Тема III. Линейные операторы

§ 8. Жорданова теория

М.В.Волков

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
кафедра алгебры и фундаментальной информатики

2020/2021 учебный год

Сведение к нильпотентным операторам

На прошлой лекции мы зафиксировали следствие корневого разложения:

Следствие (Камилл Жордан, 1870)

Если $\mathcal{A}\colon V \to V$ – такой линейный оператор, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ содержится в поле скаляров, то в V можно выбрать базис из его корневых векторов. В этом базисе матрица оператора $\mathcal{A}$ блочно-диагональна.
Число диагональных блоков равно $|\operatorname{Spec}\mathcal{A}|$, размер блока, отвечающего $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$, равен кратности k корня α в характеристическом многочлене оператора $\mathcal{A}$, а блок равен $\alpha E_k + A_\alpha$, где A_α есть матрица ограничения оператора $\mathcal{A}_\alpha = \mathcal{A} - \alpha\mathcal{E}$ на его 0-компоненту V_α.

Если $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_t\}$ и $f_{\mathcal{A}}(\lambda) = \pm(\lambda - \alpha_1)^{k_1} \cdots (\lambda - \alpha_t)^{k_t}$, то

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_1 E_{k_1} + A_{\alpha_1} & O & \dots & O \\ O & \alpha_2 E_{k_2} + A_{\alpha_2} & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & \alpha_t E_{k_t} + A_{\alpha_t} \end{pmatrix}.$$

Остается понять, как выбрать такой базис корневого подпространства V_α, чтобы матрица нильпотентного оператора $\mathcal{A}_\alpha$ была устроена проще всего.

Предложение 1

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ – нильпотентный линейный оператор. Тогда

1. *для любого ненулевого $\mathcal{A}$-инвариантного подпространства $U \subseteq V$ имеет место строгое включение $\mathcal{A}U \subset U$;*
2. *если вектор $\mathbf{v} \in V$ и число s таковы, что $\mathcal{A}^s\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, а $\mathcal{A}^{s+1}\mathbf{v} = \mathbf{0}$, то система $\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v}, \ldots, \mathcal{A}^s\mathbf{v}$ линейно независима и ее линейная оболочка W есть наименьшее $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство, содержащее $\mathbf{v}$.*

Доказательство. 1. Если $\mathcal{A}U = U$ для некоторого подпространства U, то $U = \mathcal{A}U = \mathcal{A}(\mathcal{A}U) = \mathcal{A}^2U = \cdots = \mathcal{A}^sU$ для любого натурального s. Поскольку некоторая степень $\mathcal{A}$ – нулевой оператор, имеем $U = \{\mathbf{0}\}$, что вступает в противоречие с тем, что U – ненулевое подпространство.

2. Предположим, что $\lambda_0\mathbf{v} + \lambda_1\mathcal{A}\mathbf{v} + \cdots + \lambda_s\mathcal{A}^s\mathbf{v} = \mathbf{0}$, причем не все скаляры λ_i равны нулю. Выберем наименьшее j со свойством $\lambda_j \neq 0$ и применим к этому равенству оператор $\mathcal{A}^{s-j}$. Получим $\lambda_j\mathcal{A}^s\mathbf{v} = \mathbf{0}$, что противоречит условиям $\lambda_j \neq 0$ и $\mathcal{A}^s\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Поэтому система $\mathbf{v}, \mathcal{A}\mathbf{v}, \ldots, \mathcal{A}^s\mathbf{v}$ линейно независима. Ясно, что ее линейная оболочка W инвариантна относительно оператора $\mathcal{A}$ и если какое-то $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство содержит $\mathbf{v}$, то оно содержит и вектора $\mathcal{A}\mathbf{v}, \ldots, \mathcal{A}^s\mathbf{v}$. $\square$

Определение

Система ненулевых векторов $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_s$ называется *нильслоем* относительно нильпотентного линейного оператора $\mathcal{A}$, если $\mathbf{v}_{j+1} = \mathcal{A}\mathbf{v}_j$ при каждом $j = 0, 1, \dots, s-1$ и $\mathcal{A}\mathbf{v}_s = \mathbf{0}$.
Длиной нильслоя назовем количество векторов в нем, т.е. число $s+1$.

В силу предложения 1 любой нильслой – линейно независимая система.

