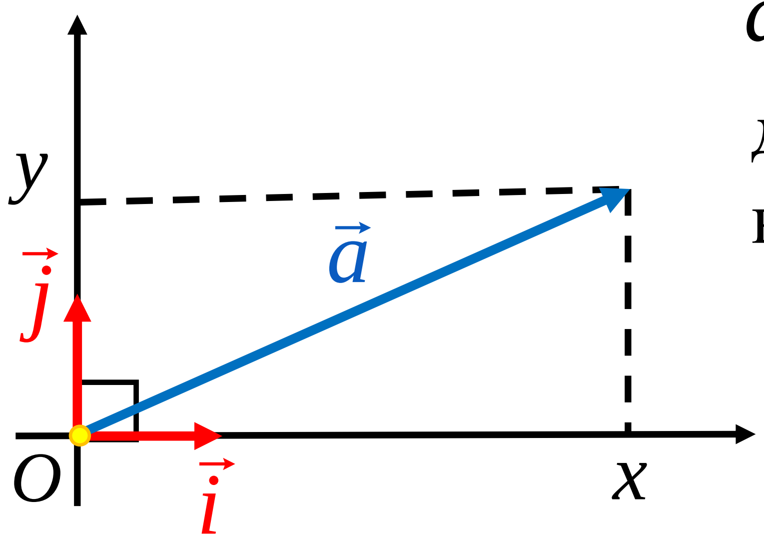
Ортонормированный базис

Опр. Ортонормированным базисом (ОНБ) на плоскости называется упорядоченная пара векторов $(\vec{i}, \vec{j})$, ортогональных и имеющих единичную длину.

Опр. Координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j})$ называются декартовыми (прямоугольными) координатами на плоскости.



$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} = (x, y) -$$

декартовы координаты вектора $\vec{a}$ на плоскости.

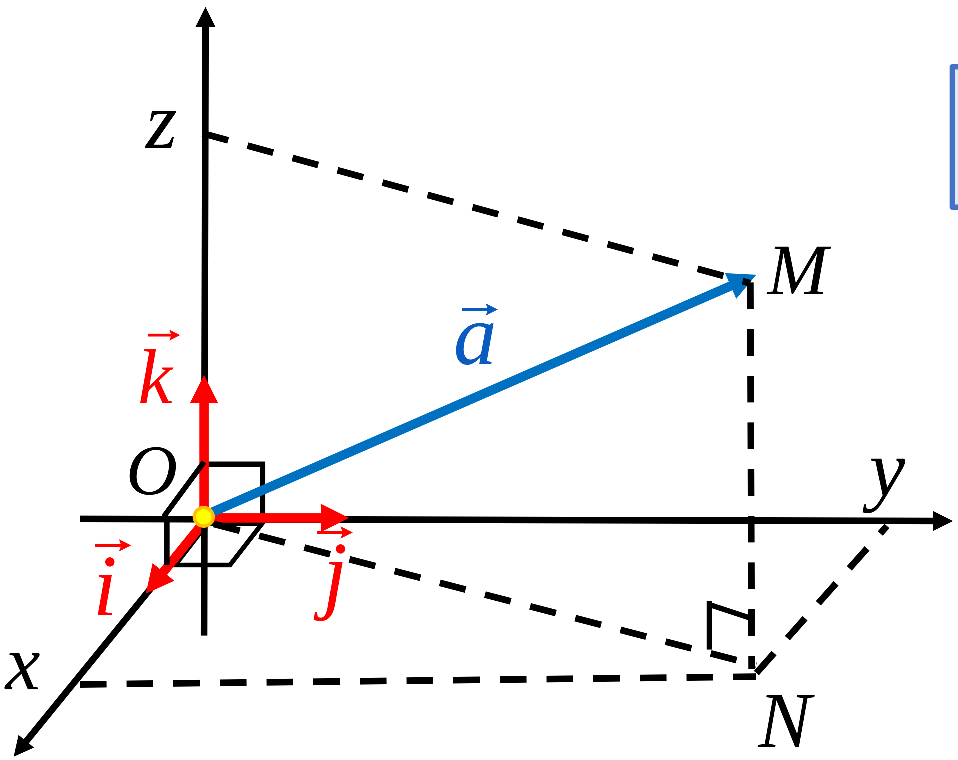
$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}}$$

