Глава IV. Многочлены

§ 7. Многочлены от нескольких переменных

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

В §1 было определено понятие кольца многочленов над полем. Как отмечено на сл.12 §1, можно определить кольцо многочленов $K[x]$ над кольцом K, называемым кольцом коэффициентов. Свойства кольца многочленов $K[x]$ зависят от свойств кольца коэффициентов K.
Пусть F – поле. Положим $K_1 = F[x_1]$ – кольцо многочленов от переменной x_1 и $K_2 = K_1[x_2]$, где x_2 – независимая переменная, отличная от x_1. Любой многочлен из K_2 можно записать в виде $\sum\limits_{j=0}^{m} f_j(x_1)x_2^j = \sum\limits_{j=0}^{m}\sum\limits_{i=0}^{k_j} \alpha_{ij}x_1^i x_2^j$, где $f_j(x_1) = \sum\limits_{i=0}^{k_j} \alpha_{ij}x_1^i$. Положим $F[x_1, x_2] = K_2$. Продолжая по индукции, получим $F[x_1, x_2, \dots, x_n] = F[x_1, x_2, \dots, x_{n-1}][x_n]$.

Определение

Кольцо $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ называется *кольцом многочленов* над полем F от (коммутирующих) переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$.

Важное свойство кольца $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$

Любой элемент кольца $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ является суммой конечного числа одночленов вида $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$, где $\alpha \in F$, $s_1, s_2, \dots, s_n$ – неотрицательные целые числа, и $x_j^0 = 1$. При $\alpha \neq 0$ *степенью* одночлена $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \dots x_n^{s_n}$ называется $\sum_{j=1}^{n} s_j$.
Так как кольцо многочленов от одной переменной над кольцом без делителей нуля само является кольцом без делителей нуля, справедливо следующее

Наблюдение

Кольцо $F[x_1, x_2, \dots, x_n]$ не содержит делителей нуля, т.е. является областью целостности.

Лексикографический порядок

Определение

Говорят, что одночлен $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$ *ниже* одночлена $\beta x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}$, если $\alpha, \beta \neq 0$ и либо $s_1 < t_1$, либо существует индекс $m, 1 \leq m \leq n-1$ такой что $s_j = t_j$ при $j = 1, \ldots, m$ и $s_{m+1} < t_{m+1}$. Обозначение: $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n} \prec \beta x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}$.

Бинарное отношение $\prec$ называется *лексикографическим порядком* на множестве ненулевых одночленов кольца $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$. Рекомендуется проверить, что это отношение транзитивно (сравните со сл.11 §4 гл.I). На множестве всех одночленов с коэффициентом 1 отношение $\preceq$ является отношением линейного порядка (сравните со сл.10 §4 гл.I).
Любой ненулевой многочлен этого кольца имеет *высший член* – такой одночлен, что все остальные ненулевые одночлены, входящие в данный многочлен, ниже его. Например, многочлен $x_1^2 x_3 + x_1 x_2^{10} + x_2^{20} x_3^{100}$ имеет высший член $x_1^2 x_3$.

Лемма

Высший член произведения двух ненулевых многочленов кольца $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ равен произведению их высших членов.

