# Тема : Разложение на неприводимые множители над полями $\mathbb{R}$ и $\mathbb{C}$. Многочлены над кольцом $\mathbb{Z}$

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Практика по основам алгебры для направления
Механика и математическое моделирование
(1 семестр)

12.12.2023

### Задачи в аудитории

5.3.1 а), б), г), 5.3.2 и 5.3.4 а), в), 5.3.3 б), г), 5.3.5 а), в), 5.3.6, доп.задача, 5.4.2 а)

### Рекомендуемое домашнее задание

Решать задачи из своего варианта ДЗ по многочленам и другим темам.

Разложить на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$ следующие многочлены:
а) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6$; в) $x^4 + 4$.

а) Подбираем корни. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$, $f(1) = 0$,

| | 1 | −6 | 11 | −6 |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | −5 | 6 | 0 |

$f(x) = (x-1)(x^2-5x+6) = (x-1)(x-2)(x-3)$.

б) $x^4 + 4 = 0$, $x^4 = -4$, $x_k = \sqrt[4]{4}\left(\cos(\frac{-\pi+2\pi k}{4}) + i\sin(\frac{-\pi+2\pi k}{4})\right)$,
$k = 0, 1, 2, 3$; $x_0 = \sqrt{2}(\cos(-\pi/4) + i\sin(-\pi/4)) = 1 - i$,
$x_1 = \sqrt{2}(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)) = 1 + i$,
$x_2 = \sqrt{2}(\cos(3\pi/4) + i\sin(3\pi/4)) = -1 + i$,
$x_3 = \sqrt{2}(\cos(5\pi/4) + i\sin(5\pi/4)) = -1 - i$,
$x^4+4 = (x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4) = (x-1+i)(x-1-i)(x+1-i)(x+1+i)$.

Разложить на неприводимые множители над полем $\mathbb{C}$ следующие многочлены:
г) $\cos(n \arccos x)$.

$\cos nx$ является многочленом от $\cos x$, поэтому $\cos(n \arccos x)$ является многочленом от $x$.

$z = \cos x + i \sin x$, $z^n = \cos nx + i \sin nx$,

$$z^n = (\cos x + i \sin x)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \cos^{n-k} x (i \sin x)^k = \cos^n x + iC_n^1 \cos^{n-1} x \sin x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x - iC_n^3 \cos^{n-3} x \sin^3 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x + \ldots;$$

$$\cos nx = \cos^n x - C_n^2 \cos^{n-2} x \sin^2 x + C_n^4 \cos^{n-4} x \sin^4 x + \ldots = \sum_{0 \le 2m \le n} (-1)^m C_n^{2m} \cos^{n-2m} x \sin^{2m} x;$$

$$\cos nx = \sum_{0 \le 2m \le n} (-1)^m C_n^{2m} \cos^{n-2m} x (1 - \cos^2 x)^m;$$

$$\cos nx = \left( \sum_{0 \le 2m \le n} C_n^{2m} \right) \cos^n x + \ldots = \frac{1}{2} 2^n \cos^n x + \ldots = 2^{n-1} \cos^n x + \ldots;$$

# Окончание 5.3.1 г)

$\cos(n \arccos x) = 2^{n-1}x^n + \dots$.

Находим корни: $\cos(n \arccos x) = 0$, $n \arccos x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$,

$\arccos x = \dfrac{\pi + 2\pi k}{2n}$; $0 \le \dfrac{\pi + 2\pi k}{2n} \le \pi$, $0 \le 2k+1 \le 2n$, $k = 0, 1, \dots, n-1$;

$\arccos x_k = \dfrac{\pi + 2\pi k}{2n}$, $x_k = \cos \dfrac{\pi + 2\pi k}{2n}$;

$$\cos(n \arccos x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} (x - x_k);$$

$$\cos(n \arccos x) = 2^{n-1} \prod_{k=0}^{n-1} \left( x - \cos \frac{\pi + 2\pi k}{2n} \right).$$

Построить многочлены наименьшей степени над полями $\mathbb{C}$ и $\mathbb{R}$ по указанным ниже корням:
а) корень 1 кратности 2 и корни $2, 3$, $1+i$ кратности 1;
в) корень $i$ кратности 2 и корень $-1-i$ кратности 1.

