Глава III. Комплексные числа
§3. Тригонометрическая форма комплексного числа

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Геометрическая интерпретация комплексных чисел (1)

Зафиксируем на плоскости прямоугольную декартову систему координат. Комплексное число $a + bi$ будем изображать точкой плоскости с координатами (a, b). Тогда каждому комплексному числу будет соответствовать единственная точка на плоскости и, наоборот, каждой точке на плоскости будет соответствовать единственное комплексное число. Получается биекция множества $\mathbb{C}$ на множество всех точек плоскости.
Точки оси абсцисс и только они будут изображать действительные числа, а точки оси ординат и только они — числа вида bi, которые при $b \neq 0$ называются *чисто мнимыми*.
Начало координат соответствует числу 0.

Определение

Пусть комплексное число $z = a + bi$ изображается на плоскости точкой M (см. рис. 1 на следующем слайде). Тогда длина отрезка OM называется *модулем* числа z. Если $z \neq 0$, то угол между положительным направлением оси Ox и отрезком OM называется *аргументом* числа z. У числа 0 аргумент не определен. Модуль комплексного числа z обозначается через $|z|$, а аргумент — через $\arg(z)$.

На следующем рисунке $r = |z|$ и $\varphi = \arg(z)$.

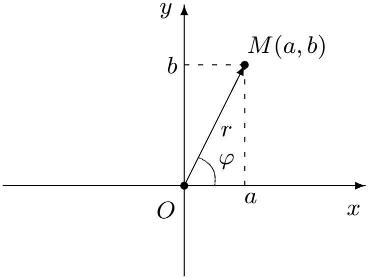

Рис. 1

Отметим, что для действительных чисел, рассматриваемых как комплексные, введенное только что понятие модуля совпадает с понятием модуля (абсолютной величины), известным из школьного курса. Аргумент комплексного числа определен неоднозначно, так как если φ — аргумент числа $a + bi$, то $\varphi + 2\pi k$ — также его аргумент при любом целом k. Комплексное число $z = a + bi$ можно представить и вектором $\overrightarrow{OM}$. Тогда сумме чисел будет сопоставлена сумма соответствующих векторов, так как координаты суммы векторов равны суммам соответствующих координат слагаемых.

Пусть r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$. Ясно, что $r=\sqrt{a^2+b^2}$, $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ и $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Следовательно,

$$a+bi=\sqrt{a^2+b^2}\cdot\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot i\right)=r(\cos\varphi+i\sin\varphi).$$

Определение

Если r — модуль, а φ — аргумент комплексного числа $a+bi$, то выражение $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ называется *тригонометрической формой записи* этого числа.

Любое комплексное число кроме нуля может быть записано в тригонометрической форме.

Определение

Если $z=x+iy$ – комплексное число, то по определению полагают $e^z=e^x(\cos y+i\sin y)$ (здесь e – основание натуральных логарифмов). В частности, $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$ и тригонометрическую форму комплексного числа можно записать в виде $re^{i\varphi}$.

О функции e^z. Тригонометрическая форма записи комплексных чисел (примеры)

В теории функций комплексного переменного доказывается, что $e^z = \lim\limits_{n\longrightarrow\infty} \left(1+\dfrac{z}{n}\right)^n$ для любого $z \in \mathbb{C}$.

1. Пусть $u = 1+i$, $r = |u|$ и $\varphi = \arg(u)$. Тогда, очевидно, $r = \sqrt{2}$, $\cos\varphi = 1/\sqrt{2}$ и $\sin\varphi = 1/\sqrt{2}$. Из двух последних равенств вытекает, что $\varphi = \pi/4$. Следовательно, тригонометрической формой записи числа $1+i$ будет $\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\big)$: $1+i = \sqrt{2}\big(\cos(\pi/4)+i\sin(\pi/4)\big)$.

2. Пусть $v = -1+\sqrt{3}i$, $\rho = |v|$ и $\psi = \arg(v)$. Тогда $\rho = 2$, $\cos\psi = -1/2$ и $\sin\psi = \sqrt{3}/2$. Значит, $\psi = 2\pi/3$. Тригонометрической формой записи числа v будет $2\big(\cos(2\pi/3)+i\sin(2\pi/3)\big)$.

