит A". Если b не является элементом множества A, то это записывается так: $b \notin A$. Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначается это через $A \subseteq B$), если для любого элемента a из $a \in A$ следует $a \in B$. Два множества A и B называются *равными* (обозначение обычное: $A = B$), если $A \subseteq B$ и $B \subseteq A$. Легко проверить, что из $A \subseteq B$ и $B \subseteq C$ следует $A \subseteq C$.

Важную роль играет множество, не содержащее ни одного элемента. Оно называется *пустым множеством* и обозначается через $\emptyset$. Такое множество по определению считается подмножеством любого множества. Оно часто возникает как множество решений уравнения или системы уравнений. Например, несовместная система линейных уравнений имеет пустое множество решений. Пустым также является множество вещественных решений уравнения $x^2 + 1 = 0$.

Число элементов конечного множества A называется его *мощностью* или *порядком* и обозначается через $|A|$. По определению полагают $|\emptyset| = 0$.

Пусть даны два множества A и B. Из них можно образовать следующие три множества:

пересечение $A \cap B$ множеств A и B, равное по определению $\{x \mid x \in A \text{ и } x \in B\}$;

объединение $A \cup B$ множеств A и B, равное по определению $\{x \mid x \in A \text{ или } x \in B\}$;

разность $A \backslash B$ множеств A и B, равная по определению $\{x \mid x \in A \text{ и } x \notin B\}$.

Объединение двух непустых множеств всегда непусто. Множества называются *непересекающимися*, если их пересечение пусто. Для любых множеств A, B, C справедливы следующие равенства, проверяемые непосредственно по определению:

1) $A \cap A = A$, $A \cup A = A$;

2) $A \cap B = B \cap A$, $A \cup B = B \cup A$;

3) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$, $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;

4) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$, $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$;

5) $A \cap (A \cup B) = A$, $A \cup (A \cap B) = A$;

6) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$;

7) $A \backslash (B \cap C) = (A \backslash B) \cup (A \backslash C)$, $A \backslash (B \cup C) = (A \backslash B) \cap (A \backslash C)$.

7.1.2. Отображения

Пусть X и Y—два множества. *Декартовым произведением* $X \times Y$ этих множеств называется множество всевозможных упорядоченных пар (x, y) элементов $x \in X$ и $y \in Y$. Для любых $x_1, x_2 \in X$ и $y_1, y_2 \in Y$ равенство $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ имеет место по определению тогда и только тогда, когда $x_1 = x_1$ и $y_1 = y_2$. *Отображением* из множества X в множество Y называется всякое подмножество $\mathcal{F}$ декартова произведения $X \times Y$, обладающее свойствами:

1) для любого $x \in X$ существует $y \in Y$ такой, что $(x, y) \in \mathcal{F}$ (свойство всюду определенности);

2) для любых $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ из условия $(x, y_1), (x, y_2) \in \mathcal{F}$ следует $y_1 = y_2$ (свойство функциональности).

Синонимом слова “отображение” является слово “*функция*”. Вместо $(x, y) \in \mathcal{F}$ принято писать $\mathcal{F}(x) = y$. Элемент $y \in Y$ называется *образом* элемента $x \in X$ при отображении $\mathcal{F}$ [он обозначается также через $\mathcal{F}(x)$], а элемент x—*прообразом* элемента y при отображении $\mathcal{F}$. Тот факт, что $\mathcal{F}$ является отображением множества X в множество Y, принято записывать так: $\mathcal{F} : X \longrightarrow Y$. Для любого подмножества X_1 множества X через $\mathcal{F}(X_1)$ обозначим множество $\{\mathcal{F}(x) \mid x \in X_1\}$; оно называется *образом* подмножества X_1 (при отображении $\mathcal{F}$). Множество $\mathcal{F}(X)$ называется *образом отображения* $\mathcal{F}$. Если $\mathcal{F}(X) = Y$, то отображение $\mathcal{F}$ называется *сюръективным*, или отображением X *на* Y. Отображение $\mathcal{F}$ называется *инъективным*, или *взаимно-однозначным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$ из равенства $\mathcal{F}(x_1) = \mathcal{F}(x_2)$ следует $x_1 = x_2$. Отображение $\mathcal{F}$ называется *биективным*, или *биекцией*, если оно инъективно и сюръективно. *Тождественным отображением* на множестве X называется отображение $\mathcal{E}_X : X \longrightarrow X$, определенное правилом $\mathcal{E}_X(x) = x$ для любого $x \in X$.