$\Downarrow$ Пусть $\alpha x_1^{s_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n}$ – высший член многочлена f, $\gamma x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_n^{p_n}$ – другой его ненулевой одночлен (если такой существует), $\beta x_1^{t_1} x_2^{t_2} \ldots x_n^{t_n}$ – высший член многочлена g, $\delta x_1^{q_1} x_2^{q_2} \ldots x_n^{q_n}$ – другой его ненулевой одночлен (если такой существует). Докажем, что $\alpha\delta x_1^{s_1+q_1} x_2^{s_2+q_2} \ldots x_n^{s_n+q_n} \prec \alpha\beta x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2+t_2} \ldots x_n^{s_n+t_n}$. Это очевидно, если $q_1 < t_1$. Пусть $q_j = t_j$ при $j = 1, \ldots, m$ и $q_{m+1} < t_{m+1}$. Тогда $s_j + q_j = s_j + t_j$ при $j = 1, \ldots, m$ и $s_{m+1} + q_{m+1} < s_{m+1} + t_{m+1}$, что и требуется доказать. Аналогично доказывается, что $\beta\gamma x_1^{p_1+t_1} x_2^{p_2+t_2} \ldots x_n^{p_n+t_n} \prec \alpha\beta x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2+t_2} \ldots x_n^{s_n+t_n}$. Докажем, что $\gamma\delta x_1^{p_1+q_1} x_2^{p_2+q_2} \ldots x_n^{p_n+q_n} \prec \alpha\beta x_1^{s_1+t_1} x_2^{s_2} \ldots x_n^{s_n+t_n}$. Это очевидно, если $p_1 < s_1$ или $q_1 < t_1$. Пусть $p_j = s_j$ при $j = 1, \ldots, m$, $p_{m+1} < s_{m+1}$ и $q_j = t_j$ при $j = 1, \ldots, \ell$, $q_{\ell+1} < t_{\ell+1}$. Пусть k – наименьшее из чисел m, ℓ. Тогда ясно, что $p_j + q_j = s_j + t_j$ при $j = 1, \ldots, k$ и $p_{k+1} + q_{k+1} < s_{k+1} + t_{k+1}$.$\Uparrow$

Пусть $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$, σ – подстановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, т.е. биекция этого множества на себя. Обозначим через f_σ многочлен $f(x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)})$, полученный из многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ заменой переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ переменными $x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \ldots, x_{\sigma(n)}$. Например, если $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2 + 2x_1 x_2^2 x_3$ и $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, то $f_\sigma = x_1 x_3^2 + 2x_1^2 x_2 x_3$.

Определение

Многочлен $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ называется *симметрическим*, если для любой подстановки σ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ имеет место равенство $f_\sigma = f$.

Из определения сразу следует

Наблюдение

Высший член любого симметрического многочлена $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ имеет вид $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, где $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$.

Каждый одночлен $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$, где $k_1 \geq k_2 \geq \ldots \geq k_n$, порождает *однородный* симметрический многочлен $\sum_{\sigma \in S_n} (\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n})_\sigma$.

Определение

Следующие симметрические многочлены от n переменных называются *элементарными*: $s_1 = x_1 + \ldots + x_n$, $s_2 = \sum_{1 \le j < k \le n} x_j x_k, \ldots,$ $s_m = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_m \le n} x_{j_1} \ldots x_{j_m}, \ldots,$ $s_n = x_1 \ldots x_n$.

Например, $s_1(x_,x_2,x_3,x_4) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$,
$s_2(x_,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4$,
$s_3(x_,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_1x_3x_4 + x_2x_3x_4$,
$s_4(x_,x_2,x_3,x_4) = x_1x_2x_3x_4$.

Теорема

Для любого ненулевого симметрического многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ существует единственный многочлен $g(y_1, \ldots, y_n)$ такой что $f(x_1, \ldots, x_n) = g(s_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, s_n(x_1, \ldots, x_n))$.

$\Downarrow$ Пусть $\alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$ – высший член симметрического многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$. Учитывая, что $k_1 \ge k_2 \ge \ldots \ge k_n$, определим многочлен $g_1(y_1, \ldots, y_n) = \alpha y_1^{k_1-k_2} \ldots y_{n-1}^{k_{n-1}-k_n} y_n^{k_n}$, где нулевая степень переменной равна 1. Легко понять, что высший член многочлена s_m^r равен $x_1^r \ldots x_m^r$, поэтому согласно лемме сл.5 высший член $g_1(s_1, \ldots, s_n)$ равен $\alpha x_1^{k_1-k_2}(x_1x_2)^{k_2-k_3} \ldots (x_1 \ldots x_{n-1})^{k_{n-1}-k_n}(x_1 \ldots x_n)^{k_n} = \alpha x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_n^{k_n}$.