Из любого ненулевого вектора $\mathbf{v} \in V$ можно "вытянуть" нильслой, полагая $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_{j+1} = \mathcal{A}\mathbf{v}_j$ для $j = 0, 1, \dots$ до появления нулевого вектора.

Длина любого нильслоя не превосходит *ступени нильпотентности* оператора $\mathcal{A}$, т.е. наименьшего числа m такого, что $\mathcal{A}^m = \mathcal{O}$.
Ступень нильпотентности, в свою очередь, не превосходит размерности пространства V, так как последовательность подпространств

$$V \supset \mathcal{A}V \supset \mathcal{A}^2V \supset \cdots \supset \mathcal{A}^{m-1}V \supset \mathcal{A}^mV = \{\mathbf{0}\}$$

в силу предложения 1 строго убывающая.

Определение

Система векторов называется *жордановой* относительно линейного оператора $\mathcal{A}$, если она состоит из нильслоев, следующих друг за другом. *Жорданова таблица* – это запись жордановой системы, в которой нильслои записаны друг под другом и выровнены по правому краю.

Жорданова таблица имеет вид (вектора в нильслоях пронумерованы справа налево):

$$\begin{array}{cccccc} & \mathbf{v}_{1s_1} & \mathbf{v}_{1\,s_1-1} & \dots & \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{11} \\ & & \mathbf{v}_{2\,s_2} & \dots & \mathbf{v}_{22} & \mathbf{v}_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{v}_{\ell\,s_\ell} & \mathbf{v}_{\ell\,s_\ell-1} & \mathbf{v}_{\ell\,s_\ell-2} & \dots & \mathbf{v}_{\ell 2} & \mathbf{v}_{\ell 1} \end{array} \qquad (*)$$

Предложение 2

Жорданова система линейно независима тогда и только тогда, когда линейно независимы вектора последнего столбца соответствующей жордановой таблицы.

Доказательство. Необходимость. Подсистема линейно независимой системы сама линейно независима, поэтому если жорданова система линейно независима, то и вектора последнего столбца ее жордановой таблицы линейно независимы.

Достаточность. Предположим, что вектора жордановой таблицы $(*)$ линейно зависимы. Рассмотрим нулевую линейную комбинацию

$$\sum_{k=1}^{\ell}\sum_{j=1}^{s_k}\lambda_{kj}\mathbf{v}_{kj}=\mathbf{0},$$

в которой не все скаляры равны 0. Выберем наибольшее значение j такое, что $\lambda_{kj}\neq 0$ при некотором $1\leq k\leq \ell$ и зафиксируем соответствующее значение k. Применим оператор $\mathcal{A}^{j-1}$. Все слои с длиной меньше s_k обнулятся, а из r-го слоя с длиной не меньше s_k в получившуюся комбинацию войдет только вектор $\mathcal{A}^{j-1}\mathbf{v}_{rj}=\mathbf{v}_{r1}$. Следовательно, получим нулевую комбинацию векторов последнего столбца

$$\sum_{1\leq r\leq \ell,\, s_r\geq s_k}\lambda_{rj}\mathbf{v}_{r1}=\mathbf{0},$$

в которой участвует коэффициент $\lambda_{kj}\neq 0$. □

Элементарные преобразования жордановой таблицы

Определение (элементарные преобразования жордановой таблицы)

1. Прибавление к строке конечного фрагмента такой же длины другой, не менее длинной строки, умноженного на скаляр, с выравниванием по правому краю при необходимости.
2. Умножение всех векторов одной строки на ненулевой скаляр.
3. Перестановка строк.

Так, в таблице $(*)$ $s_1 \geq s_2$. Можно взять скаляр γ и заменить строку $\mathbf{v}_{2\,s_2}, \ldots, \mathbf{v}_{22}, \mathbf{v}_{21}$ на строку $\mathbf{v}_{2\,s_2} + \gamma\mathbf{v}_{1s_2}, \ldots, \mathbf{v}_{22} + \gamma\mathbf{v}_{12}, \mathbf{v}_{21} + \gamma\mathbf{v}_{11}$.

