Глава IV. Многочлены

§ 8. Многочлены и матрицы

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть F – поле, n – натуральное число. Рассмотрим кольцо многочленов $F^{n\times n}[x]$ над кольцом квадратных матриц $F^{n\times n}$. Элементы этого кольца можно рассматривать и как матрицы, состоящие из многочленов, т.е. элементы кольца матриц $F[x]^{n\times n}$. Пусть $A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m \in F^{n\times n}[x]$ и $A_s = \left(\alpha_{ij}^{(s)}\right)$ для $s = 1, \ldots, m$. Тогда по правилам действий над матрицами получаем $A_0 + A_1x + \ldots + A_mx^m = G$, где $G = (g_{ij}) \in F[x]^{n\times n}$, и многочлены $g_{ij} = \alpha_{ij}^{(0)} + \alpha_{ij}^{(1)}x + \ldots + \alpha_{ij}^{(m)}x^m$ для всех $i, j = 1, \ldots, n$. При этом действия над одними и теми же многочленами по правилам умножения многочленов и умножения матриц приводят к одинаковым результатам.

Вот пример записи многочлена из $F^{3\times 3}[x]$ в виде матрицы из $F[x]^{3\times 3}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 6 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} x^2 =$$
$$= \begin{pmatrix} 1+3x+x^2 & 2 & 3+x+x^2 \\ 2x & 5+x+x^2 & -1 \\ 6-x+x^2 & x & 1+5x+x^2 \end{pmatrix}.$$

Пусть F – поле, $A \in F^{n\times n}$.

Определения

Характеристической матрицей матрицы A называется матрица $A - xE_n$.
Характеристическим многочленом матрицы A называется многочлен $|A - xE_n|$ – определитель характеристической матрицы $A - xE_n$.
Обозначение: $\chi_A(x)$.

В развернутом виде характеристический многочлен матрицы $A = (\alpha_{ij})_{n\times n}$ имеет вид

$$\chi_A(x) = \begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn} - x \end{vmatrix}. \qquad (1)$$

Вспоминая определение определителя порядка n (сл.6 §3 гл.II), получаем:

$$\chi_A(x) = |A| + \ldots + (-1)^{n-1}(\alpha_{11} + \alpha_{22} + \ldots + \alpha_{nn})x^{n-1} + (-1)^n x^n,$$

поскольку $\chi_A(0) = |A|$ и члены, содержащие x^n, x^{n-1}, могут получиться только из произведения $(\alpha_{11} - x)(\alpha_{22} - x)\ldots(\alpha_{nn} - x)$. В частности,

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11} - x & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} - x \end{vmatrix} = \alpha_{11}\alpha_{22} - \alpha_{12}\alpha_{21} - (\alpha_{11} + \alpha_{22})x + x^2.$$

Пусть F – поле, $A \in F^{n\times n}$, $f \in F[x]$.

Определение

Будем говорить, что многочлен f *аннулирует* матрицу A, если $f(A) = O$.

Теорема

Для любой матрицы $A \in F^{n\times n}$ ее характеристический многочлен $\chi_A(x)$ аннулирует A.

$\Downarrow$Запишем присоединенную матрицу $(A - xE_n)^{\sim}$ (см. сл.39 §3 гл.II) к характеристической матрице $A - xE_n$ в виде матричного многочлена (так как при этом каждое алгебраическое дополнение получается из определителя порядка $n-1$ и имеет степень по x не выше $n-1$, указанный многочлен также имеет степень не выше $n-1$):
$(A - xE_n)^{\sim} = B_0 + B_1x + \ldots + B_{n-1}x^{n-1}$, где $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1} \in F^{n\times n}$.
Пусть $\chi_A(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots + \gamma_n x^n$. Так как
$(A - xE_n)^{\sim} \cdot (A - xE_n) = |A - xE_n|E_n$, имеем
$\gamma_0 E_n + \gamma_1 xE_n + \ldots + \gamma_n x^n E_n = (B_0 + B_1x + \ldots + B_{n-1}x^{n-1})(A - xE_n)$.
Раскрывая скобки и приравнивая матрицы-коэффициенты при одинаковых степенях x, получаем цепочку равенств, приведенную на следующем слайде (слева от каждого равенства записана соответствующая степень x).

