Глава III. Комплексные числа §2. Построение поля комплексных чисел. Алгебраическая форма

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Определение

Элементы множества $\mathbb{C} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ называются *комплексными числами*.

Напомним, что если $(a, b), (c, d) \in \mathbb{C}$, то $(a, b) = (c, d) \iff a = c$ и $b = d$.
На множестве $\mathbb{C}$ вводятся операции сложения и умножения по правилам
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$.

Теорема

Относительно введенных операций сложения и умножения множество комплексных чисел $\mathbb{C}$ является полем.

$\Downarrow$Положим $C = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$ и рассмотрим

отображение $\varphi : \mathbb{C} \longrightarrow C$, определенное так: $\varphi(a, b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Очевидно, что φ является биекцией $\mathbb{C}$ на множество матриц C. Ясно, что $\varphi((a, b) + (c, d)) = \varphi(a, b) + \varphi(c, d)$. Вычислим $\varphi(a, b) \cdot \varphi(c, d) =$
$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac - bd & ad + bc \\ -bc - ad & -bd + ac \end{pmatrix} = \varphi((a, b) \cdot (c, d))$.

Окончание доказательства

Мы видим, что операции сложения и умножения матриц на множестве C и операции сложения и умножения комплексных чисел обладают одинаковыми свойствами благодаря наличию биекции φ, сохраняющей эти операции. Поэтому достаточно убедиться, что множество матриц C является полем относительно операций сложения и умножения матрицами. Так как $\mathbb{R}^{2\times 2}$ является ассоциативным кольцом с единицей (сл.15 §2 гл.II), $O_{2\times 2}, E_2 \in C$ и $\forall A(A \in C \Rightarrow -A \in C)$, заключаем, что C является ассоциативным кольцом с единицей. Убедимся, что C – коммутативное кольцо. Для этого вычислим $\begin{pmatrix} c & d \\ -d & c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ca - db & cb + da \\ -da - cb & -db + ca \end{pmatrix}$. Сравнив с произведением $\varphi(a,b) \cdot \varphi(c,d)$, вычисленным выше, получаем требуемое. Осталось проверить, что каждый ненулевой элемент кольца C имеет обратный в C. Пусть $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \neq O$, т.е. $a \neq 0$ или $b \neq 0$. Тогда $|A| = \begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 > 0$ и матрица A является обратимой согласно теореме сл.38 §3 гл.II. По формуле сл.44 §3 гл.II имеем $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \in C$. Таким образом, если $(a,b) \neq (0,0)$, то $(a,b)^{-1} = \left(\dfrac{a}{a^2+b^2}, -\dfrac{b}{a^2+b^2} \right)$. Теорема доказана.⇑

Алгебраическая форма комплексного числа

Биекция одного поля на другое, сохраняющая операции сложения и умножения, называется *изоморфизмом*.

В частности, поле $\mathbb{C}$ изоморфно подполю C кольца матриц $\mathbb{R}^{n\times n}$. Комплексные числа вида $(a,0)$ ведут себя относительно операций сложения и умножения как действительные числа:

$$(a,0)+(b,0)=(a+b,0), (a,0)\cdot(b,0)=(ab,0).$$

Следовательно, имеется изоморфизм $a\mapsto(a,0)$ поля действительных чисел на подполе $\{(a,0)|a\in\mathbb{R}\}$ поля комплексных чисел. Поэтому комплексное число $(a,0)$ отождествляют с действительным числом a. Таким образом, выполняется включение $\mathbb{R}\subset\mathbb{C}$. Положим $i=(0,1)$. Тогда $(b,0)i=(0,b)$ и $i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)$. Каждый элемент поля $\mathbb{C}$ однозначно записывается в виде $(a,b)=(a,0)+(b,0)i$. Комплексное число (a,b) принято записывать в виде $a+bi$, где $i^2=-1$.

Определения

Алгебраической формой комплексного числа называется его запись в виде $a+bi$. Комплексное число i называется *мнимой единицей*. Действительное число a называется *действительной частью* числа $a+bi$, а действительное число b — *мнимой частью* числа $a+bi$.

Очевидно следующее

Наблюдение

Комплексные числа $a+bi$ и $c+di$ равны тогда и только тогда, когда $a=c$ и $b=d$, т.е. комплексные числа в алгебраической форме равны тогда и только тогда, когда равны их действительные части и мнимые части.

Заметим, что

$$(a+bi)+(c+di)=(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)(c+di)=(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)=(ac-bd)+(ad+bc)i$$

Иными словами,

сложение и умножение комплексных чисел в алгебраической форме осуществляется как сложение и умножение обычных многочленов с «неизвестным» i, при умножении дополнительно учитывается, что $i^2=-1$.

Заметим, что $a(c+di)=ac+adi$ для любых $a,c,d\in\mathbb{R}$.
Например, $(3-4i)(5+6i)=15-20i+18i-24i^2=39-2i$.

Комплексное сопряжение (1)

Определение

Если $x = a + bi$ — комплексное число, то число $a - bi$ называется *комплексно сопряженным к* x и обозначается через $\overline{x}$.