$$
\begin{array}{cccccc}
\mathbf{v}_{1s_1} & \ldots & \mathbf{v}_{1s_2} & \ldots & \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{11} \\
 & & \mathbf{v}_{2\,s_2} & \ldots & \mathbf{v}_{22} & \mathbf{v}_{21} \\
 & & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots
\end{array}
\Longrightarrow
\begin{array}{cccccc}
\mathbf{v}_{1s_1} & \ldots & \mathbf{v}_{1s_2} & \ldots & \mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{11} \\
 & & \mathbf{v}_{2\,s_2}+\gamma\mathbf{v}_{1s_2} & \ldots & \mathbf{v}_{22}+\gamma\mathbf{v}_{12} & \mathbf{v}_{21}+\gamma\mathbf{v}_{11} \\
 & & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots
\end{array}
$$

Если один или несколько последних векторов окажутся нулевыми, сдвинем ненулевые вектора вправо, чтобы выровнять таблицу по правому краю.

Предложение 3

Элементарные преобразования сохраняют свойство таблицы быть жордановой и ее линейную оболочку.

Жорданов базис

Жордановым базисом относительно нильпотентного линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$ называется базис пространства V, являющийся жордановой системой относительно оператора $\mathcal{A}$.

Теорема (жорданов базис нильпотентного оператора)

Пусть V – ненулевое конечномерное пространство, $\mathcal{A}\colon V \to V$ – нильпотентный линейный оператор. Тогда V имеет жорданов базис относительно $\mathcal{A}$.

Доказательство. Выберем в пространстве V некоторый базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ и “вытянем” из каждого базисного вектора $\mathbf{e}_j$ нильслой $\mathbf{e}_{j1} = \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_{j2} = \mathcal{A}\mathbf{e}_{j1}, \dots, \mathbf{e}_{js_j} = \mathcal{A}\mathbf{e}_{js_j-1}$ так, что $\mathbf{e}_{js_j} \neq \mathbf{0}$, $\mathcal{A}\mathbf{e}_{js_j} = \mathbf{0}$. Система из полученных нильслоев порождает V, так как включает базис $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$. Если она линейно независима, то является жордановым базисом. Если она линейно зависима, запишем ее как жорданову таблицу. По предложению 2 вектора последнего столбца таблицы линейно зависимы. Пусть $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{e}_{js_j} = \mathbf{0}$ – нетривиальная нулевая комбинация этих векторов. Выберем индекс k так, чтобы длина s_k слоя с номером k была наименьшей среди всех чисел s_ℓ таких, что $\lambda_\ell \neq 0$.

Жорданов базис (2)

Используя равенство $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j \mathbf{e}_{js_j} = \mathbf{0}$, выразим вектор $\mathbf{e}_{ks_k}$ через остальные векторы последнего столбца: $\mathbf{e}_{ks_k} = \sum_{\ell \neq k} \mu_\ell \mathbf{e}_{\ell s_\ell}$. В силу выбора k для всех слагаемых $\mu_\ell \mathbf{e}_{\ell s_\ell}$ в правой части этого равенства, для которых $\mu_\ell \neq 0$, длина ℓ-й строки жордановой таблицы не меньше длины k-й строки. Поэтому для каждой такой строки можно прибавить ее конечный фрагмент длины s_k, умноженный на $-\mu_\ell$, к k-й строке. После этих преобразований в k-й строке последний вектор станет равным $\mathbf{0}$. Сдвинув эту строку вправо для исключения нулевых векторов, получим жорданову систему, содержащую по крайней мере на один вектор меньше, чем предыдущая. В силу предложения 3 линейная оболочка полученной жордановой таблицы совпадает с V. Если полученная жорданова система линейно независима, то она и будет жордановым базисом. В случае линейной зависимости применяем к ней то же самое рассуждение.

На каждом шаге описанного процесса получается жорданова система с меньшим, чем предыдущая, числом векторов, порождающая V. Поскольку исходная система содержит конечное число $(\leq n^2)$ векторов, процесс завершится на некоторой линейно независимой жордановой системе, порождающей пространство V, т.е. на жордановом базисе. $\square$