Окончание доказательства теоремы Гамильтона-Кэли

$$\begin{array}{ccc}
x^0 & B_0A = \gamma_0 E_n & \\
x^1 & B_1A - B_0 = \gamma_1 E_n & A \\
x^2 & B_2A - B_1 = \gamma_2 E_n & A^2 \\
\dots & \dots & \dots \\
x^k & B_kA - B_{k-1} = \gamma_k E_n & A^k \\
\dots & \dots & \dots \\
x^{n-1} & B_{n-1}A - B_{n-2} = \gamma_{n-1} E_n & A^{n-1} \\
x^n & -B_{n-1} = \gamma_n E_n & A^n
\end{array}$$

Умножим каждое равенство, начиная со второго, справа на соответствующую степень матрицы A (эти степени записаны справа от каждого равенства) и сложим все равенства. Все слагаемые слева взаимно уничтожатся, а справа получится значение $\chi_A(A)$. Теорема доказана.$\Uparrow$

В силу теоремы Гамильтона-Кэли для любой матрицы $A \in F^{n\times n}$ существует многочлен степени n, аннулирующий ее. Ясно, что существует ненулевой многочлен наименьшей степени, аннулирующий A. Назовем такие многочлены *минимальными аннулирующими* для матрицы A.

Минимальный многочлен матрицы

Предложение

Пусть $A \in F^{n\times n}$, $m(x)$ – минимальный аннулирующий многочлен для A, $f(x)$ – произвольный многочлен, аннулирующий A. Тогда $m(x)$ делит $f(x)$.

$\Downarrow$По определению минимального аннулирующего многочлена имеем $\deg(m) \le \deg(f)$. Разделим f на m с остатком: $f(x) = q(x)m(x) + r(x)$ (см. сл.7 §1). От противного, предположим, что $r(x) \neq 0$. Тогда $\deg(r) < \deg(m)$. Из равенства $f(x) = q(x)m(x) + r(x)$ получаем $f(A) = q(A)m(A) + r(A)$. Так как $f(A) = O$ и $m(A) = O$, заключаем, что и $r(A) = O$. Это противоречит выбору многочлена $m(x)$. Предложение доказано.$\Uparrow$

Из предложения следует, что любые два минимальные аннулирующие многочлены одной и той же матрицы ассоциированы.

Определение

Минимальным многочленом квадратной матрицы A называется ее минимальный аннулирующий многочлен со старшим коэффициентом 1. Обозначение: $\mu_A(x)$.

Примеры минимальных многочленов

Предлагается проверить следующие утверждения.

1. Минимальный многочлен скалярной матрицы λE_n есть $\mu_{(\lambda E_n)}(x) = x - \lambda$.
2. Минимальный многочлен квадратной матрицы порядка 2, не являющейся скалярной, равен ее характеристическому многочлену.
3. Минимальный многочлен матрицы $$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda \end{pmatrix}$$ порядка n есть $(x - \lambda)^n$ – многочлен, ассоциированный с ее характеристическим многочленом.

Предложение

Коэффициент при x^{n-k} в характеристическом многочлене $\chi_A(x)$ матрицы A равен сумме миноров $(-1)^{n-k}\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} A\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ i_1 & i_2 & \dots & i_k \end{pmatrix}$.

$\Downarrow$Обозначим $(b_{ij})_{n\times n} = A - xE_n$, т.е. $b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i\neq j; \\ a_{ii}-x, i=j. \end{cases}$ Тогда $\chi_A(x) = \sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)} b_{1\sigma_1}b_{2\sigma_2}\dots b_{n\sigma_n}$. Коэффициент при x^{n-k} получается следующим образом. Зафиксируем индексы $1\le j_1<\dots<j_{n-k}\le n$. Выберем в определителе (1) строки и столбцы с одинаковыми номерами $j_1,\dots,j_{n-k}$. Тогда x^{n-k} получается из произведений $b_{1\sigma_1}b_{2\sigma_2}\dots b_{n\sigma_n}$ для всех $\sigma\in S_n$ таких что $\sigma_{j_m}=j_m$ при всех $m=1,\dots,n-k$, при этом из разности $a_{j_mj_m}-x$ берется слагаемое $-x$. Индексы $1\le i_1<\dots<i_k\le n$ из множества $\{1,\dots,n\}\backslash\{j_1,\dots,j_{n-k}\}$ образуют в такой перестановке σ перестановку $\overline{\sigma}=(\sigma_{i_1},\dots,\sigma_{i_k})$. Покажем. что $(-1)^{I(\sigma)}=(-1)^{I(\overline{\sigma})}$. Для этого убедимся. что подстановки $S=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \dots & \sigma_n \end{pmatrix}$ и $\overline{S}=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_k \\ \sigma_{i_1} & \sigma_{i_2} & \dots & \sigma_{i_k} \end{pmatrix}$ имеют одинаковую четность. Переставим в S столбцы так, чтобы $S=\begin{pmatrix} j_1 & \dots & j_{n-k} & i_1 & \dots & i_k \\ j_1 & \dots & j_{n-k} & \sigma_{i_1} & \dots & \sigma_{i_k} \end{pmatrix}$; каждое число j_r образует одно и