а) над полем $\mathbb{C}$: $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i) =$
$(x^2-2x+1)(x^2-5x+6)(x-1-i) = (x^4-7x^3+17x^2-17x+6)(x-1-i) =$
$x^5-(8+i)x^4+(27+4i)x^3-(34+17i)x^2+(23+17i)x-(6+6i)$;
над полем $\mathbb{R}$: $f(x) = (x-1)^2(x-2)(x-3)(x-1-i)(x-1+i) =$
$(x^2-2x+1)(x^2-5x+6)(x^2-2x+2) = (x^4-7x^3+17x^2-17x+6)(x^2-2x+2) =$
$x^6-9x^5+33x^4-65x^3+74x^2-46x+12$;
в) над полем $\mathbb{C}$: $f(x) = (x-i)^2(x+1+i) = (x^2-2xi-1)(x+1+i) =$
$x^3+(1-i)x^2+(1-2i)x-(1+i)$;
над полем $\mathbb{R}$:
$f(x) = (x-i)^2(x+i)^2(x+1+i)(x+1-i) = (x^2+1)^2(x^2+2x+2) =$
$(x^4+2x^2+1)(x^2+2x+2) = x^6+2x^5+4x^4+4x^3+5x^2+2x+2.$

Разложить на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$ следующие многочлены:
б) $x^6+27$.

Первый способ: находим (комплексные) корни многочлена $x^6+27$.

$$x^6=-27;\ x_k=\sqrt{3}(\cos(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3})+i\sin(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi k}{3}))\ (k=0,1,2,3,4,5);$$

$$x_0=\sqrt{3}(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},\ x_1=i\sqrt{3},$$

$$x_2=\sqrt{3}(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i)=-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$x_3=\overline{x}_2,\ x_4=\overline{x}_1,\ x_5=\overline{x}_0;$$

$$x^6+27=(x-x_0)(x-x_5)(x-x_1)(x-x_4)(x-x_2)(x-x_3)=$$

$$(x-\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})(x-i\sqrt{3})(x+i\sqrt{3})(x+\frac{3}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2})(x+\frac{3}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2})=$$

$$(x^2-3x+3)(x^2+3)(x^2+3x+3);$$

Второй способ: $x^6+27=((x^2)^3+3^3)=(x^2+3)(x^4-3x^2+9)=$
$(x^2+3)((x^4+6x^2+9)-9x^2)=(x^2+3)(x^2+3-3x)(x^2+3+3x)$.

Разложить на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$ следующие многочлены:
г) $x^{2n} - 2x^n + 2$.

$$x^n = t,\ t^2 - 2t + 2 = 0,\ t_{1,2} = 1 \pm i,\ x^n = 1 + i,\ x^n = \sqrt{2}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}),$$
$$x_k = 2^{\frac{1}{2n}}(\cos(\frac{\frac{\pi}{4} + 2\pi k}{n}) + i\sin\frac{\pi + 8\pi k}{4n})\ (k = 0, 1, \ldots, n-1);$$
$$x^n = 1 - i,\ x_{n+k} = \overline{x}_k\ (k = 0, 1, \ldots, n-1);$$
$$(x - x_k)(x - \overline{x}_k) = x^2 - 2^{1+\frac{1}{2n}} x \cos\frac{\pi + 8\pi k}{4n} + 2^{\frac{1}{n}},$$
$$x^{2n} - 2x^n + 2 = \prod_{k=0}^{n-1}(x - x_k)(x - \overline{x}_k) = \prod_{k=0}^{n-1}(x^2 - 2^{1+\frac{1}{2n}} x \cos\frac{\pi + 8\pi k}{4n} + 2^{\frac{1}{n}}).$$

Найти наибольший общий делитель приведенных ниже пар многочленов:
а) $(x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4)$ и $(x-1)^2(x+2)(x+5)$;
в) $\prod\limits_{k=1}^{4}(x^k-1)$ и $\prod\limits_{k=1}^{4}(x^k+1)$.