Тригонометрическая форма комплексного числа определена неоднозначно — это вытекает из неоднозначности аргумента комплексного числа.

Умножение и деление комплексных чисел, записанных в тригонометрической форме

С помощью тригонометрической формы легко находятся произведение и частное от деления двух комплексных чисел. Пусть $z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$. Тогда

$$\begin{aligned}
z_1 z_2 &= r_1 r_2 (\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = \\
&= r_1 r_2 [(\cos\varphi_1\cos\varphi_2 - \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\cos\varphi_1\sin\varphi_2 + \sin\varphi_1\cos\varphi_2)] = \\
&= r_1 r_2 \big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)(\cos\varphi_2 - i\sin\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1\big((\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 - \cos\varphi_1\sin\varphi_2)\big)}{r_2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2)} = \\
&= \frac{r_1}{r_2}\big(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\big).
\end{aligned}$$

Мы видим, что:

модуль произведения двух комплексных чисел равен произведению их модулей, а аргумент произведения равен сумме аргументов;
модуль частного от деления z_1 на z_2 равен частному от деления модуля z_1 на модуль z_2, а аргумент частного — разности аргументов z_1 и z_2.

Формулы для произведения и частного комплексных чисел в тригонометрической форме полностью согласуются с представлением $z = re^{i\varphi}$:
$(r_1e^{i\varphi_1})(r_2e^{i\varphi_2}) = (r_1r_2)(e^{i\varphi_1}e^{i\varphi_2}) = r_1r_2e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$;
$\dfrac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \dfrac{r_1}{r_2}(e^{i\varphi_1}e^{-i\varphi_2}) = \dfrac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$.

Предложение

Для любых комплексных чисел z_1, z_2 справедливо неравенство $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$.

$\Downarrow$При геометрическом представлении комплексных чисел векторами на плоскости сумма комплексных чисел $z_1 + z_2$ изображается вектором, равным сумме векторов, изображающих z_1 и z_2. Если сложить последние два вектора по правилу треугольников, то получится вектор, соответствующий их сумме $z_1 + z_2$. При этом длины векторов равны $|z_1|$, $|z_2|$, $|z_1 + z_2|$.

Если векторы, изображающие z_1 и z_2, неколлинеарны, то по свойству треугольника $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.

Если эти векторы сонаправлены, то $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2|$,
если они антинаправлены, то $|z_1 + z_2| < |z_1| + |z_2|$.$\Uparrow$

Используя результат о произведении комплексных чисел в тригонометрической форме, по индукции докажем, что

$$\big(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \tag{1}$$

для любого натурального n. База индукции: $n = 1$. Утверждение очевидно. Шаг индукции. Пусть утверждение доказано при $n = k - 1$, т.е. $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{k-1} = r^{k-1}(\cos(k-1)\varphi + i\sin(k-1)\varphi)$. Тогда $(r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^k = (r(\cos\varphi + i\sin\varphi))^{k-1}(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) =$ $(r^{k-1}(\cos(k-1)\varphi + i\sin(k-1)\varphi))(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)) =$ $r^{k-1+1}(\cos(k-1+1)\varphi + i\sin(k-1+1)\varphi) = r^k(\cos k\varphi + i\sin k\varphi)$. Таким образом,

при возведении комплексного числа в натуральную степень его модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени.

При $r = 1$ из формулы (1) получается равенство, известное как *формула Муавра*:

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi.$$

Применение формулы Муавра

Формула Муавра оказывается удобным средством для преобразования тригонометрических выражений. Продемонстрируем это на следующем примере: выразить $\cos 5\varphi$ и $\sin 5\varphi$ через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$. Будем исходить из равенства

$$\cos 5\varphi + i\sin 5\varphi = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^5,$$