Ортонормированный базис

<u>Опр</u>. Ортонормированным базисом (ОНБ) в пространстве называется упорядоченная **правая** тройка векторов $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, попарно ортогональных друг другу и имеющих единичную длину.

<u>Опр</u>. Координаты вектора $\vec{a}$ в базисе $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ называются декартовыми (прямоугольными) координатами в пространстве.

Ортонормированный базис

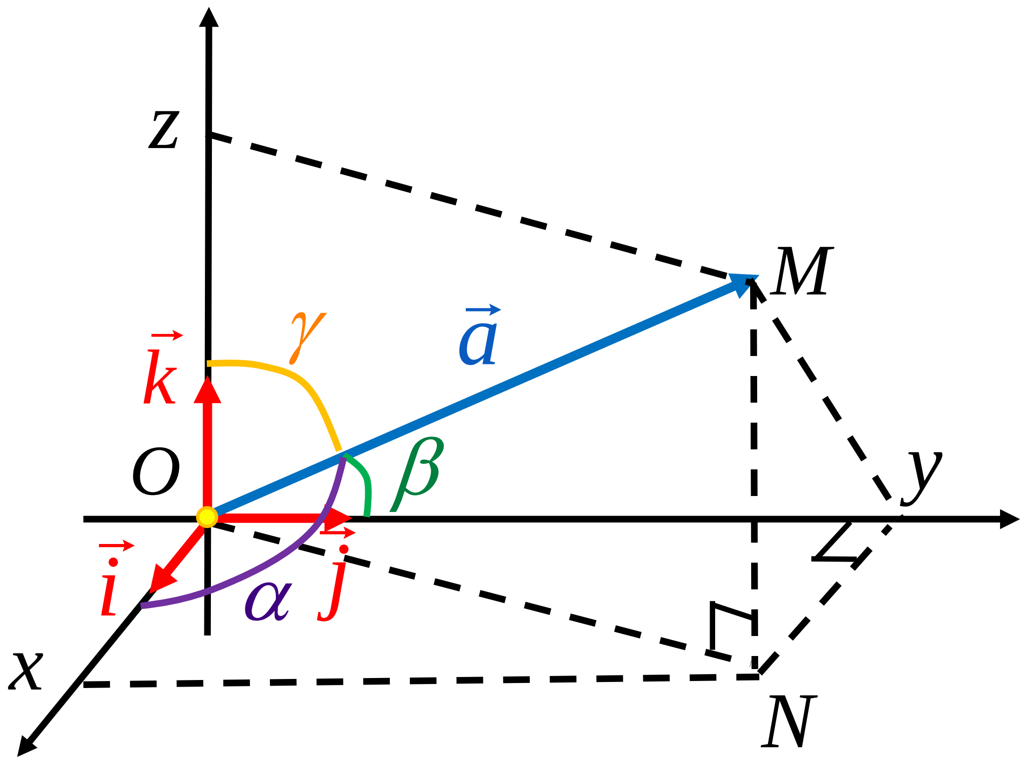


$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (x, y, z) -$$

декартовы координаты вектора $\vec{a}$ в пространстве.

