Глава IV. Многочлены

§ 6. Разложение рациональных дробей на простейшие

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть K – область целостности. Положим $P = K \times (K \setminus \{0\})$. Определим отношение ρ на множестве P:

$$(a, x)\rho(b, y) \Leftrightarrow a \cdot y = x \cdot b$$

Предложение

Отношение ρ является отношением эквивалентности на множестве P.

$\Downarrow$Отношение ρ рефлексивно, так как $a \cdot x = x \cdot a \Rightarrow (a, x)\rho(a, x)$. Оно симметрично: $(a, x)\rho(b, y) \Rightarrow a \cdot y = x \cdot b \Rightarrow b \cdot x = y \cdot a \Rightarrow (b, y)\rho(a, x)$. Проверим, что отношение ρ транзитивно. Пусть $(a, x)\rho(b, y)\rho(c, z)$. Тогда $a \cdot y = x \cdot b$ и $b \cdot z = y \cdot c$. Умножим обе части равенства $a \cdot y = x \cdot b$ на z: $a \cdot y \cdot z = x \cdot b \cdot z$ и используем равенство $b \cdot z = y \cdot c$: $a \cdot y \cdot z = x \cdot y \cdot c$, откуда $(a \cdot z - x \cdot c) \cdot y = 0$. Так как $y \neq 0$ и K – кольцо без делителей нуля, $a \cdot z - x \cdot c = 0$ и $a \cdot z = x \cdot c$, т.е. $(a, x)\rho(c, z)$.$\Uparrow$

Положим $F = P/\rho$ и обозначим класс $(a, x)^\rho$ через a/x. Определим на F операции сложения $a/x + b/y = (a \cdot y + b \cdot x)/(x \cdot y)$ и умножения $(a/x) \cdot (b/y) = (a \cdot b)/(x \cdot y)$.

Теорема и определение

Указанные операции определены корректно и относительно них $F = P/\rho$ является полем. Отображение $\varphi : K \longrightarrow F$, определенное правилом $\varphi(a) = a/1$, является изоморфизмом кольца K на подкольцо $\{a/1 | a \in K\}$ поля F.
Поле F называется *полем частных* области целостности K.

$\Downarrow$Проверим корректность определения сложения. Это означает, что если $a/x = a'/x'$, т.е. $(a, x)\rho(a', x')$, и $b/y = b'/y'$, то $a/x + b/y = a'/x' + b'/y'$.
Пусть $ax' = xa'$ и $by' = yb'$. Покажем, что $(ay + bx, xy)\rho(a'y' + b'x', x'y')$.
Имеем $(ay + bx)(x'y') = ayx'y' + bxx'y' = (ax')yy' + (by')xx' = xa'yy' + yb'xx' = (xy)(a'y' + b'x')$, т.е. $(ay + bx)(x'y') = (xy)(a'y' + b'x')$.
Аналогично проверяется корректность определения умножения.
Проверим, что $(F, +)$ – абелева группа. Так как $b/y + a/x = (bx + ay)/(yx)$, сложение коммутативно. Проверим его ассоциативность: $(a/x + b/y) + c/z = (ay + bx)/(xy) + c/z = ((ay + bx)z + xyc)/(xyz) = (ayz + bxz + xyc)/(xyz)$;
$a/x + (b/y + c/z) = a/x + (bz + cy)/(yz) = (ayz + (bz + cy)x)/(xyz) = (ayz + bzx + cyx)/(xyz)$.

Легко видеть, что элемент $0/1$ является нулем:
$a/x + 0/1 = (a \cdot 1 + 0 \cdot x)/(x \cdot 1) = a/x$ для любого элемента $a/x \in F$.
Наконец, элемент $(-a)/x$ будет противоположным к элементу $a/x \in F$:
$a/x + (-a)/x = (ax - ax)/(x^2) = 0/x^2 = 0/1$, так как $0/1 = 0/z$ для любого $z \in K \setminus \{0\}$.
Так как кольцо K коммутативное и ассоциативное, ясно, что операция умножения на F также является коммутативной и ассоциативной.
Для любого $z \in K \setminus \{0\}$ и любого $a/x \in F$ справедливо равенство $(az)/(xz) = a/x$.
Проверим, что F является кольцом: $(a/x + b/y)(c/z) =((ay + bx)/(xy))(c/z) =((ay + bx)c)/(xyz) =(ayc + bxc)/(xyz)$;
$(a/x)(c/z) + (b/y)(c/z) =(ac)/(xz) + (bc)/(yz) =(acyz + bcxz)/(xyz^2) =(acy + bcx)z/(xyz)z =(acy + bcx)/(xyz)$. Так как умножение в F коммутативно, этого достаточно.
Ясно, что $1/1$ является единицей кольца F. Для любого $a/x \neq 0/1$ справедливо $a \neq 0$ и поэтому элемент x/a является обратным к a/x:
$(a/x)(x/a) = (ax)/(xa) = 1/1$ Таким образом, F является полем.