которое получено из формулы Муавра при $k = 5$. Правую его часть преобразуем по формуле бинома Ньютона:

$$\begin{aligned}(\cos\varphi + i\sin\varphi)^5 &= \cos^5\varphi + 5i\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi - \\ &- 10i\cos^2\varphi\sin^3\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi + i\sin^5\varphi = \\ &= (\cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi) + \\ &+ (5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi)i.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\cos 5\varphi &= \cos^5\varphi - 10\cos^3\varphi\sin^2\varphi + 5\cos\varphi\sin^4\varphi, \\ \sin 5\varphi &= 5\cos^4\varphi\sin\varphi - 10\cos^2\varphi\sin^3\varphi + \sin^5\varphi.\end{aligned}$$

Определение

Пусть n — натуральное число. *Корнем степени n из комплексного числа z* называется комплексное число w такое, что $w^n = z$.
Множество всех корней степени n из комплексного числа z обозначается через $\sqrt[n]{z}$.

Если $z = 0$, то, очевидно, для любого натурального n существует ровно один корень n-й степени из z, равный нулю. Пусть теперь $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ и $z \neq 0$. Корень степени n из z будем искать тоже в тригонометрической форме. Пусть $w = q(\cos\psi + i\sin\psi)$ и $w^n = z$. Тогда, в силу формулы (1),

$$q^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Получаем равенства $q^n = r$ и $n\psi = \varphi + 2\pi k$, где k — некоторое целое число. Поскольку q и r — положительные действительные числа, это означает, что q — арифметический корень степени n из числа r. Для аргумента числа w справедливо равенство $\psi = (\varphi + 2\pi k)/n$. В частности, мы видим, что корень n-й степени из числа z всегда существует.

Извлечение корней из комплексных чисел (2)

Выясним, сколько значений может иметь корень из комплексного числа. Как мы видели, все корни n-й степени из числа z задаются формулой

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \tag{2}$$

где k — целое число. Ясно, что $w_k = w_\ell$ тогда и только тогда, когда $\dfrac{\varphi+2\pi k}{n} = \dfrac{\varphi+2\pi\ell}{n} + 2\pi m$ при некотором целом m. Последнее равенство равносильно равенству $\dfrac{k-\ell}{n} = m$. Иными словами, числа w_k и w_ℓ совпадают тогда и только тогда, когда разность $k-\ell$ нацело делится на n. Таким образом, чтобы получить все различные значения корня, достаточно в формуле (2) взять n последовательных значений k, например, последовательно приравнивать k к $0, 1, \ldots, n-1$. Мы доказали, что существует ровно n различных значений корня степени n из произвольного ненулевого комплексного числа z, которые вычисляются по формуле

$$w_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right), \quad \text{где } k = 0, 1, \ldots, n-1. \tag{3}$$

При этом $\sqrt[n]{z} = \{w_0, \ldots, w_{n-1}\}$.

Извлечение корней из комплексных чисел (пример)

На комплексной плоскости корни n-й степени из z расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в точке 0 в вершинах правильного n-угольника, одна из вершин которого расположена в точке $\sqrt[n]{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{n}+i\sin\dfrac{\varphi}{n}\right)$.

Рассмотрим пример: найти корни четвертой степени из числа $1+i$. Модуль этого числа равен $\sqrt{2}$, аргумент равен $\pi/4$. Согласно формуле (3) имеем

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{4}\right),$$

где $k=0,1,2,3$. Получаем четыре значения корня:

$$\text{при } k=0: \quad w_0=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right),$$

$$\text{при } k=1: \quad w_1=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right),$$

$$\text{при } k=2: \quad w_2=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right),$$

$$\text{при } k=3: \quad w_3=\sqrt[8]{2}\left(\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right).$$

Определение

Корнем степени n из единицы называется комплексное число ε такое что $\varepsilon^n = 1$.

Положим $\varepsilon_{n,k} = \cos \frac{2\pi k}{n} + i \sin \frac{2\pi k}{n}$. Так как $1 = \cos 0 + i \sin 0$, имеем $\sqrt[n]{1} = \{\varepsilon_{n,k} | k = 0, 1, \dots, n-1\}$ – множество всех корней n-й степени из 1.
На комплексной плоскости корни n-й степени из 1 расположены на окружности радиуса 1 с центром в точке 0 в вершинах правильного n-угольника, одна из вершин которого расположена в точке 1.
Легко видеть, что для любого ненулевого комплексного числа z и для любого $x \in \sqrt[n]{z}$ справедлива формула $\sqrt[n]{z} = x \sqrt[n]{1}$.