Проекция вектора на ось

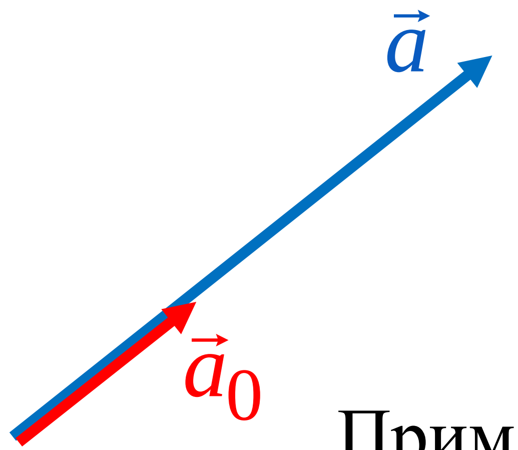


$$\vec{a} = (\text{пр}_{\vec{i}}\vec{a},\ \text{пр}_{\vec{j}}\vec{a},\ \text{пр}_{\vec{k}}\vec{a}) =$$

$$= (|\vec{a}|\cos\alpha\,, |\vec{a}|\cos\beta\,, |\vec{a}|\cos\gamma)$$

Орт вектора. Направляющие косинусы

Опр. Ортом вектора называется вектор единичной длины, сонаправленный с данным вектором.



$\vec{a}_0$ – орт вектора $\vec{a}$

$$\boxed{\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}}$$

Пример. Найти орт вектора $\vec{a} = (1, -2, 1)$.

Решение. $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$

$$\vec{a}_0 = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$$

Орт вектора. Направляющие косинусы

<u>Опр</u>. Пусть $\vec{a}$ – ненулевой вектор и

$(\widehat{\vec{a}\,\vec{i}}) = \alpha, (\widehat{\vec{a}\,\vec{j}}) = \beta, (\widehat{\vec{a}\,\vec{k}}) = \gamma$. Тогда

значения $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ называются **направляющими косинусами** ненулевого вектора $\vec{a}$.

<u>Теорема о «направляющих косинусах».</u>

$$\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.}$$

$$\vec{a} = (|\vec{a}|\cos\alpha, |\vec{a}|\cos\beta, |\vec{a}|\cos\gamma)$$

Орт вектора. Направляющие косинусы

Следствие: 1) $\vec{a} = (|\vec{a}|\cos\alpha, |\vec{a}|\cos\beta, |\vec{a}|\cos\gamma)$;

2) Координаты орта равны направляющим косинусам этого орта.

Орт вектора. Направляющие косинусы

Задача. Вектор $\vec{a}$ длины 2 образует с осью Ox угол 45^0, с осью Oy - угол 60^0, а с осью - Oz тупой угол. Найти декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Решение. $\vec{a} = (|\vec{a}|\cos\alpha, |\vec{a}|\cos\beta, |\vec{a}|\cos\gamma)$

$$\vec{a} = (2\cos\alpha, 2\cos\beta, 2\cos\gamma) = \left(2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}, 2\cdot\frac{1}{2}, 2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$$

$$\alpha = 45^0,\ \beta = 60^0,\ \gamma - ? \Rightarrow$$

$$\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\beta = \frac{1}{2},$$

$$\vec{a} = (|\vec{a}|\cos\alpha, |\vec{a}|\cos\beta, |\vec{a}|\cos\gamma)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{4},\ \cos\gamma = -\frac{1}{2}$$

Орт вектора. Направляющие косинусы

Задача. Вектор $\vec{a}$ длины 2 образует с осью Ox угол 45^0, с осью Oy - угол 60^0, а с осью - Oz тупой угол. Найти декартовы координаты вектора $\vec{a}$.

Решение. $\vec{a} = (|\vec{a}| \cos\alpha, |\vec{a}| \cos\beta, |\vec{a}| \cos\gamma)$

$$\vec{a} = (2\cos\alpha, 2\cos\beta, 2\cos\gamma) = (\sqrt{2}, 1, -1)$$

$\alpha = 45^0,\ \beta = 60^0,\ \gamma - ? \Rightarrow$ $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \cos\beta = \dfrac{1}{2},$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos^2\gamma = \frac{1}{4},\ \cos\gamma = -\frac{1}{2}$$