Следовательно, высший член многочлена $f_1(x_1,\dots,x_n)=f(x_1,\dots,x_n)-$ $-g_1(s_1(x_1,\dots,x_n),\dots,s_n(x_1,\dots,x_n))$ ниже $\alpha x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$. Применяя к его высшему члену те же рассуждения, получаем многочлен $g_2(y_1,\dots,y_n)$ такой, что высший член многочлена $f_1(x_1,\dots,x_n)-$ $-g_2(s_1(x_1,\dots,x_n),\dots,s_n(x_1,\dots,x_n))$ ниже высшего члена $f_1(x_1,\dots,x_n)$. Так как существует лишь конечное число одночленов вида $\beta x_1^{\ell_1}x_2^{\ell_2}\dots x_n^{\ell_n}$ со свойством $\ell_1\geq\ell_2\geq\dots\geq\ell_n$, которые ниже $\alpha x_1^{k_1}x_2^{k_2}\dots x_n^{k_n}$, через конечное число шагов многочлен $g(y_1,\dots,y_n)$ будет построен.
Установим единственность. Предположим, что существуют различные многочлены $g(y_1,\dots,y_n)$ и $h(y_1,\dots,y_n)$ такие, что $g(s_1(x_1,\dots,x_n),\dots,s_n(x_1,\dots,x_n))=h(s_1(x_1,\dots,x_n),\dots,s_n(x_1,\dots,x_n))$.
Тогда $(g-h)(s_1(x_1,\dots,x_n),\dots,s_n(x_1,\dots,x_n))=0$ и $g-h\neq 0$. Для одночлена $\gamma y_1^{r_1}\dots y_n^{r_n}$ высший член симметрического многочлена $\gamma s_1^{r_1}\dots s_n^{r_n}$ имеет вид $x_1^{r_1}(x_1x_2)^{r_2}\dots(x_1\dots x_{n-1})^{r_{n-1}}(x_1\dots x_n)^{r_n}=$ $=x_1^{r_1+\dots+r_n}x_2^{r_2+\dots+r_n}\dots x_n^{r_n}$. По этому одночлену степени переменных одночлена $\gamma y_1^{r_1}\dots y_n^{r_n}$ определяются однозначно. Выберем среди одночленов многочлена $g-h$ такой одночлен p, у которого высший член q соответствующего симметрического многочлена выше высших членов симметрических многочленов для остальных одночленов. Тогда q не может взаимно уничтожиться при замене $y_1,\dots,y_n$ на $s_1,\dots,s_n$ в многочлене $g-h$. Получаем противоречие.$\Uparrow$

Выразить симметрический многочлен $f(x_1,x_2,x_3)=\sum_{\sigma\in S_3}(x_1^4x_2^2x_3)_\sigma+$ $+\sum_{\sigma\in S_3}(x_1^3x_2^2)_\sigma$ через элементарные симметрические многочлены.

Применим метод неопределенных коэффициентов. Запишем возможные распределения показателей при x_1,x_2,x_3 высших членов симметрических многочленов, которые ниже $x_1^4x_2^2x_3$ (соотв. ниже $x_1^3x_2^2$):

x_1	x_2	x_3		x_1	x_2	x_3	
4	2	1	$s_1^2s_2s_3$	3	2	0	$s_1s_2^2$
3	3	1	$s_2^2s_3$	3	1	1	$s_1^2s_3$
3	2	2	$s_1s_3^2$	2	2	1	s_2s_3

Положим $f_1=\sum_{\sigma\in S_3}(x_1^4x_2^2x_3)_\sigma$ и $f_2=\sum_{\sigma\in S_3}(x_1^3x_2^2)_\sigma$. Тогда $f_1=s_1^2s_2s_3+$ $+\alpha s_2^2s_3+\beta s_1s_3^2$ и $f_2=s_1s_2^2+\gamma s_1^2s_3+\delta s_2s_3$. Для определения $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ придадим x_1,x_2,x_3 конкретные значения и вычислим соответствующие значения f_1,f_2,s_1,s_2,s_3. Получим уравнения относительно $\alpha,\beta,\gamma,\delta$.

x_1	x_2	x_3	f_1	f_2	s_1	s_2	s_3		
1	1	1	6	6	3	3	1	$6=27+9\alpha+3\beta$	$6=27+9\gamma+3\delta$
1	-1	1	2	2	1	-1	-1	$2=1-\alpha+\beta$	$2=1-\gamma+\delta$

$$\begin{cases}9\alpha+3\beta=-21,\\ \alpha-\beta=-1;\end{cases}\quad \begin{cases}9\gamma+3\delta=-21,\\ \gamma-\delta=-1;\end{cases}\quad \begin{cases}12\alpha=-24,\\ \beta=1+\alpha.\end{cases}$$