Определение

Комплексное число ε называется *первообразным корнем* степени n из единицы, если $\varepsilon^n = 1$ и $\varepsilon^m \neq 1$ для всех $1 \leq m < n$.

Очевидно, что $\varepsilon_{n,1}$ – первообразный корень степени n из единицы, так как $\varepsilon_{n,k} = \varepsilon_{n,1}^k$ при $k = 1, \dots, n-1$.

Следующее утверждение позволяет выделить первообразные корни степени n среди элементов множества $\sqrt[n]{1}$.

Теорема

Число $\varepsilon_{n,k} = \cos\dfrac{2\pi k}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k}{n}$ $(1 < k < n)$ является первообразным корнем степени n из единицы тогда и только тогда, когда числа k и n взаимно просты.

$\Downarrow$Пусть $\varepsilon_{n,k}$ является первообразным корнем степени n из единицы. От противного, предположим, что числа k и n не взаимно просты. Пусть $d = (n, k)$ – наибольший общий делитель, $n = n_1 d$, $k = k_1 d$. Имеем по формуле Муавра $\varepsilon_{n,k}^{n_1} = \cos\dfrac{2\pi k n_1}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k n_1}{n} =$ $\cos\dfrac{2\pi k_1 d n_1}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k_1 d n_1}{n} = \cos 2\pi k_1 + i\sin 2\pi k_1 = 1$. Так как $n_1 < n$, получаем противоречие.

Предположим, что числа k и n взаимно просты и $\varepsilon_{n,k}^{m} = 1$. Тогда $\cos\dfrac{2\pi k m}{n} + i\sin\dfrac{2\pi k m}{n} = 1$, откуда $\dfrac{2\pi k m}{n} = 2\pi q$ для некоторого целого числа q. Имеем $km = qn$, откуда в силу взаимной простоты k и n получаем, что n делит m. Следовательно, $\varepsilon_{n,k}^{r} \neq 1$ при $1 \leq r < n$ и $\varepsilon_{n,k}$ – первообразный корень степени n из единицы.$\Uparrow$

Вычислить $c_0 = \sum\limits_{0\leq k\leq n/2} (-1)^k C_n^{2k}$ и $c_1 = \sum\limits_{0\leq k\leq (n-1)/2} (-1)^k C_n^{2k+1}$.

Запишем $(1+i)^n$ по формуле бинома Ньютона и по формуле Муавра.

$(i+1)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} i^k C_n^k 1^{n-k} =$

$C_n^0 + iC_n^1 - C_n^2 - iC_n^3 + C_n^4 + iC_n^5 - C_n^6 - iC_n^7 + C_n^8 + \ldots = c_0 + ic_1$;

$1 + i = \sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big)$;

$(1+i)^n = \left(\sqrt{2}\big(\cos(\pi/4) + i\sin(\pi/4)\big)\right)^n = 2^{\frac{n}{2}}\big(\cos(n\pi/4) + i\sin(n\pi/4)\big)$.

Из равенства $c_0 + ic_1 = 2^{\frac{n}{2}}\big(\cos(n\pi/4) + i\sin(n\pi/4)\big)$ следует

$c_0 = 2^{\frac{n}{2}}\cos(n\pi/4)$, $c_1 = 2^{\frac{n}{2}}\sin(n\pi/4)$.

Тригонометрическую форму комплексных чисел можно применить для преобразования суммы неограниченного числа слагаемых в сумму небольшого фиксированного числа слагаемых (т.е. выполнять суммирование).

Преобразовать сумму $1+\sum_{k=2}^{n+1} k\cos(k-1)\varphi$ (φ – произвольное действительное число).