Вид матрицы нильпотентного оператора в жордановом базисе

Пусть $\mathbf{e}_{11},\dots,\mathbf{e}_{1s_1};\mathbf{e}_{21},\dots,\mathbf{e}_{2s_2};\dots;\mathbf{e}_{k1},\dots,\mathbf{e}_{ks_k}$ – жорданов базис пространства V относительно нильпотентного оператора $\mathcal{A}$ с выделенными нильслоями. Тогда

$$V=\langle\mathbf{e}_{11},\dots,\mathbf{e}_{1s_1}\rangle\oplus\langle\mathbf{e}_{21},\dots,\mathbf{e}_{2s_2}\rangle\oplus\dots\oplus\langle\mathbf{e}_{k1},\dots,\mathbf{e}_{ks_k}\rangle.$$

Согласно предложению 1 каждый нильслой порождает $\mathcal{A}$-инвариантное подпространство, откуда матрица $\mathcal{A}$ имеет блочно-диагональный вид

$$\begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O\\ O & A_2 & \dots & O\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ O & O & \dots & A_k \end{pmatrix},$$

где A_j – матрица ограничения оператора $\mathcal{A}$ на $\langle\mathbf{e}_{j1},\dots,\mathbf{e}_{js_j}\rangle$.
Так как $\mathcal{A}\mathbf{e}_{j\ell}=\mathbf{e}_{j\,\ell+1}$ при $\ell=1,\dots,s_j-1$ и $\mathcal{A}\mathbf{e}_{js_j}=\mathbf{0}$, имеем

$$A_j=\begin{pmatrix} 0&0&0&\dots&0&0\\ 1&0&0&\dots&0&0\\ 0&1&0&\dots&0&0\\ \vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\ 0&0&0&\dots&1&0 \end{pmatrix}_{s_j\times s_j}.$$

Матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}_{s_j \times s_j}$$

называется *жордановой клеткой порядка* s_j с собственным значением 0.

Итак, матрица нильпотентного оператора в жордановом базисе блочно-диагональна, а диагональные блоки являются жордановыми клетками с собственным значением 0, причем число клеток равно числу нильслоев базиса, а размеры клеток равны длинам нильслоев.

Докажем, что такая матрица определена однозначно с точностью до перестановки жордановых клеток на главной диагонали, т.е. не зависит от выбора жорданова базиса.
Для этого покажем, что для фиксированного нильпотентного оператора число нильслоев и их длины одни и те же во всех жордановых базисах.

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ – нильпотентный линейный оператор на пространстве размерности $n > 0$. Возьмем жорданов базис B в V относительно $\mathcal{A}$ и обозначим через q_j число его нильслоев длины j, $j = 1, 2, \dots, n$. Тогда

$$n = q_1 + 2q_2 + 3q_3 + \cdots + nq_n.$$

Подпространство $\operatorname{Im}\mathcal{A}$ порождается образом B. Под действием $\mathcal{A}$ каждый нильслой $\mathbf{e}_{i\,s_i}, \dots, \mathbf{e}_{i1}$ из B переходит в нильслой $\mathbf{e}_{i\,s_i-1}, \dots, \mathbf{e}_{i1}$:

$$\begin{matrix} \mathbf{e}_{1s_1} & \mathbf{e}_{1s_1-1} & \mathbf{e}_{1s_1-1} \dots \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_{11} \\ & \mathbf{e}_{2\,s_2} & \mathbf{e}_{2\,s_2-1} \dots \mathbf{e}_{22} & \mathbf{e}_{21} \\ & \vdots & \vdots \quad \dots \quad \vdots & \vdots \end{matrix} \quad \xrightarrow{\mathcal{A}} \quad \begin{matrix} \mathbf{e}_{1s_1-1} & \mathbf{e}_{1s_1-1} \dots \mathbf{e}_{12} & \mathbf{e}_{11} \\ & \mathbf{e}_{2\,s_2-1} \dots \mathbf{e}_{22} & \mathbf{e}_{21} \\ & \vdots \quad \dots \quad \vdots & \vdots \end{matrix}.$$

Видим, что правый столбец жордановой таблицы для $\mathcal{A}B$ есть подсистема правого столбца жордановой таблицы для B. Из предложения 2 вытекает, что $\mathcal{A}B$ – линейно независимая система и, следовательно, базис для $\operatorname{Im}\mathcal{A}$. Обозначая $\dim\operatorname{Im}\mathcal{A}$, т.е. ранг $\mathcal{A}$, через r_1, имеем

$$r_1 = q_2 + 2q_3 + \cdots + (n-1)q_n.$$

Формула для числа нильслоев данной длины (2)