Окончание примера

Получаем $\alpha = \gamma = -2$, $\beta = \delta = -1$. Таким образом,
$f(x_1, x_2, x_3) = s_1^2 s_2 s_3 - 2s_2^2 s_3 - s_1 s_3^2 + s_1 s_2^2 - 2s_1^2 s_3 - s_2 s_3$, т.е.
$f(x_1, x_2, x_3) = g(s_1, s_2, s_3)$, где
$g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 y_2 y_3 - 2y_2^2 y_3 - y_1 y_3^2 + y_1 y_2^2 - 2y_1^2 y_3 - y_2 y_3$.

Рассмотрим многочлен $(y-x_1)(y-x_2)\dots(y-x_n)$ от переменных $y, x_1, \dots, x_n$. Раскрывая скобки, записывая полученный многочлен как элемент из $K[x_1, \dots, x_n][y]$ и принимая во внимание, что y^{n-k} получается, когда из некоторых $n-k$ скобок берется y, а из оставшихся k скобок – $-x_j$, приходим к формуле

$$(y-x_1)(y-x_2)\dots(y-x_n) = y^n - s_1(x_1, \dots, x_n)y^{n-1} + \quad (1)$$
$$+s_2(x_1, \dots, x_n)y^{n-2} + \dots + (-1)^k s_k(x_1, \dots, x_n)y^{n-k} \dots + (-1)^n s_n(x_1, \dots, x_n),$$

где $s_k(x_1, \dots, x_n)$ – элементарный симметрический многочлен (см. сл.7).

Теорема

Пусть $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n$, $a_0 \neq 0$, и $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ – все корни многочлена $f(x)$ с учетом кратности. Тогда для $k = 1, \dots, n$ справедливо равенство $s_k(\lambda_1, \dots, \lambda_n) = (-1)^k \dfrac{a_k}{a_0}$.

Для доказательства достаточно записать неприводимое разложение $f(x) = a_0(x-\lambda_1)(x-\lambda_2)\dots(x-\lambda_n)$ и сравнить с формулой (1).

При $n = 2$ получается известная из школьного курса математики теорема Виета для корней квадратного уравнения.

Вычисление значений симметрического многочлена от корней многочлена

Обобщенная теорема Виета вместе с теоремой сл.7 позволяет вычислять значения симметрического многочлена от n переменных от всех комплексных корней многочлена n-й степени из $\mathbb{C}[x]$, не вычисляя эти корни. Рассмотрим пример.

Найти значение симметрического многочлена $f(x_1, x_2, x_3)$, указанного на сл.10, от комплексных корней $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ многочлена $h(x) = 4x^3 + 8x^2 + 5x + 7$.

Вычислим с помощью теоремы сл.11 значения элементарных симметрических многочленов $s_1(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -2$, $s_2(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{5}{4}$, $s_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\frac{7}{4}$. Представим $f(x_1, x_2, x_3)$ в виде многочлена от элементарных симметрических многочленов, используя результаты сл.10: $f(x_1, x_2, x_3) = g(s_1, s_2, s_3)$, где $g(y_1, y_2, y_3) = y_1^2 y_2 y_3 - 2y_2^2 y_3 - y_1 y_3^2 + y_1 y_2^2 - 2y_1^2 y_3 - y_2 y_3$. Следовательно, $f(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = g(-2, \frac{5}{4}, -\frac{7}{4}) = \frac{317}{32} = 9\frac{29}{32}$.

Замечание

Заметим, что если коэффициенты многочлена $h(x)$ и симметрического многочлена $f(x_1, \ldots, x_n)$ принадлежат числовому полю F, то и значения элементарных симметрических многочленов $s_k(x_1, \ldots, x_n)$ от всех корней h, и коэффициенты многочлена, посредством которого f выражается через s_k, также принадлежат полю F, и потому значение $f(x_1, \ldots, x_n)$ от всех корней h принадлежит полю F.