Пусть даны отображения $\mathcal{A} : X \longrightarrow Y$ и $\mathcal{B} : Y \longrightarrow Z$. *Произведением* $\mathcal{AB}$ отображений $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ называется отображение $\mathcal{C} : X \longrightarrow Z$, определенное правилом $\mathcal{C}(x) = \mathcal{B}(\mathcal{A}(x))$ для любого $x \in X$. Для определенного таким образом произведения используются также термины “композиция” и “суперпозиция”. Произведение двух биекций является биекцией.

Отображение $\mathcal{B} : Y \longrightarrow X$ называется *обратным* к отображению $\mathcal{A} : X \longrightarrow Y$, если $\mathcal{AB} = \mathcal{E}_X$ и $\mathcal{BA} = \mathcal{E}_Y$. Отображение $\mathcal{A} : X \longrightarrow Y$ обладает обратным тогда и только тогда, когда оно является биекцией.

7.1.3. Метод математической индукции

Индукцией называется способ рассуждений от частного к общему. Для доказательства утверждений, зависящих от натурального числа n, используется так называемый *метод математической индукции.* Пусть $\mathcal{A} = \mathcal{A}(n)$—некоторое утверждение, в формулировке которого участвует натуральное число n. Фактически мы имеем бесконечную последовательность утверждений $\mathcal{A}(1), \mathcal{A}(2), \dots$. Чтобы доказать справедливость утверждения $\mathcal{A}$, требуется доказать $\mathcal{A}(k)$ при наименьшем возможном значении k (это так называемая *база индукции*) и доказать, что из справедливости утверждений $\mathcal{A}(k)$ при всех $k < n$ следует справедливость утверждения $\mathcal{A}(n)$ (это *шаг индукции*). Иногда в шаге индукции достаточно показать, что из справедливости утверждения $\mathcal{A}(n-1)$ следует справедливость утверждения $\mathcal{A}(n)$. Примеры рассуждений по индукции встречаются в доказательствах основного текста; см., например, доказательства теорем 1.2.1, 3.1.1, 4.3.1, 5.1.2, 5.2.3, 5.2.4, 6.3.1, 6.3.2.

§ 7.2. Многочлены над полем

Этот параграф содержит необходимые для понимания основного текста понятия и формулировки результатов относительно числовых полей и многочленов над такими полями. Доказательства соответствующих результатов могут быть найдены, например, в любой из книг [9], [10] [13], [20].

7.2.1. Понятие числового поля

Числовым полем называется множество чисел, содержащее число 1 и вместе с любыми числами α, β содержащее числа $\alpha - \beta$ и (в случае, когда $\beta \neq 0$) $\frac{\alpha}{\beta}$. Это условие равносильно тому, что множество чисел замкнуто относительно сложения, умножения, взятия противоположного числа, взятия обратного числа для ненулевого числа и содержит числа 0 и 1. Известными из школьного курса математики примерами числовых полей являются множества $\mathbb{Q}$ всех рациональных чисел и множество $\mathbb{R}$ всех действительных чисел. В числовом поле числа можно складывать, вычитать, умножать и делить на ненулевое число. Наиболее широким среди числовых полей является поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. Его можно определить как совокупность всех формальных выражений вида $a + bi$, где a, b — произвольные действительные числа, i — символ, называемый *мнимой единицей*. Операции сложения и умножения определяются следующим образом:

$$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i, \tag{7.1}$$

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i. \tag{7.2}$$

Легко проверить, что эти операции удовлетворяют тем же законам, что и операции сложения и умножения действительных чисел.