Положим
$S=1+\sum_{k=2}^{n+1} k\cos(k-1)\varphi = 1+2\cos\varphi+3\cos 2\varphi+\ldots+(n+1)\cos n\varphi$,
$z=\cos\varphi+i\sin\varphi$, $T=2\sin\varphi+3\sin 2\varphi+\ldots+(n+1)\sin n\varphi$. Тогда по формуле Муавра $S+iT=1+2(\cos\varphi+i\sin\varphi)+3(\cos 2\varphi+i\sin 2\varphi)+\ldots+(n+1)(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)=1+2z+3z^2+\ldots+(n+1)z^n=U(z)$. Тогда $U(z)=(z+z^2+\ldots+z^{n+1})'$ есть производная от суммы геометрической прогрессии. Так как $z+z^2+\ldots+z^{n+1}=z\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}=\dfrac{z^{n+2}-z}{z-1}$, имеем по формуле дифференцирования дроби

$$U(z)=\left(\frac{z^{n+2}-z}{z-1}\right)'=\frac{((n+2)z^{n+1}-1)(z-1)-z^{n+2}+z}{(z-1)^2}=$$
$$=\frac{(n+1)z^{n+2}-(n+2)z^{n+1}+1}{(z-1)^2}.$$

Преобразуем $(z-1)^2$:
$(z-1)^2 = z^2 - 2z + 1 = \cos 2\varphi + i\sin 2\varphi - 2\cos\varphi - 2i\sin\varphi + 1$.Так как
$\cos 2\varphi - 2\cos\varphi + 1 = 2\cos^2\varphi - 2\cos\varphi = 2(\cos\varphi - 1)\cos\varphi$ и
$\sin 2\varphi - 2\sin\varphi = 2(\cos\varphi - 1)\sin\varphi$, получаем
$(z-1)^2 = 2(\cos\varphi - 1)(\cos\varphi + i\sin\varphi) = 2(\cos\varphi - 1)z = -4z\sin^2\frac{\varphi}{2}$.
Поскольку $z^{-1} = \overline{z}$, имеем $U(z) = -\dfrac{(n+1)z^{n+2} - (n+2)z^{n+1} + 1}{4z\sin^2\frac{\varphi}{2}} =$
$= \dfrac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)z^n - (n+1)z^{n+1} - \overline{z}) = \dfrac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) -$
$(n+1)(\cos(n+1)\varphi + i\sin(n+1)\varphi) - \cos\varphi + i\sin\varphi) = \dfrac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)\cos n\varphi -$
$(n+1)\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi) + i((n+2)\sin n\varphi - (n+1)\sin(n+1)\varphi + \sin\varphi)$.
Из $U(z) = S + iT$ получаем

$$S = \frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)\cos n\varphi - (n+1)\cos(n+1)\varphi - \cos\varphi)$$

и

$$T = \frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}((n+2)\sin n\varphi - (n+1)\sin(n+1)\varphi + \sin\varphi).$$

Пусть $z = \cos x + i\sin x$, где $x \in \mathbb{R}$. Тогда $z^{-1} = \overline{z} = \cos(-x) + i\sin(-x)$, и $z^m + z^{-m} = \cos mx + i\sin mx + \cos(-mx) + i\sin(-mx) = 2\cos mx$. С одной стороны, $(z+\overline{z})^n = 2^n\cos^n x$. С другой стороны, по биномиальной формуле Ньютона $(z+\overline{z})^n = (z+z^{-1})^n = \sum\limits_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k}z^{-k}$. Пусть $n = 2m$.

Из $C_{2m}^{m+k} = C_{2m}^{m-k}$ $(k = 0, 1, \dots, m-1)$ следует $\sum\limits_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k z^{2m-k}z^{-k} =$

$|j = 2m-k| = \sum\limits_{j=m-1}^{0} C_{2m}^j z^j z^{j-2m} = \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k z^{2k-2m}$. Значит,

$(z+\overline{z})^{2m} = \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k z^{2m-k}z^{-k} + C_{2m}^m z^m z^{-m} + \sum\limits_{k=m+1}^{2m} C_{2m}^k z^{2m-k}z^{-k} =$

$\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k (z^{2m-2k} + z^{2k-2m}) + C_{2m}^m = \sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k (2\cos 2(m-k)x) + C_{2m}^m$.

