Глава IV. Многочлены

§ 3. Производная многочлена

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Определение

Пусть F – поле, $f \in F[x]$. *Производной* многочлена $f = \alpha_n x^n + \alpha_{n-1}x^{n-1} + \ldots + \alpha_1 x + \alpha_0$ называется многочлен $n\alpha_n x^{n-1} + (n-1)\alpha_{n-1}x^{n-2} + \ldots + \alpha_1$, обозначаемый через f'.
В частности, если $f = \alpha_0$, то $f' = 0$.

Это формальное определение совпадает с определением, даваемом в математическом анализе для многочленов из $\mathbb{R}[x]$. Из него очевидным образом следует, что

$$(f+g)' = f' + g';\ \ (\alpha f)' = \alpha f' \text{ для любого } \alpha \in F. \tag{1}$$

Докажем, что имеет место обычная формула дифференцирования произведения

$$(fg)' = f'g + fg'. \tag{2}$$

Сначала заметим, что $(x^m x^n)' = (x^{m+n})' = (m+n)x^{m+n-1}$ и $x^m(x^n)' + (x^m)'x^n = x^m n x^{n-1} + m x^{m-1} x^n = (m+n)x^{m+n-1}$, т.е. $(x^m x^n)' = x^m(x^n)' + (x^m)'x^n$ для любых натуральных m, n. Если $m = 0$ и $n > 0$ или $m > 0$ и $n = 0$, то также $(x^m x^n)' = (m+n)x^{m+n-1}$. Таким образом, для любых неотрицательных целых чисел m, n справедливо

$$(x^m x^n)' = x^m(x^n)' + (x^m)'x^n. \qquad (3)$$

Далее, пусть $f = \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k$ и $g = \sum\limits_{\ell=0}^{m} \beta_\ell x^\ell$. Тогда $f \cdot g = \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{\ell=0}^{m} \alpha_k \beta_\ell x^{k+\ell}$ и согласно (1) и (3) $(f \cdot g)' = \left(\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{\ell=0}^{m} \alpha_k \beta_\ell x^{k+\ell}\right)' = \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{\ell=0}^{m} \alpha_k \beta_\ell (x^{k+\ell})' =$ $\sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{\ell=0}^{m} \alpha_k \beta_\ell ((x^k)'x^\ell + x^k(x^\ell)') = \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{\ell=0}^{m} \alpha_k \beta_\ell (x^k)'x^\ell + \sum\limits_{k=0}^{n}\sum\limits_{\ell=0}^{m} \alpha_k \beta_\ell x^k(x^\ell)' =$ $\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k (x^k)' \sum\limits_{\ell=0}^{m} \beta_\ell x^\ell + \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \sum\limits_{\ell=0}^{m} \beta_\ell (x^\ell)' =$ $\left(\sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k\right)' \sum\limits_{\ell=0}^{m} \beta_\ell x^\ell + \sum\limits_{k=0}^{n} \alpha_k x^k \left(\sum\limits_{\ell=0}^{m} \beta_\ell x^\ell\right)' = f'g + fg'$. Таким образом, равенство (2) доказано.

Из формулы (2) по индукции выведем формулу для производной степени многочлена

$$(f^m)' = mf^{m-1}f'. \tag{4}$$

База индукции. При $m = 1$ формула получается из соглашения $f^0 = 1$.
При $m = 2$ имеем $(f^2)' = (f \cdot f)' = f'f + ff' = 2ff'$.
Шаг индукции. Предположим, что для всех $2 < m \leq n$ формула (4) справедлива. Имеем $(f^{n+1})' = (f \cdot f^n)' = f'f^n + f(f^n)' =$
$f'f^n + f(nf^{n-1}f') = f^nf' + nf^nf' = (n+1)f^nf'$. Таким образом, $(f^{n+1})' = (n+1)f^nf'$. Шаг индукции доказан.