а) $((x-1)^3(x+2)^2(x-3)(x-4),(x-1)^2(x+2)(x+5)) = (x-1)^2(x+2)$;

в) $\prod\limits_{k=1}^{4}(x^k-1) = (x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) = (x-1)^2(x+1)(x-1)(x^2+x+1)(x-1)(x+1)(x^2+1) = (x-1)^4(x+1)^2(x^2+x+1)(x^2+1)$;
$\prod\limits_{k=1}^{4}(x^k+1) = (x+1)(x^2+1)(x^3+1)(x^4+1) = (x+1)^2(x^2+1)(x^2-x+1)(x^4+1+2x^2-2x^2) = (x+1)^2(x^2+1)(x^2-x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1)(x^2+\sqrt{2}x+1)$;
$\left(\prod\limits_{k=1}^{4}(x^k+1), \prod\limits_{k=1}^{4}(x^k+1)\right) = (x+1)^2(x^2+1)$.

**Наблюдение**

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ – многочлены из кольца $\mathbb{C}[x]$. Для того, чтобы $f(x)$ делил $g(x)$, необходимо и достаточно, чтобы каждый корень многочлена $f(x)$ кратности $k$ был также корнем $g(x)$ кратности $m \geq k$.

Непосредственно следует из представления $f(x)$ и $g(x)$ в виде произведения неприводимых многочленов над полем $\mathbb{C}$.

Найти наибольший общий делитель приведенных ниже пар многочленов:
г) $x^m - 1$ и $x^n - 1$.

Корни многочлена $x^m - 1$ – все корни степени $m$ из 1, т.е. различные комплексные числа. $x^m - 1 = \prod_{k=0}^{m-1}(x - (\cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m}))$,
$x^n - 1 = \prod_{\ell=0}^{n-1}(x - (\cos\frac{2\pi\ell}{n} + i\sin\frac{2\pi\ell}{n}))$, $(x^m - 1, x^n - 1)$ – произведение всех двучленов $x - x_t$ по всем общим корням $x_t$ многочленов $x^m - 1$ и $x^n - 1$.
Пусть $d = (m, n)$, $m = m_1 d$, $n = n_1 d$ и $(m_1, n_1) = 1$. Покажем, что общие корни многочленов $x^m - 1$ и $x^n - 1$ – это все корни многочлена $x^d - 1$.
$\varepsilon^d = 1 \Longrightarrow \varepsilon^m = 1$ и $\varepsilon^n = 1$.
Пусть $\varepsilon^m = 1$ и $\varepsilon^n = 1$. Тогда $\varepsilon = \cos\frac{2\pi k}{m} + i\sin\frac{2\pi k}{m} = \cos\frac{2\pi\ell}{n} + i\sin\frac{2\pi\ell}{n}$ для некоторых $0 \le k < m$ и $0 \le \ell < n$. Отсюда $\frac{2\pi k}{m} - \frac{2\pi\ell}{n} = 2\pi q$ для некоторого целого числа $q$. Далее, $kn - \ell m = qmn$, т.е. $m = m_1 d$ делит $kn = kn_1 d$ и $m_1$ делит $kn_1$. Так как $(m_1, n_1) = 1$, $m_1$ делит $k$, т.е. $k = k_1 m_1$ и $\frac{2\pi k}{m} = \frac{2\pi k_1 m_1}{m_1 d} = \frac{2\pi k_1}{d}$. Итак, $\varepsilon = \cos\frac{2\pi k_1}{d} + i\sin\frac{2\pi k_1}{d}$, $\varepsilon^d = 1$.
$(x^m - 1, x^n - 1) = x^{(m,n)} - 1$.