Действительные числа отождествляют с комплексными числами вида $a + 0i$; операции над такими комплексными числами согласно (7.1) и (7.2) выполняются так же, как над действительными числами. Число $0 + 1i$ обозначают просто через i; согласно (7.2) $i^2 = (0 + 1i)(0 + 1i) = -1 + 0i = -1$, т.е. $i^2 = -1$. Этим объясняется термин "мнимая единица".

Для комплексного числа $z = a + bi$ число $a - bi$ называется *сопряженным* с z и обозначается через $\overline{z}$. Используя формулы (7.1) и (7.2), легко получить следующие свойства операции перехода к сопряженному числу:

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}; \ \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}. \tag{7.3}$$

Если $z = a + bi$, то $z\overline{z} = a^2 + b^2 \geq 0$; неотрицательное действительное число $\sqrt{z\overline{z}}$ называется *модулем* числа z и обозначается через $|z|$. Для модуля комплексного числа справедливы такие свойства:

$$|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|; \ |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|. \tag{7.4}$$

Комплексные числа имеют следующую геометрическую интерпретацию. Зафиксируем прямоугольную декартову систему координат на плоскости и сопоставим комплексному числу $a + bi$ точку M с координатами a, b. Тогда, например, модуль числа — это расстояние от точки до начала координат. Такая плоскость называется *комплексной плоскостью.* Операции с комплексными числами также имеют естественную геометрическую интерпретацию, если сопоставить каждой точке ее радиус-вектор; читателю предлагается самостоятельно найти такую интерпретацию. Каждое ненулевое комплексное число z может быть представлено в *тригонометрической форме*: $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где ρ — модуль числа z, а φ — *аргумент*, т.е. угол, образованный вектором, изображающим z, с положительным направлением оси Ox выбранной системы координат. При этом ρ принимает положительные значения, а φ — произвольные. Числу z соответствует бесконечно много значений аргумента, отличающихся друг от друга на число, кратное 2π. Алгебраическая форма $a + bi$ числа z связана с его тригонометрической формой $\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ следующим образом: $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\cos\varphi = a/\rho$, $\sin\varphi = b/\rho$. Тригонометрическая форма нуля не определяется, так как аргумент этого числа неопределен. Очевидно, что комплексное число равно нулю тогда и только тогда, когда его модуль равен нулю.

Теорема 7.2.1. *Поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ содержится в любом числовом поле. Если для числового поля $\mathbb{F}$ выполняются условия $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{F} \subseteq \mathbb{C}$, то либо $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, либо $\mathbb{F} = \mathbb{C}$.*

7.2.2. Многочлены и операции с ними

Пусть $\mathbb{F}$ — числовое поле. Формальное выражение вида

$$f(x) = \alpha_0 x^n + \alpha_1 x^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1} x + \alpha_n, \tag{7.5}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{F}$, n — натуральное число, называется *многочленом* над полем $\mathbb{F}$ с коэффициентами $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$; если $\alpha_0 \neq 0$, то говорят, что многочлен имеет *степень* n, обозначаемую через $\mathsf{deg}(f)$. Для нулевого многочлена степень определяется так: $\mathsf{deg}(0) = -\infty$. Символ $-\infty$ по определению считается меньше любого целого числа, и для любого целого m по определению принимается, что $m+(-\infty) = -\infty+m = -\infty$. Сложение и умножение многочленов определяются обычным образом. Коэффициенты суммы [произведения] выражаются через коэффициенты слагаемых [сомножителей] посредством операции сложения [операций сложения и умножения]. Легко видеть, что

$$\mathsf{deg}(f(x) + g(x)) \leq \max\{\mathsf{deg}(f), \mathsf{deg}(g)\}$$

и

$$\mathsf{deg}(f(x)g(x)) = \mathsf{deg}(f(x)) + \mathsf{deg}(g(x)).$$

Теорема 7.2.2. *Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два многочлена и $\mathsf{deg}(f(x)) \geq \geq \mathsf{deg}(g(x))$, $g(x) \neq 0$. Тогда существуют такие однозначно определенные многочлены $q(x)$ и $r(x)$, что*

$$f(x) = q(x)g(x) + r(x) \text{ и } \mathsf{deg}(r(x)) < \mathsf{deg}(g(x)). \tag{7.6}$$