Пусть f – многочлен степени n над полем F, $n \geq 1$ и пусть $\alpha \in F$. Очевидно, что имеет место равенство (называемое *разложением многочлена по степеням $x - \alpha$*)

$$f(x) = \lambda_0 + \lambda_1(x-\alpha) + \lambda_2(x-\alpha)^2 + \ldots + \lambda_n(x-\alpha)^n \tag{5}$$

для некоторых однозначно определенных элементов $\lambda_j \in F$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Чтобы найти значения λ_j, подставим в (5) вместо x элемент α, получим $\lambda_0 = f(\alpha)$. Затем продифферецируем равенство (5), получим

$$f'(x) = \lambda_1 + 2\lambda_2(x-\alpha) + \ldots + n\lambda_n(x-\alpha)^{n-1}. \tag{6}$$

Подставим в (6) вместо x элемент α, получим $\lambda_1 = f'(\alpha)$. Продолжая таким образом, получим (продифференцировав k раз) $f^{(k)}(x) =$ $= k!\lambda_k + (k+1)!\lambda_{k+1}(x-\alpha) + \ldots + n(n-1)\cdots(n-k+1)\lambda_n(x-\alpha)^{n-k}$, откуда, подставив вместо x элемент α, будем иметь $k!\lambda_k = f^{(k)}(\alpha)$ и $\lambda_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(\alpha)$. Теперь из (5) получается

Формула Тейлора для многочлена

$$f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + \frac{1}{2}f''(\alpha)(x-\alpha)^2 + \ldots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(\alpha)(x-\alpha)^n.$$

Напомним, что через $\mathrm{char}(F)$ обозначается характеристика поля F (см. сл.8 §6 гл.I).

Предложение

Пусть F – поле, $\mathrm{char}(F) = 0$ и $f \in F[x]$, p — неприводимый множитель многочлена f кратности k. Если $k = 1$, то p не делит f'. Если $k > 1$, то p – неприводимый множитель многочлена f' кратности $k - 1$.

$\Downarrow$Пусть $f = p^k g$, где $(p, g) = 1$.
Если $k = 1$, то $f' = (pg)' = p'g + pg'$. Так как $\deg(p') = \deg(p) - 1$, по определению неприводимого многочлена $(p, p') = 1$. Из $(p, g) = 1$, в силу утверждения 3 предложения сл.7 §2, следует, что $(p, p'g) = 1$.
Следовательно, p не делит f'.
Пусть $k > 1$. Тогда $k \neq 0$ в поле F, и
$f' = (p^k g)' = kp^{k-1}p'g + p^k g' = p^{k-1}(kp'g + pg')$. Поскольку p не делит $kp'g + pg'$, утверждение доказано.$\Uparrow$

Пусть F – поле, char$(F) = 0$. Рассмотрим многочлен f, разложенный на неприводимые множители согласно равенству (5) сл.13 §2:

$$f = \alpha p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_m^{k_m},$$

где α — старший коэффициент многочлена f, $p_1, p_2, \dots, p_m$ – все различные неприводимые над полем F делители многочлена f, имеющие старший коэффициент 1, $k_1, k_2, \dots, k_m$ – натуральные числа.
Из предложения сл.7 следует, что $(f, f') = p_1^{k_1-1} p_2^{k_2-1} \dots p_m^{k_m-1}$ (мы считаем, что многочлен в нулевой степени равен 1). Следовательно, многочлен $\frac{1}{\alpha} f/(f, f') = p_1 p_2 \dots p_m$ есть произведение первых степеней всех неприводимых множителей многочлена f. Применяя эти рассуждения к многочлену $f_1 = (f, f')$ в случае, когда его степень больше нуля, получим произведение первых степеней тех неприводимых множителей многочлена f, которые имеют кратности больше 1. Продолжая таким образом, получим произведения первых степеней тех неприводимых множителей многочлена f, которые имеют кратности больше s. Эта процедура называется *отделением кратных множителей многочлена f*.

Отделить кратные множители многочлена
$f = x^8 + 2x^7 + 5x^6 + 6x^5 + 8x^4 + 6x^3 + 5x^2 + 2x + 1.$

Решение. Вычислим $f' = 8x^7 + 14x^6 + 30x^5 + 30x^4 + 32x^3 + 18x^2 + 10x + 2$ и с помощью алгоритма Евклида найдем $(f, f') = x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$. При вычислениях можно заменять многочлены на ассоциированные, в частности, вместо производной взять многочлен $\frac{1}{2}f'$. Разделив столбиком f на (f, f'), найдем частное $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$. Таким образом, $f = (x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1)^2$, а произведение первых степеней всех неприводимых множителей многочлена f есть $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$, и каждый неприводимый множитель имеет кратность 2. Легко заметить, что $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1 = x^4 + x^3 + x^2 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 1)$, т.е. $f = (x^2 + 1)^2(x^2 + x + 1)^2$.