Найти условия для натуральных чисел $m, n, p$, при которых многочлен $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 - x + 1$.

$(x^2 - x + 1)(x + 1) = x^3 + 1$
$c_1$ и $c_2$ – различные корни $x^2 - x + 1$. Тогда $c_j^3 + 1 = 0$, $c_j^3 = -1$.
Многочлен $f(x) = x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 - x + 1 \iff c_1$ и $c_2$ – корни $f(x)$.
$f(c_j) = c_j^{3m} - c_j^{3n+1} + c_j^{3p+2} = (-1)^m - (-1)^n c_j + (-1)^p c_j^2$, значение зависит от четности чисел $m, n, p$.

| $m$ | $n$ | $p$ | |
|---|---|---|---|
| ч | ч | ч | $f(c_j) = 1 - c_j + c_j^2 = 0$ |
| н | ч | ч | $f(c_j) = -1 - c_j + c_j^2 \neq 0$ |
| н | н | ч | $f(c_j) = -1 + c_j + c_j^2 \neq 0$ |
| н | ч | н | $f(c_j) = -1 - c_j - c_j^2 \neq 0$ |

Изменение четности всех трех чисел приводит к умножению соответствующего выражения на $-1$.
Поэтому $c_1$ и $c_2$ – корни $f(x) \iff$ числа $m, n, p$ – одной четности. Это условие равносильно тому что $x^{3m} - x^{3n+1} + x^{3p+2}$ делится на $x^2 - x + 1$.

Доказать, что многочлен $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на $x^2+x+1$.

$(x^2+x+1)(x-1)=x^3-1$
$c_1$ и $c_2$ – различные корни $x^2+x+1$. Тогда $c_j^3-1=0$, $c_j^3=1$.
Многочлен $f(x)=x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на $x^2+x+1 \iff c_1$ и $c_2$ – корни $f(x)$.
$f(c_j)=c_j^{3m}+c_j^{3n+1}+c_j^{3p+2}=1+c_j+c_j^2=0$, так как $c_j^{3k}=(c_j^3)^k=1$ при любом $k\in\mathbb{N}$, поэтому $x^{3m}+x^{3n+1}+x^{3p+2}$ делится на $x^2+x+1$.

Найти рациональные корни многочленов: а) $6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$.

Если этот многочлен имеет рациональные корни, то они имеют вид несократимых дробей $\frac{p}{q}$, где $p|12$ (берем все делители), $q|6$ (берем только положительные делители). Подставляем в многочлен те дроби, для которых $p+q$ делит $f(-1) = 18$ и $p-q$ делит $f(1) = 4$.

| $q \backslash p$ | 1 | $-1$ | 2 | $-2$ | 3 | $-3$ | 4 | $-4$ | 6 | $-6$ | 12 | $-12$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | - | - | ? | - | - | ? | - | - | - | - | - | - |
| 2 | ? | | | | | | | | | | | |
| 3 | | | | | | | | | | | | |
| 6 | | | | | | | | | | | | |

| | 6 | 19 | $-7$ | $-26$ | 12 |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 31 | 55 | 84 | 180 |
| $-3$ | 6 | 1 | $-10$ | 4 | 0 |
| $\frac{1}{2}$ | 6 | 4 | $-8$ | 0 | |

$f(x) = (x+3)(6x^3 + x^2 - 10x + 4) = (x+3)(x - \frac{1}{2})(6x^2 + 4x - 8) =$ $(x+3)(2x-1)(3x^2 + 2x - 4)$, рациональные корни $x_1 = -3$, $x_2 = \frac{1}{2}$. $3x^2 + 2x - 4 = 0$, $D = 1 + 3 \cdot 4 = 13$, рациональных корней у этого уравнения нет.