то же число инверсий в 1-й строке и во 2-й строке, так как $\{i_1, \ldots, i_k\} = \{\sigma_{i_1}, \ldots, \sigma_{i_k}\}$. Поэтому сумма числа инверсий в 1-й и 2-й строках S превосходит сумму числа инверсий в 1-й и 2-й строках $\overline{S}$ на четное число.

Положим $T(j_1, \ldots, j_{n-k}) = \{\sigma \in S_n | \sigma_{j_m} = j_m,\ m = 1, \ldots, n-k\}$ и рассмотрим сумму $S(j_1, \ldots, j_{n-k})$ всех слагаемых из определителя (1), содержащих в качестве множителей элементы $a_{j_m j_m} - x$ $(m = 1, \ldots, n-k)$. Тогда

$S(j_1, \ldots, j_{n-k}) = \sum_{\tau \in T(j_1, \ldots, j_{n-k})} (-1)^{I(\tau)} b_{1\tau_1} b_{2\tau_2} \cdots b_{n\tau_n} =$

$= \prod_{m=1}^{n-k} (a_{j_m j_m} - x) \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} (-1)^{I(\tau)} a_{i_1 \tau_{i_1}} \cdots a_{i_k \tau_{i_k}} =$

$\prod_{m=1}^{n-k} (a_{j_m j_m} - x) \cdot A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}$, так как $\{(\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_k}) | \tau \in T(j_1, \ldots, j_{n-k})\} = S_k$ (все перестановки на множестве $\{i_1, \ldots, i_k\}$) и $(-1)^{I(\tau)} = (-1)^{I(\tau_{i_1}, \ldots, \tau_{i_k})}$. Поэтому получается минор $A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}$.

Следовательно, в определителе (1) коэффициент при x^{n-k} равен коэффициенту при x^{n-k} в сумме $\sum\limits_{1 \le j_1 < \cdots < j_{n-k} \le n} S(j_1, \ldots, j_{n-k})$, который равен $(-1)^{n-k} \sum\limits_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} A \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_k \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_k \end{pmatrix}$. $\Uparrow$

Пример 1

Вычислить характеристический многочлен матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$ и найти его корни.

$$\chi_A(x) = \det(A - xE_3) = \begin{vmatrix} 1-x & -3 & 4 \\ 4 & -7-x & 8 \\ 6 & -7 & 7-x \end{vmatrix} =$$

$$(1-x)\begin{vmatrix} -7-x & 8 \\ -7 & 7-x \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 7-x \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 4 & -7-x \\ 6 & -7 \end{vmatrix} =$$

$$= (1-x)(x^2 - 49 + 56) + 3(28 - 4x - 48) + 4(-28 + 42 + 6x) =$$

$$= (1-x)(x^2 + 7) + 3(-20 - 4x) + 4(14 + 6x) =$$

$$= x^2 + 7 - x^3 - 7x - 60 - 12x + 56 + 24x = -x^3 + x^2 + 5x + 3;$$

	-1	1	5	3
3	-1	-2	-1	0

$-x^3 + x^2 + 5x + 3 = (x-3)(-x^2 - 2x - 1)$, $x_1 = 3$, $x_{2,3} = -1$.

Вычислить характеристический многочлен матрицы
$$A=\begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 2\\ 5 & -8 & 5 & 4\\ 6 & -12 & 8 & 5\\ 1 & -3 & 2 & 2\end{pmatrix}$$ и найти его корни.

$$\chi_A(x)=\operatorname{det}(A-xE_4)=\begin{vmatrix} 4-x & -3 & 1 & 2\\ 5 & -8-x & 5 & 4\\ 6 & -12 & 8-x & 5\\ 1 & -3 & 2 & 2-x\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 3-x & 0 & -1 & x\\ 5 & -8-x & 5 & 4\\ 2 & 0 & -x & 4x-3\\ 1 & -3 & 2 & 2-x\end{vmatrix}=$$