Окончание доказательства

Так как $a/1 = b/1 \Longrightarrow a = b$, отображение $\varphi : a \mapsto a/1$ является инъективным. Очевидно, оно является сюръективным отображением на множество $K' = \{a/1 | a \in K\}$, т.е. биекцией.
Поскольку $a/1 + b/1 = (a + b)/1$ и $(a/1)(b/1) = (ab)/1$, множество K' замкнуто относительно операций сложения и умножения в поле F.
Проверим, что оно является кольцом относительно этих операций, т.е. подкольцом поля F.
(Одной замкнутости относительно операций сложения и умножения в поле недостаточно. Приведите пример подмножества поля $\mathbb{Q}$, замкнутого относительно сложения и умножения, но не являющегося подкольцом.)
Нуль $0/1$ содержится в K' и для любого $a/1 \in K'$ справедливо $(-a)/1 \in K'$. Остальные аксиомы, определяющие кольцо, используют только кванторы всеобщности, поэтому из их истинности в поле F следует истинность в его подмножестве K'.
Ясно, что отображение φ является изоморфизмом кольца K на кольцо $\{a/1 | a \in K\}$.⇑
Обычно кольцо K отождествляется с подкольцом K' поля частных F, т.е. считается, что $K \subseteq F$.

Например, поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$ изоморфно полю частных кольца целых чисел $\mathbb{Z}$.

Пусть теперь F – произвольное поле. Кольцо многочленов $F[x]$ является областью целостности (см. сл.4 §1). С помощью построения поля частных из кольца многочленов $F[x]$ строится поле рациональных дробей, которое обозначается через $F(x)$.

Определения

Рациональной дробью над полем F называется элемент поля частных $F(x)$, т.е. дробь $f(x)/g(x)$, где $f(x), g(x) \in F[x]$ и $g(x) \neq 0$.
Рациональная дробь $f(x)/g(x)$ называется *правильной*, если $\deg(f) < \deg(g)$.
Рациональная дробь $f(x)/g(x)$ называется *простейшей*, если $f \neq 0$, $g = p^n$ – некоторая степень неприводимого над полем F многочлена p и $\deg(f) < \deg(p)$.

Теорема

Любая правильная дробь может быть представлена в виде суммы простейших дробей. Это представление единственно с точностью до перестановки слагаемых.

Доказательство

$\Downarrow$Сначала докажем следующее утверждение.

Лемма

Пусть $f(x)/g(x)$ – правильная дробь и $g = g_1 g_2$, где $(g_1, g_2) = 1$. Тогда $f(x)/g(x) = f_1(x)/g_1(x) + f_2(x)/g_2(x)$, где $f_j(x)/g_j(x)$ $(j = 1, 2)$ – правильные дроби.

$\Downarrow$ Согласно теореме сл.12 §2 существуют многочлены u_1, u_2 такие что $u_1 g_1 + u_2 g_2 = 1$. Умножив обе части этого равенства на f, получим $f = f u_1 g_1 + f u_2 g_2$. Разделим $f u_1$ на g_2 с остатком: $f u_1 = q g_2 + r$, $\deg(r) < \deg(g_2)$. Имеем $f = (q g_2 + r) g_1 + f u_2 g_2 = r g_1 + (q g_1 + f u_2) g_2$. Так как $(q g_1 + f u_2) g_2 = f - r g_1$ и $\deg(f) < \deg(g) = \deg(g_1) + \deg(g_2)$, $\deg(r) < \deg(g_2)$, заключаем, что $\deg(q g_1 + f u_2) < \deg(g_1)$. Положим $f_1 = q g_1 + f u_2$ и $f_2 = r$. Тогда $f/g = (f_1 g_2 + f_2 g_1)/(g_1 g_2) = f_1/g_1 + f_2/g_2$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Пусть f/g – ненулевая правильная дробь и $g = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$ – неприводимое разложение ее знаменателя. Применяя несколько раз лемму, получаем $f/g = f_1/p_1^{k_1} + \ldots + f_m/p_m^{k_m}$, где $\deg(f_j) < k_j \deg(p_j)$ $(j = 1, \ldots, m)$.