Применяя тот же аргумент, получаем, что $\mathcal{A}^2 B$ – базис для $\operatorname{Im}\mathcal{A}^2$, откуда

$$r_2 = q_3 + 2q_4 + \cdots + (n-2)q_n,$$

где r_2 – ранг $\mathcal{A}^2$. В общем случае, обозначая ранг $\mathcal{A}^j$ через r_j и (для единообразия) n через r_0, получаем для каждого j равенство

$$r_j = q_{j+1} + 2q_{j+2} + \cdots + (n-j)q_n.$$

Вычитая из него $(j+1)$-е равенство из той же серии

$$r_{j+1} = q_{j+2} + 2q_{j+3} + \cdots + (n-j-1)q_n,$$

получаем $r_j - r_{j+1} = q_{j+1} + q_{j+2} + \cdots + q_n$. Отсюда

$$q_j = (r_{j-1} - r_j) - (r_j - r_{j+1}) = r_{j-1} - 2r_j + r_{j+1}.$$

Итак, *число нильслоев длины j в любом жордановом базисе пространства V относительно оператора $\mathcal{A}$ равно $r_{j-1} - 2r_j + r_{j+1}$, где r_j – ранг $\mathcal{A}^j$ при $j > 0$ и $r_0 = \dim V$.* Поэтому длины нильслоев (а значит, и их число) однозначно определяются оператором и не зависят от выбора базиса.

Теорема Жордана

Вернемся к рассмотрению произвольных линейных операторов $\mathcal{A}\colon V \to V$, для которых $\operatorname{Spec}\mathcal{A} = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_t\}$ содержится в поле скаляров.

Определение

Жорданов базис пространства V относительно линейного оператора $\mathcal{A}$ – это объединение жордановых базисов корневых подпространств V_{α_j} относительно ограничений операторов $\mathcal{A} - \alpha_j\mathcal{E}$ для всех $j = 1, \dots, t$.

Из теоремы о корневом разложении и теоремы о жордановом базисе нильпотентного оператора вытекает основной результат:

Теорема Жордана, 1870

Для любого линейного оператора $\mathcal{A}\colon V \to V$, такого, что $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ содержится в поле скаляров, в пространстве V существует жорданов базис.

Следствие (матричная форма теоремы Жордана)

Пусть $\mathcal{A}\colon V \to V$ *– линейный оператор и* $\operatorname{Spec}\mathcal{A}$ *содержится в поле скаляров. В жордановом базисе пространства* V *матрица оператора* $\mathcal{A}$ *блочно-диагональна, а диагональные блоки имеют вид*

$$J(\alpha) := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

где $\alpha \in \operatorname{Spec}\mathcal{A}$*. Число таких блоков и их размеры однозначно определяются оператором и не зависят от выбора базиса.*

Матрица вида $J(\alpha)$ называется *жордановой клеткой с собственным значением* α, а блочно-диагональная матрица, диагональные блоки которой – жордановы клетки, называется *нормальной жордановой формой*.

Критерий подобия матриц

Итак, матрицу любого линейного оператора, спектр которого содержится в поле скаляров, можно привести к нормальной жордановой форме. Вспоминая, как связаны между собой матрицы одного и того же оператора в разных базисах, получаем, что любая квадратная матрица подобна нормальной жордановой форме, единственной с точностью до порядка клеток.

Критерий подобия матриц

Две квадратных матрицы подобны тогда и только тогда, когда их нормальные жордановы формы совпадают с точностью до порядка клеток.

Пусть A – матрица нильпотентного оператора. Как найти жорданов базис?

Приводим матрицу $(E|A^T)$ с помощью элементарных преобразований (длинных) строк к виду $(E'|A')$, где A' – ступенчатая по строкам матрица. Аналогичным образом приводим матрицу $(E'|A'|A'\cdot A^T)$ к виду $(E''|A''|A''')$, где A''' – ступенчатая по строкам матрица. Продолжаем этот процесс, пока при домножении на A^T не получится нулевая матрица. Полученные строки выравниваем по правому краю. Получилась жорданова таблица. Выражаем последний вектор самой короткой строки через остальные и обнуляем его, прибавляя к этой строке фрагменты более длинных строк, умноженные на подходящие скаляры. Сдвигаем строку вправо, чтобы отбросить нулевые вектора. Повторяем до тех пор, пока число векторов в жордановой системе не станет равным размеру матрицы A. Полученная система и будет жордановым базисом относительно данного нильпотентного оператора.