$$=-(8+x)\begin{vmatrix} 3-x & -1 & x\\ 2 & -x & 4x-3\\ 1 & 2 & 2-x\end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 3-x & -1 & x\\ 5 & 5 & 4\\ 2 & -x & 4x-3\end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} 3-x & -1 & x\\ 2 & -x & 4x-3\\ -8-x & -16-2x & (x-2)(x+8)\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3-x & -1 & x\\ 2 & -x & 4x-3\\ 15 & 15 & 12\end{vmatrix}=$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & -1 & x \\ 2 & -x & 4x-3 \\ 7-x & -1-2x & x^2+6x-4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-x & -1 & x \\ 2 & -x & 4x-3 \\ 4 & -2x & x^2+5x-4 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 3-x & -1 & x \\ 2 & -x & 4x-3 \\ 0 & 0 & x^2-3x+2 \end{vmatrix} = (x^2-3x+2) \begin{vmatrix} 3-x & -1 \\ 2 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= (x^2-3x+2)^2 = (x-1)^2(x-2)^2.$$

Корни $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, кратности 2.

Теорема

Пусть $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $g(x) \in \mathbb{C}[x]$, $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – все корни характеристического многочлена $\chi_A(x)$ с учетом кратности. Тогда $g(\lambda_1), \dots, g(\lambda_n)$ – все корни характеристического многочлена $\chi_{g(A)}(x)$ с учетом кратности.

$\Downarrow$Пусть $\chi_A(x) = (-1)^n \prod_{j=1}^n (x - \lambda_j)$, $g(x) = a_0 \prod_{\ell=1}^m (x - \mu_\ell)$. Покажем, что $|g(A)| = \prod\limits_{j=1}^n g(\lambda_j)$. Имеем $g(A) = a_0 \prod\limits_{\ell=1}^m (A - \mu_\ell E_n)$. Перейдем к определителям: $|g(A)| = \left| a_0 \prod\limits_{\ell=1}^m (A - \mu_\ell E_n) \right| = a_0^n \prod\limits_{\ell=1}^m |A - \mu_\ell E_n| =$

$= a_0^n \prod\limits_{\ell=1}^m \chi_A(\mu_\ell) = (-1)^{mn} a_0^n \prod\limits_{\ell=1}^m \prod\limits_{j=1}^n (\mu_\ell - \lambda_j) = \prod\limits_{j=1}^n a_0 \prod\limits_{\ell=1}^m (\lambda_j - \mu_\ell) =$

$= \prod\limits_{j=1}^n g(\lambda_j)$. В полученную формулу $|g(A)| = \prod\limits_{j=1}^n g(\lambda_j)$ подставим вместо многочлена $g(x)$ многочлен $g(x) - y$: $|g(A) - yE_n| = \prod_{j=1}^n (g(\lambda_j) - y)$.

Заменив y на x, получаем $\chi_{g(A)}(x) = \prod\limits_{j=1}^n (g(\lambda_j) - x)$.$\Uparrow$

Зафиксируем матрицу $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Положим $\varphi_A(x) = (-1)^n \chi_A(x)$. Тогда $\varphi_A(x) = |xE_n - A| = x^n - p_1 x^{n-1} - p_2 x^{n-2} - \ldots - p_{n-1}x - p_n$. При $x = 0$ имеем $|-A| = -p_n$, откуда $p_n = (-1)^{n-1}|A|$.

Через $B(x)$ обозначим присоединенную к матрице $xE_n - A$. Как и в доказательстве теоремы Гамильтона-Кэли, запишем $B(x) = x^{n-1}B_0 + x^{n-2}B_1 + \ldots + x^1 B_{n-2} + B_{n-1}$, где $B_j \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $j = 0, 1, \ldots, n-1$.

Метод Д.К.Фаддеева предназначен для одновременного определения скалярных коэффициентов $p_1, \ldots, p_n$ многочлена $\varphi_A(x)$ и матричных коэффициентов $B_1, \ldots, B_{n-1}$ присоединенной x-матрицы $B(x)$ к матрице $xE_n - A$.

Описание алгоритма

$$A_1 = A, p_1 = \mathrm{tr}(A_1), B_1 = A_1 - p_1 E_n$$
$$A_2 = A \cdot B_1, p_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_2), B_2 = A_2 - p_2 E_n$$
....
$$A_{n-1} = A \cdot B_{n-2}, p_{n-1} = \frac{1}{n-1}\mathrm{tr}(A_{n-1}), B_{n-1} = A_{n-1} - p_{n-1}E_n$$
$$A_n = A \cdot B_{n-1}, p_n = \frac{1}{n}\mathrm{tr}(A_n), B_n = A_n - p_n E_n = O.$$