В равенстве (7.6) многочлен $q(x)$ называется *частным*, а многочлен $r(x)$ — *остатком* от деления (с остатком) $f(x)$ на $g(x)$. Если $r(x) = 0$, то говорят, что многочлен $f(x)$ *делится* на многочлен $g(x)$; в этом случае $f(x) = q(x)g(x)$.

Многочлены $f(x)$ и $g(x)$ называются *ассоциированными*, если существует ненулевое число $\gamma \in \mathbb{F}$ такое, что $f(x) = \gamma g(x)$. Многочлен $u(x)$ называется *неприводимым* над полем $\mathbb{F}$, если $\mathsf{deg}(u(x)) > 0$ и из того, что $u(x) = v(x)w(x)$, следует, что $v(x)$ или $w(x)$ ассоциирован с $u(x)$. Легко понять, что многочлен первой степени неприводим над любым полем.

Теорема 7.2.3. *Любой многочлен степени больше* 0 *над полем* $\mathbb{F}$ *представим в виде произведения неприводимых над полем* $\mathbb{F}$ *многочленов. Это представление определено однозначно с точностью до перестановки сомножителей и замены их ассоциированными многочленами.*

7.2.3. Корни многочленов

Пусть $f(x)$ — многочлен над полем $\mathbb{F}$, заданный формулой (7.5). Этот многочлен можно рассматривать как функцию из $\mathbb{F}$ в $\mathbb{F}$, сопоставляющую каждому элементу $\beta \in \mathbb{F}$ элемент

$$f(\beta) = \alpha_0\beta^n + \alpha_1\beta^{n-1} + \ldots + \alpha_{n-1}\beta + \alpha_n.$$

Предложение 7.2.1. *Пусть* $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ — *многочлен над полем* $\mathbb{F}$ *и* $\alpha \in \mathbb{F}$. *Тогда* $f(x) = q(x)(x-\alpha) + f(\alpha)$, где $q(x) = b_0x^{n-1} + b_1x^{n-2} + \ldots + b_{n-1}$, *причем*

$$b_0 = a_0,\ b_k = a_k + \alpha b_{k-1} \text{ при всех } k = 1, \ldots, n-1, \qquad f(\alpha) = a_n + \alpha b_{n-1}. \tag{7.7}$$

Число $\alpha \in \mathbb{F}$ называется *корнем* многочлена $f(x)$, если $f(\alpha) = 0$. В силу предложения 7.2.1 число α будет корнем многочлена $f(x)$ тогда и только тогда, когда $f(x) = q(x)(x-\alpha)$. Натуральное число k называется *кратностью* корня α многочлена $f(x)$, если $f(x) = g(x)(x-\alpha)^k$ и $g(\alpha) \neq 0$. Легко понять, что любой многочлен степени $n \geq 1$ имеет не более n корней в поле $\mathbb{F}$, а сумма кратностей также не превосходит n.

Теорема 7.2.4. *Любой многочлен степени больше* 0 *над полем комплексных чисел имеет комплексный корень.*

Следствие 7.2.1. *Любой многочлен с комплексными коэффициентами разлагается на линейные множители с комплексными коэффициентами. Сумма всех корней (с учетом кратности) многочлена степени* n *равна его коэффициенту при* x^{n-1}, *умноженному на* -1.

Предложение 7.2.2. *Если многочлен с действительными коэффициентами имеет комплексный корень γ, то и число $\overline{\gamma}$ является корнем этого многочлена.*

Отыскивать рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами помогает следующее утверждение.