Пусть h/p^k – правильная дробь, где p – неприводимый многочлен. Разделим h на p^{k-1} с остатком: $h = q_1p^{k-1} + r_1$. Тогда $\deg(q_1) < \deg(p)$и $\deg(r_1) < (k-1)\deg(p)$. Разделим r_1 на p^{k-2} с остатком: $r_1 = q_2p^{k-2} + r_2$. Тогда $\deg(q_2) < \deg(p)$ и $\deg(r_2) < (k-2)\deg(p)$. Продолжая эти действия, получим последовательность равенств $r_j = q_{j+1}p^{k-j-1} + r_{j+1}$, где $\deg(q_{j+1}) < \deg(p)$ и $\deg(r_{j+1}) < (k-j-1)\deg(p)$, $j = 2, \ldots, k-2$. Отсюда $h = q_1p^{k-1} + q_2p^{k-2} + \ldots + q_{k-1}p + r_{k-1}$ и $h/p^k = q_1/p + q_2/p^2 + \ldots + q_{k-1}/p^{k-1} + r_{k-1}/p^k$. Существование представления правильной дроби в виде суммы простейших дробей доказано.

Докажем единственность. Пусть S_1 и S_2 — два представления одной правильной дроби в виде суммы простейших дробей. Тогда $S_1 - S_2 = 0$. От противного, предположим, что не все слагаемые в левой части взаимно уничтожаются, остается сумма S. Если f/p^k – простейшая дробь с наибольшим показателем степени k из всех дробей суммы S, то умножая S на $p^{k-1}P$, где P – общий знаменатель всех остальных простейших дробей S, не имеющих степени p в знаменателе (в частности, $(p, P) = 1$), получим равенство $(fP)/p + q = 0$ для некоторого многочлена $q \neq 0$. Отсюда $fP = -pq$ и p делит fP, что противоречит условиям $(p, f) = 1$ (так как $\deg(f) < \deg(p)$) и $(p, P) = 1$. Полученное противоречие показывает, что S_1 и S_2 отличаются лишь порядком слагаемых.⇑

Алгоритм разложения правильной дроби в сумму простейших дробей

Чтобы разложить правильную дробь $f(x)/g(x)$ в сумму простейших дробей, нужно разложить знаменатель $g(x)$ на неприводимые множители над полем F, затем записать сумму простейших дробей с неопределенными коэффициентами в числителях. Приведя полученное выражение к общему знаменателю и приравняв его числитель к $f(x)$, можно определить значения неизвестных коэффицентов, либо составив для них систему линейных уравнений, либо подставляя вместо x конкретные числовые значения.

Представление правильных рациональных дробей в виде суммы простейших дробей над полем $\mathbb{R}$ играет важную роль при вычислении неопределенных интегралов от дробно-рациональных функций в математическом анализе.

Пример

Разложить дробь $\dfrac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}$ в сумму простейших дробей над полем $\mathbb{R}$.

Для того, чтобы разложить знаменатель на неприводимые множители над полем $\mathbb{R}$, находим рациональные корни знаменателя, используя предложение сл.2 §5. Имеем

$x^5-2x^3+2x^2-3x+2=(x-1)^2(x+2)(x^2+1)$. Тогда

$\dfrac{2x^4-10x^3+7x^2+4x+3}{x^5-2x^3+2x^2-3x+2}=\dfrac{\alpha}{x-1}+\dfrac{\beta}{(x-1)^2}+\dfrac{\gamma}{x+2}+\dfrac{\delta x+\lambda}{x^2+1}$.

Приводим в правой части к общему знаменателю и записываем равенство числителей: $2x^4-10x^3+7x^2+4x+3=\alpha(x-1)(x+2)(x^2+1)+\beta(x+2)(x^2+1)+\gamma(x-1)^2(x^2+1)+(\delta x+\lambda)(x-1)^2(x+2)$.

Так как многочлены равны, они принимают одинаковые значения при всех значениях x (в том числе комплексных, а также обращающих знаменатель дроби в нуль). Подставив $x=1$, получаем $6=6\beta$, и $\beta=1$. Подставив $x=-2$, получим $135=45\gamma$ и $\gamma=3$:

	2	-10	7	4	3
-2	2	-14	35	-66	135

Подставив $x = i$ (комплексное число), получим
$2i^4 - 10i^3 + 7i^2 + 4i + 3 = (\delta i + \lambda)(i-1)^2(i+2)$ и
$-2 + 14i = (-2i)(i+2)(\delta i + \lambda)$, откуда

$$\lambda + \delta i = \frac{-1+7i}{1-2i} = \frac{(-1+7i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-1-14+7i-2i}{5} = -3+i \text{ и}$$

$\lambda = -3$, $\delta = 1$. Наконец, подставив $x = 0$, получим $3 = -2\alpha + 2\beta + \gamma + 2\lambda$,
т.е. $2\alpha = 2 + 3 - 6 - 3$ и найдем $\alpha = -2$.

Итак, $$\frac{2x^4 - 10x^3 + 7x^2 + 4x + 3}{x^5 - 2x^3 + 2x^2 - 3x + 2} = -\frac{2}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} + \frac{3}{x+2} + \frac{x-3}{x^2+1}.$$