Сначала выясним связи между скалярами $p_1, \ldots, p_n$ и матрицами $B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$. По свойству присоединенной матрицы $(xE_n - A) \cdot (x^{n-1}B_0 + x^{n-2}B_1 + \ldots + B_{n-1}) = (x^n - p_1x^{n-1} - p_2x^{n-2} - \ldots - p_{n-1}x - p_n)E_n$. Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях x, получаем $B_0 = E_n$, $B_1 - A = -p_1E_n$, $B_2 - A \cdot B_1 = -p_2E_n, \ldots$, $B_{n-1} - A \cdot B_{n-2} = -p_{n-1}E_n$, $-A \cdot B_{n-1} = -p_nE_n$. Таким образом, для матриц B_j имеем соотношения, указанные в алгоритме: $B_0 = E_n$, $B_k = A \cdot B_{k-1} - p_kE_n$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ и $A \cdot B_{n-1} = p_nE_n$, откуда следует $B_n = A_n - p_nE_n = O$. Если $|A| \neq 0$, то $A^{-1} = \dfrac{1}{p_n}B_{n-1}$, так как $p_n = (-1)^{n-1}|A| \neq 0$.

Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – все корни характеристического многочлена $\chi_A(x)$ с учетом кратности. В силу обобщенной теоремы Виета $\sum_{j=1}^n \lambda_j = -\mathrm{tr}(A)$. Многочлен $\varphi_A(x) = |xE_n - A|$ имеет те же корни, значит, $p_1 = \mathrm{tr}(A)$. Согласно теореме сл.8 для натурального числа m имеем $\varphi_{A^m}(x) = (x - \lambda_1^m) \ldots (x - \lambda_n^m)$, так как $\varphi_{A^m}(x) = (-1)^n\chi_{A^m}(x)$. Поэтому $\mathrm{tr}(A^m) = \lambda_1^m + \ldots + \lambda_n^m = S_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. Для краткости обозначим $S_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ через S_m. Согласно обобщенной теореме Виета, применной к многочлену $\varphi_A(x)$, заключаем, что $p_m = (-1)^{m-1}s_m(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Окончание обоснования алгоритма

Двигаясь по формулам алгоритма сверху вниз, получаем
$A_2 = A(A - p_1 E_n) = A^2 - p_1 A$,
$A_3 = A^3 - p_1 A^2 - p_2 A, \ldots$,
$A_m = A^m - p_1 A^{m-1} - \ldots - p_{m-1} A \ (4 \le m \le n)$.
Таким образом, $\mathrm{tr}(A_m) = \mathrm{tr}(A^m) - p_1 \mathrm{tr}(A^{m-1}) - \ldots - p_{m-1}\mathrm{tr}(A) =$
$S_m - s_1 S_{m-1} + s_2 S_{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1} s_{m-1} S_1$. Согласно предложению сл.13 §7 (формула Ньютона для $m \le n$) имеем
$S_m - s_1 S_{m-1} + s_2 S_{m-2} + \ldots + (-1)^{m-1} s_{m-1} S_1 = (1)^{m-1} m s_m = m p_m$.
Следовательно, $p_m = \dfrac{1}{m}\mathrm{tr}(A_m)$. Обоснование алгоритма закончено.

Если $A \in F^{n \times n}$ для некоторого числового поля F, то метод Д.К.Фаддеева можно применять, так как любое числовое поле содержится в поле $\mathbb{C}$, а все вычисления метода производятся в поле F.

Пример 3

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ p_1 = \mathrm{tr}(A) = 4,$$

$$B_1 = A - 4E_4 = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix};$$

$$A_2 = A \cdot B_1 = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & -2 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & 3 \end{pmatrix}, \ p_2 = \frac{1}{2}\mathrm{tr}(A_2) = -2,$$

$$B_2 = A_2 + 2E_4 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix};$$

$$A_3 = A \cdot B_2 = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & -5 \\ -3 & -3 & -1 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -4 \\ -1 & -7 & -3 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -7 \end{pmatrix}, \ p_3 = \frac{1}{3}\operatorname{tr}(A_3) = -5,$$

$$B_3 = A_3 + 5E_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & -2 & -4 \\ -1 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 4 & -2 & -2 \end{pmatrix};$$

$$A_4 = A \cdot B_3 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \ p_4 = \frac{1}{4}\operatorname{tr}(A_3) = -2,$$

$$B_4 = A_4 + 2E_4 = O;$$

$$\chi_A(x) = \varphi_A(x) = x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 5x + 2, \ |A| = 2, \ A^{-1} = \frac{1}{p_4} B_3.$$