Предложение 7.2.3. *Пусть*

$$f(x) = m_0x^n + m_1x^{n-1} + \ldots + m_{n-1}x + m_n \text{ —}$$

многочлен с целыми коэффициентами, $\frac{p}{q}$ — несократимая дробь. Если $\frac{p}{q}$ — корень многочлена $f(x)$, то p является делителем m_n, q является делителем m_0 и для любого целого числа s число $f(s)$ делится на $p - qs$.

Рассмотрим пример. Найти целые корни многочлена $f(x) = x^3 + 4x^2 + x - 6$.

Решение. Согласно предложению 7.2.3 корни многочлена $f(x)$ являются делителями числа -6. Это число имеет 6 делителей $1, -1$, 2, -2, 3, -3, 6, -6. Находя значения многочлена $f(x)$ от указанных чисел, имеем $f(1) = 0$, $f(-2) = 0$, $f(3) = 0$. Таким образом, числа $\xi_1 = 1$, $\xi_2 = -2$, $\xi_3 = 3$ являются корнями многочлена $f(x)$.

В приведенном примере значения многочлена от делителей свободного члена вычисляются очень легко. Однако, если коэффициенты многочлена велики, его значение от данного числа удобно вычислять, используя так называемую *схему Горнера*. Она основана на формулах (7.7) из предложения 7.2.1 и позволяет найти как значение $f(\alpha)$, так и коэффициенты частного $q(x)$ от деления $f(x)$ на $x - \alpha$ в случае, когда α является корнем $f(x)$. Рассмотрим пример. Пусть требуется найти значение многочлена $f(x) = x^3 - 18x^2 + 99x - 162$ от числа 3. Вычисления оформляем в виде следующей таблицы:

	1	−18	99	−162
3	1	−15	54	0

Здесь в первой строке выписаны коэффициенты многочлена $f(x)$, а во второй сначала записано число 3, затем перенесен старший коэффициент $f(x)$, равный 1. Каждое последующее число во второй строке получается прибавлением к соответствующему числу первой строки предыдущего числа второй, умноженного на 3: $-15 = -18 + 1 \cdot 3$, $54 = 99 + (-15) \cdot 3$, $0 = -162 + 54 \cdot 3$. Отсюда получаем $f(3) = 0$ и частное $q(x) = x^2 - 15x + 54$ от деления $f(x)$ на $x - 3$, т.е. $f(x) = (x^2 - 15x + 54)(x - 3)$. Заметим, что теперь легко найти и остальные корни многочлена $f(x)$, решив квадратное уравнение $x^2 - 15x + 54 = 0$.

Над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ в силу теоремы 7.2.4 неприводимыми многочленами являются многочлены первой степени и только они.

Над полем действительных чисел неприводимыми многочленами являются многочлены первой степени и многочлены второй степени, не имеющие действительных корней (т.е. имеющие отрицательный дискриминант).

Над полем рациональных чисел существуют неприводимые многочлены любой степени. Достаточное условие неприводимости многочлена с целыми коэффициентами состоит в том, что *существует простое число, которое не делит старший коэффициент, делит все остальные коэффициенты, а его квадрат не делит свободный член.*

Литература

1. Александров П.С. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.*–М.: Наука, 1979.

2. Архангельский А.В. *Канторовская теория множеств.*–М.: Изд-во МГУ, 1988.

3. Беклемишев Д.В. *Курс аналитической геометрии и линейной алгебры.*–М.: Наука, 1987.

4. Бугров Я.С., Никольский С.М. *Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии.*–М.: Наука, 1984.

5. Воеводин В.В. *Линейная алгебра.*–М.: Наука, 1984.

6. Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* 4-е изд., доп.–М.: Наука, 1988.

7. Замятин А.П., Верников Б.М., Булатов А.А. *Линейная алгебра и аналитическая геометрия.* Ч. I,II,III,IV / Екатеринбург: Изд–во Урал. ун–та, 1998.