Обоснование: строки матрицы E'' образуют базис, строки A'' – образы векторов этого базиса при действии $\mathcal{A}$, строки A''' – образы образов, т.е. образы при действии $\mathcal{A}^2$, и т.д. Итак, из базисных векторов вытягиваются нильслои и полученная жорданова таблица перестраивается в линейно независимую жорданову таблицу.

Пример

Найти жорданов базис относительно нильпотентного оператора $\mathcal{A}$, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & -4 & -3 \\ 0 & -1 & -3 & 1 & 2 \\ 4 & 0 & 8 & -8 & -6 \end{pmatrix}$.

Составляем матрицу $(E|A^T)$ и приводим ее с помощью элементарных преобразований строк к нужному виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & 4 & -3 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -2 & -4 & 1 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & -3 & 2 & -6 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 4 & -1 & 8 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & -3 & 1 & -6 \end{array}\right) \to$$

Пример (2)

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ -1 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|ccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Видим, что вектора $\mathbf{a}_1 = (2, 1, 0, 1, 0)$ и $\mathbf{a}_2 = (1, 1, 1, 0, 2)$ образуют базис $\operatorname{Ker} \mathcal{A}$. Вычисляем

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & -3 & 8 \\ -1 & -2 & -4 & 1 & -8 \\ 1 & -1 & -3 & 2 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Замечаем, что $(0, 1, 2, -1, 4) = 2\mathbf{a}_2 - \mathbf{a}_1 \in \operatorname{Ker} \mathcal{A}$.

Пример (3)

Запишем

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 0&1&0&0&0&-1&0&0&-1&0&0&1&2&-1&4\\ 1&1&0&0&0&0&1&2&-1&4&0&0&0&0&0\\ 1&2&0&0&1&0&0&-1&0&-2&0&1&2&-1&4 \end{array}\right)\to$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 0&1&0&0&0&-1&0&0&-1&0&0&1&2&-1&4\\ 1&1&0&0&0&0&1&2&-1&4&0&0&0&0&0\\ 1&1&0&0&1&1&0&-1&1&-2&0&0&0&0&0 \end{array}\right).$$

Так как $(0,1,2,-1,4)\in\operatorname{Ker}\mathcal{A}$, заключаем что $\mathcal{A}^3=\mathcal{O}$. Составляем жорданову таблицу, выравнивая по правому краю строки последней матрицы с отброшенными нулевыми векторами и добавляя базис $\operatorname{Ker}\mathcal{A}$. Затем выполняем элементарные преобразования жордановой таблицы.

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 0&1&0&0&0&-1&0&0&-1&0&0&1&2&-1&4\\ &&&&&1&1&0&0&0&0&1&2&-1&4\\ &&&&&1&1&0&0&1&1&0&-1&1&-2\ \to\\ &&&&&&&&&&2&1&0&1&0\\ &&&&&&&&&&1&1&1&0&2 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc} 0&1&0&0&0&-1&0&0&-1&0&0&1&2&-1&4\\ &&&&&2&1&0&1&0&0&0&0&0&0\\ &&&&&1&1&0&0&1&1&0&-1&1&-2\ \to\\ &&&&&&&&&&0&1&2&-1&4\\ &&&&&&&&&&0&1&2&-1&4 \end{array}$$

Окончание примера

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
 & & & & & & & & & & 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array} \to$$

$$\begin{array}{ccccc|ccccc|ccccc}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\
 & & & & & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & -2
\end{array}.$$

Таким образом, получаем жорданов базис из двух нильслоев $\mathbf{e}_{11} = (0, 1, 0, 0, 0)$, $\mathbf{e}_{12} = (-1, 0, 0, -1, 0)$, $\mathbf{e}_{13} = (0, 1, 2, -1, 4)$, $\mathbf{e}_{21} = (1, 1, 0, 0, 1)$, $\mathbf{e}_{22} = (1, 0, -1, 1, -2)$.

В этом базисе исходный оператор $\mathcal{A}$ имеет матрицу $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

составленную из двух жордановых клеток: $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.