Таким образом, $2^{2m}\cos^{2m} x = 2\sum\limits_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k (\cos 2(m-k)x) + C_{2m}^m$, откуда

$$\cos^{2m} x = 2^{1-2m}\sum_{k=0}^{m-1} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + 2^{-2m}C_{2m}^m.$$

$$2^n \cos^n x = (z+\overline{z})^n = (z+z^{-1})^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k z^{n-k} z^{-k}.$$

Пусть $n = 2m+1$. Поскольку $C_{2m+1}^{m+k+1} = C_{2m+1}^{m-k}$ для $k = 0, 1, \ldots, m$, имеем

$$\sum_{k=m+1}^{2m+1} C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} = |j = 2m+1-k| = \sum_{j=m}^{0} C_{2m+1}^j z^j z^{j-2m-1} =$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k z^{2k-2m-1}.$$

Значит, $(z+\overline{z})^{2m+1} = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} =$

$$\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k (z^{2m+1-2k} + z^{2k-2m-1}) = \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k (2\cos(2(m-k)+1)x).$$

Таким образом, $2^{2m+1} \cos^{2m+1} x = 2\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2(m-k)+1)x$, откуда

$$\cos^{2m+1} x = 2^{-2m} \sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k \cos(2(m-k)+1)x.$$

Выражение $\sin^{2m} x$ через $\cos kx$

Пусть $z = \cos x + i\sin x$, где $x \in \mathbb{R}$. Тогда $z^{-1} = \overline{z} = \cos(-x) + i\sin(-x)$, и $z - \overline{z} = 2i\sin x$. Значит, $(z-\overline{z})^{2m} = 2^{2m} i^{2m} \sin^{2m} x = 2^{2m}(-1)^m \sin^{2m} x$. Далее, аналогично выкладкам предыдущего слайда, получаем $(z-\overline{z})^{2m} =$
$\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k z^{2m-k} z^{-k} + (-1)^m C_{2m}^m z^m z^{-m} + \sum\limits_{k=m+1}^{2m} (-1)^k C_{2m}^k z^{2m-k} z^{-k} =$
$\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k (z^{2m-2k} + z^{2k-2m}) + (-1)^m C_{2m}^m =$
$\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k (2\cos 2(m-k)x) + (-1)^m C_{2m}^m$. Таким образом,

$2^{2m}(-1)^m \sin^{2m} x = 2\sum\limits_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m}^k (\cos 2(m-k)x) + (-1)^m C_{2m}^m$, откуда

$$\sin^{2m} x = 2^{1-2m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} C_{2m}^k \cos 2(m-k)x + 2^{-2m} C_{2m}^m.$$

Выражение $\sin^{2m+1} x$ через $\sin kx$

Пусть $z = \cos x + i \sin x$, где $x \in \mathbb{R}$. Тогда $z^{-1} = \overline{z} = \cos(-x) + i\sin(-x)$, и $z - \overline{z} = 2i\sin x$.

Значит, $(z - \overline{z})^{2m+1} = 2^{2m+1} i^{2m+1} \sin^{2m+1} x = 2^{2m+1}(-1)^m i \sin^{2m+1} x$.

Далее, аналогично выкладкам предыдущего слайда, получаем

$$(z - \overline{z})^{2m+1} =$$

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} + \sum_{k=m+1}^{2m+1} (-1)^k C_{2m+1}^k z^{2m+1-k} z^{-k} =$$

$$\sum_{k=0}^{m} C_{2m+1}^k ((-1)^k z^{2m+1-2k} + (-1)^{2m+1-k} z^{2k-2m-1}) =$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m+1}^k (z^{2m+1-2k} - z^{2k-2m-1}) =$$

$$\sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m+1}^k 2i(\sin(2(m-k)+1)x).$$ Таким образом,

$$2^{2m+1}(-1)^m i \sin^{2m+1} x = 2i \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k C_{2m+1}^k \sin(2(m-k)+1)x,$$ откуда

$$\sin^{2m+1} x = 2^{-2m} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^{m-k} C_{2m+1}^k \sin(2(m-k)+1)x.$$