8. Интрилигатор М. *Математические методы оптимизации и экономическая теория.*–М.: Прогресс, 1975.

9. Кострикин А.И. *Введение в алгебру. Основы алгебры.*–М.: Наука, 1994.

10. Кострикин А.И. *Введение в алгебру. Основы алгебры.*–М.: Физико-математическая литература, 2000.

11. Кострикин А.И. *Введение в алгебру. Линейная алгебра.*–М.: Физико-математическая литература, 2000.

12. Куратовский К., Мостовский А. *Теория множеств.*–М.: Мир, 1970.

13. Курош А.Г. *Курс высшей алгебры.*–М.: Наука, 1975.

14. Мальцев А.И. *Основы линейной алгебры.*–М.: Наука, 1973.

15. Овсянников А.Я. *Программа учебной дисциплины "Линейная алгебра" для специальностей 061100 "Менеджмент" и 060400 "Финансы и кредит".* / Екатеринбург: Гуманитарный университет, 1997.

16. Овсянников А.Я. *Линейная алгебра*: Учебное пособие для для студентов экономических специальностей. Екатеринбург: Гуманитарный университет, 1997.

17. Овсянников А.Я. *Сборник задач по линейной алгебре*: Учебное пособие для студентов экономических специальностей. Екатеринбург: Гуманитарный университет, 2001.

18. Сесекин Н.Ф. *Линейные алгебраические системы* // Методическая разработка по теории псевдорешений линейных систем и псевдообращений матриц и линейных отображений, Урал. гос. ун-т, Свердловск, 1987.

19. Сесекин Н.Ф. *Основы линейной алгебры*: Учебное пособие. / Урал. гос. ун-т. Свердловск, 1987; 2-е изд., перераб. и доп. Екатеринбург, 1992; 3-е изд., перераб. и доп. Екатеринбург, 1997.

20. Фаддеев Д.К. *Лекции по алгебре.*–М.: Наука, 1984.

21. Хорн Р., Джонсон Ч. *Матричный анализ.*–М.: Мир, 1989.

22. Чуркин В.А. *Жорданова классификация конечномерных линейных операторов*: Методические указания к новому методу построения жордановой базы для линейного оператора. / Новосибир. гос. ун-т. Новосибирск, 1991.

23. Шенфилд Дж. *Математическая логика.*–М.: Наука, 1975.

24. *Математический энциклопедический словарь.* М.: Советская энциклопедия, 1988.

25. Greene W.H. *Econometric Analysis. Third Edition.* Prentice Hall, New Jersey, 1997.

Предметный указатель

Список обозначений

$\emptyset$ — пустое множество;

$\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел;

$\mathbb{R}$ — поле действительных чисел;

$\mathbb{C}$ — поле комплексных чисел;

$\mathbb{F}^{k\times n}$ — множество всех матриц размеров $k \times n$ с элементами из поля $\mathbb{F}$;

$\mathbb{F}_m$ — множество всех столбцов с m компонентами над полем $\mathbb{F}$;

$\mathbb{F}^k$ — множество всех строк с k компонентами над полем $\mathbb{F}$;

$\boldsymbol{E}_n$ — единичная матрица порядка n;

$\mathcal{E}$ — единичный оператор;

$\mathcal{O}$ — нулевой оператор.

Пусть A и B — множества.

$A \subset B$ (или $B \supset A$) означает, что A строго включается B;

$A \subseteq B$ (или $B \supseteq A$) означает, что $A \subset B$ или $A = B$;

$A \cup B$ — объединение A и B;

$A \cap B$ — пересечение A и B;

$A \backslash B$ — разность A и B;

$|A|$ — мощность A;

$\{x \in A \mid P(x)\}$ — множество всех элементов множества A, удовлетворяющих условию $P(x)$;

$\mathcal{F} : A \longrightarrow B$ означает, что $\mathcal{F}$ является отображением множества A в множество B;

$\mathcal{F}|_C$ — ограничение $\mathcal{F}$ на подмножество C множества A;

$\mathcal{F}(C)$ обозначает множество $\{\mathcal{F}(x) \mid x \in C\}$ для $C \subseteq A$.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — произвольная матрица.