Положим $S_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$. Эти многочлены называются *степенными суммами*. Через s_j $(j = 1, \ldots, n)$ как и выше обозначаем элементарные симметрические многочлены от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Предложение

Для любого натурального числа $k \leq n$ справедлива формула $S_k - s_1 S_{k-1} + s_2 S_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} s_{k-1} S_1 + (-1)^k k s_k = 0$.

$\Downarrow$Для каждого $j = 1, 2, \ldots, n$ положим $r_{k,j} = s_k(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots, x_n)$. Сначала докажем формулу

$$r_{k,j} = s_k - x_j s_{k-1} + x_j^2 s_{k-2} - x_j^3 s_{k-3} + \ldots + (-1)^{k-1} x_j^{k-1} s_1 + (-1)^k x_j^k. \quad (1)$$

Все слагаемые в правой части равенства (1), не содержащие x_j, в сумме дают $r_{k,j}$, так как это слагаемые из $s_k(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не содержащие x_j. Докажем, что все слагаемые, содержащие x_j, в правой части (1) взаимно уничтожаются.

$s_k - x_j s_{k-1} + x_j^2 s_{k-2} - x_j^3 s_{k-3} + \ldots + (-1)^m x_j^m s_{k-m} +$
$(-1)^{m+1} x_j^{m+1} s_{k-m-1} + \ldots + (-1)^{k-1} x_j^{k-1} s_1 + (-1)^k x_j^k$
В самом деле, пусть $j \notin \{i_1, \ldots, i_{k-1}\}$. Тогда $x_j x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}}$ из s_k взаимно уничтожается с $-x_j x_{i_1} \ldots x_{i_{k-1}}$ из $-x_j s_{k-1}$, $-x_j^2 x_{i_1} \ldots x_{i_{k-2}}$ из $-x_j s_{k-1}$ взаимно уничтожается с $x_j^2 x_{i_1} \ldots x_{i_{k-2}}$ из $x_j^2 s_{k-2}$, и так далее, $(-1)^m x_j^{m+1} x_{i_1} \ldots x_{i_{k-m-1}}$ из $(-1)^m x_j^m s_{k-m}$ взаимно уничтожается с $(-1)^{m+1} x_j^{m+1} x_{i_1} \ldots x_{i_{k-m-1}}$ из $(-1)^{m+1} x_j^{m+1} s_{k-m-1}$, и так далее, $(-1)^{k-1} x_j^k$ из $(-1)^{k-1} x_j^{k-1} s_1$ взаимно уничтожается с $(-1)^k x_j^k$.
Таким образом, равенство (1) доказано.
Просуммировав равенства (1) по j от 1 до n, получим

$$\sum_{j=1}^{n} r_{k,j} = n s_k - S_1 s_{k-1} + \ldots + (-1)^{k-1} S_{k-1} s_1 + (-1)^k S_k. \qquad (2)$$

Вычтем из обеих частей равенства (2) $k s_k$, перенесем $(n-k)s_k$ в левую часть, поменяем части местами и умножим обе части получившегося равенства на $(-1)^k$. Таким образом придем, записав слагаемые в обратном порядке, к равенству
$S_k - s_1 S_{k-1} + s_2 S_{k-2} + \ldots + (-1)^{k-1} s_{k-1} S_1 + (-1)^k k s_k =$
$(-1)^k \left(\sum_{j=1}^{n} r_{k,j} - (n-k) s_k \right).$

Окончание доказательства формулы Ньютона

Остается проверить, что $\sum_{j=1}^{n} r_{k,j} - (n-k)s_k = 0$, т.е. $\sum_{j=1}^{n} r_{k,j} = (n-k)s_k$.
Это следует из того, что каждый одночлен $x_{i_1} \ldots x_{i_k}$ встречается один раз в каждом многочлене $r_{k,j}$, для которого $j \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, а количество таких многочленов равно $n-k$.$\Uparrow$

Приведем без доказательства формулу Ньютона для случая $k > n$:

$$S_k - s_1 S_{k-1} + s_2 S_{k-2} + \ldots + (-1)^n s_n S_{k-n} = 0.$$