$\boldsymbol{A}^+$ — псевдообратная к $\boldsymbol{A}$ матрица;

$\boldsymbol{A}^*$ — сопряженная к $\boldsymbol{A}$ матрица;

$\boldsymbol{A}^\top$ — транспонированная к $\boldsymbol{A}$ матрица;

$\overline{\boldsymbol{A}}$ — матрица, составленная из комплексно сопряженных чисел для элементов матрицы $\boldsymbol{A}$;

$\mathsf{r}(\boldsymbol{A})$ — ранг матрицы $\boldsymbol{A}$.

Пусть $\boldsymbol{A}$ — квадратная матрица.

$\mathsf{det}(\boldsymbol{A})$ — определитель матрицы $\boldsymbol{A}$;

$\tilde{\boldsymbol{A}}$ — присоединенная матрица для матрицы $\boldsymbol{A}$;

$\boldsymbol{A}^{-1}$ — обратная матрица для обратимой матрицы $\boldsymbol{A}$;

A_{ij} — алгебраическое дополнение к элементу a_{ij} в матрице $\boldsymbol{A}$;

$f_A(x)$ — характеристический многочлен матрицы $\boldsymbol{A}$;

$\mathscr{S}(\boldsymbol{A})$ — спектр матрицы $\boldsymbol{A}$;

$\mathsf{tr}(\boldsymbol{A})$ — след матрицы $\boldsymbol{A}$;

$\|\boldsymbol{A}\|$ — норма матрицы $\boldsymbol{A}$;

$\|\boldsymbol{A}\|_s$ — спектральная норма матрицы $\boldsymbol{A}$;

$\kappa(\boldsymbol{A})$ — число обусловленности матрицы $\boldsymbol{A}$.

Пусть $\boldsymbol{V}$ — линейное пространство.

$\boldsymbol{o}_V$ — нулевой вектор пространства $\boldsymbol{V}$;

$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})_V$ — скалярное произведение векторов $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ еклидова или унитарного пространства $\boldsymbol{V}$;

$\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V})$ — множество всех линейных операторов на $\boldsymbol{V}$;

$\mathsf{Hom}(\boldsymbol{V}, \boldsymbol{W})$ — множество всех линейных отображений пространства $\boldsymbol{V}$ в пространство $\boldsymbol{W}$ над тем же полем.

Пусть $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ — векторы евклидова или унитарного пространства $\boldsymbol{V}$.

$|\boldsymbol{x}|$ — длина вектора $\boldsymbol{x}$;

$\|\boldsymbol{x}\|$ — норма вектора $\boldsymbol{x}$;

$\boldsymbol{x} \perp \boldsymbol{y}$ означает, что векторы $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ ортогональны;

$(\widehat{\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}})$ — угол между векторами $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}$ (только в евклидовом пространстве $\boldsymbol{V}$).

Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ — векторы обычного трехмерного пространства.

$\vec{a}\vec{b}$ — скалярное произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$;

$\vec{\mathsf{ком}}_b\vec{a}$ — ортогональная компонента вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$;

$\mathsf{пр}_{\vec{b}}\vec{a}$ — проекция вектора $\vec{a}$ на $\vec{b}$;

$\textsf{ком}_{a||b}\vec{c}$ — компонента вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{a}$ параллельно вектору $\vec{b}$;

$\textsf{пр}_{a||b}\vec{c}$ — проекция вектора $\vec{c}$ на вектор $\vec{a}$ параллельно вектору $\vec{b}$;

$\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$ означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены;

$\vec{a} \uparrow\downarrow \vec{b}$ означает, что векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ антинаправлены;

$|\vec{a}|$ — длина вектора $\vec{a}$;

$\vec{e}_{\vec{a}}$ — орт вектора $\vec{a}$.

Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — системы векторов линейного пространства $\boldsymbol{V}$.

$\mathbf{A} \sim \mathbf{B}$ означает, что $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ эквивалентны;

$\mathbf{A} \vdash \mathbf{B}$ означает, что система $\mathbf{B}$ линейно выражается через $\mathbf{A}$;

$\langle \mathbf{A} \rangle$ — линейная оболочка системы $\mathbf{A}$;

$\mathbf{A}^{\perp}$ — ортогональное дополнение системы $\mathbf{A}$ в евклидовом или унитарном пространстве.

Пусть $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ — базисы линейного пространства $\boldsymbol{V}$.

$\boldsymbol{T}_{\mathbf{A},\mathbf{B}}$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{A}$ к базису $\mathbf{B}$;

$[\boldsymbol{x}]_{\mathbf{A}}$ — столбец координат вектора $\boldsymbol{x}$ в базисе $\mathbf{A}$;

$\boldsymbol{G}_{\mathbf{A}}$ — матрица Грама базиса $\mathbf{A}$ в евклидовом или унитарном пространстве $\mathbf{V}$.

Пусть $\mathcal{A}$ — линейное отображение линейного пространства $\boldsymbol{V}$ в линейное пространство $\boldsymbol{W}$.

$\boldsymbol{V}_{\mathcal{A}}$ — ядро отображения $\mathcal{A}$;

$\mathcal{A}(\boldsymbol{V})$ — образ отображения $\mathcal{A}$;

$\mathsf{r}(\mathcal{A})$ — ранг $\mathcal{A}$;

$\mathsf{d}(\mathcal{A})$ — дефект $\mathcal{A}$;

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{N},\mathbf{M}}$ — матрица отображения $\mathcal{A}$ в базисах $\mathbf{N}$ пространства $\boldsymbol{V}$ и $\mathbf{M}$ пространства $\boldsymbol{W}$;

$\mathcal{A}^{*}$ — сопряженное отображение к $\mathcal{A}$ (в случае, когда $\boldsymbol{V}$ и $\boldsymbol{W}$ — евклидовы или унитарные пространства).

Пусть $\mathcal{A}$ — линейный оператор линейного пространства $\boldsymbol{V}$.

$\boldsymbol{A}_{\mathbf{N}}$ — матрица $\mathcal{A}$ в базисе $\mathbf{N}$ пространства $\boldsymbol{V}$;

$f_{\mathcal{A}}(x)$ — характеристический многочлен оператора $\mathcal{A}$;

$\mathscr{S}(\mathcal{A})$ — спектр оператора $\mathcal{A}$;

$\boldsymbol{V}(\mathcal{A}, \lambda_i)$ — корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ_i оператора $\mathcal{A}$;

$\|\mathcal{A}\|$ — норма оператора $\mathcal{A}$;

$\|\mathcal{A}\|_s$ — спектральная норма оператора $\mathcal{A}$.

Пусть z — комплексное число.

$\overline{z}$ — сопряженное с z комплексное число;

$|z|$ — модуль комплексного числа z.

Греческий алфавит

$A\ \alpha$	— альфа	$N\ \nu$	— ню
$B\ \beta$	— бэта	$\Xi\ \xi$	— кси
$\Gamma\ \gamma$	— гамма	$O\ o$	— омикрон
$\Delta\ \delta$	— дельта	$\Pi\ \pi$	— пи
$E\ \varepsilon$	— эпсилон	$P\ \rho$	— ро
$Z\ \zeta$	— дзета	$\Sigma\ \sigma$	— сигма
$H\ \eta$	— эта	$T\ \tau$	— тау
$\Theta\ \theta$	— тэта	$\Phi\ \varphi$	— фи
$I\ \iota$	— иота	$X\ \chi$	— хи
$K\ \kappa$	— каппа	$\Upsilon\ \upsilon$	— ипсилон
$\Lambda\ \lambda$	— ламбда	$\Psi\ \psi$	— пси
$M\ \mu$	— мю	$\Omega\ \omega$	— омега