Свойства операции комплексного сопряжения

Если x и y — произвольные комплексные числа, то:

1) x — действительное число тогда и только тогда, когда $\overline{x} = x$;
2) $x + \overline{x}$ — действительное число;
3) $x \cdot \overline{x}$ — действительное число; более того, $x \cdot \overline{x} \geqslant 0$, причем $x \cdot \overline{x} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$;
4) $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$;
5) $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

В частности, отображение $z \longmapsto \overline{z}$ является изоморфизмом поля комплексных чисел на себя (так называемым *автоморфизмом* поля комплексных чисел).

$\Downarrow$Свойство 1 очевидно. Свойства 2 и 3 вытекают из того, что, как легко проверить, если $x = a + bi$, то $x + \overline{x} = 2a$ и $x \cdot \overline{x} = a^2 + b^2$. Свойство 4 проверяется простыми вычислениями. Для доказательства свойства 5 запишем $x = a + bi$, $y = c + di$ и вычислим
$\overline{x} \cdot \overline{y} = (a - bi)(c - di) = ac - bd - (ad + bc)i$,
$\overline{x \cdot y} = ac - db - (ad + bc)i = \overline{xy}$.$\Uparrow$

Свойство 3 можно использовать для того, чтобы найти алгебраическую форму числа вида $\dfrac{a + bi}{c + di}$. В самом деле, умножив числитель и знаменатель этой дроби на число, комплексно сопряженное к знаменателю, имеем

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)} = \frac{ac+bd+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2} \cdot i.$$

Например, $\dfrac{4-i}{1+2i} = \dfrac{(4-i)(1-2i)}{(1+2i)(1-2i)} = \dfrac{4-i-8i+2i^2}{1-4i^2} = \dfrac{2-9i}{5} = \dfrac{2}{5} - \dfrac{9}{5}i.$

Комплексные числа не упорядочиваемы согласованно с операциями сложения и умножения

Предложение

На поле $\mathbb{C}$ не существует бинарного отношения $>$ со свойствами

- если $z \in \mathbb{C}$, то выполняется в точности одно из условий $z > 0$, $z = 0$ или $z < 0$;
- $z > 0 \Leftrightarrow -z < 0$;
- если $u, v \in \mathbb{C}$, то из $u > 0$ и $v > 0$ следует $u + v > 0$ и $uv > 0$.

$\Downarrow$От противного, пусть такое отношение $<$ существует. Тогда если $z < 0$, то $-z > 0$. Для $z \in \mathbb{C}$ из $z \neq 0$ следует либо $z > 0$, либо $z < 0$. В обоих случаях $z^2 > 0$, так как $z^2 = zz = (-z)(-z)$. Следовательно, $i^2 > 0$ и, так как $1 = 1^2 > 0$, $0 = i^2 + 1 > 0$ – противоречие.$\Uparrow$

Таким образом, в отличие от поля действительных чисел, на поле комплексных чисел нельзя определить отношение линейного порядка, согласованное с операциями сложения и умножения.

Извлечение квадратного корня из комплексного числа, записанного в алгебраической форме

Как найти квадратный корень из комплексного числа, показывает следующее.

Предложение

Для любого комплексного числа $u \neq 0$ существуют два противоположных решения уравнения $z^2 = u$.

$\Downarrow$Пусть $u = a + bi$, $z = x + yi$, где $a, b, x, y \in \mathbb{R}$. Тогда $a + bi = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$, откуда получаем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & a, \\ 2xy & = & b. \end{cases} \qquad (1)$$

Рассмотрим два случая.

1. $b = 0$, т.е. $u = a \in \mathbb{R}$. Тогда из второго уравнения системы (1) следует $x = 0$ или $y = 0$. При $a > 0$ имеем $y = 0$ и $x^2 = a$, откуда $x = \pm\sqrt{a}$. Это обычное извлечение корня из положительного действительного числа. При $a < 0$ имеем $x = 0$ и $-y^2 = a$, откуда $y = \pm\sqrt{-a}$ и $z = \pm i\sqrt{-a}$. Так извлекается корень из отрицательного действительного числа.

Окончание доказательства

2. $b \neq 0$. Тогда $x, y \neq 0$. Возведем обе части каждого из уравнений системы (1) в квадрат и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = a^2 + b^2 \quad \text{или} \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2 + b^2.$$

Таким образом, $x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2}$, так как x, y – действительные числа. Прибавляя и вычитая к этому уравнению первое уравнение системы (1), получаем $x^2 = \dfrac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}$, $y^2 = \dfrac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}$. Следовательно,

$$x = \pm\sqrt{\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{2}}, y = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}.$$

Так как $xy = \frac{b}{2}$, по знаку x знак y определяется однозначно и мы получаем два противоположных решения уравнения $z^2 = u$.$\Uparrow$

Для комплексного числа u обозначение $\sqrt{u}$ применяется для множества из всех решений уравнения $z^2 = u$.

Найти $\sqrt{3-4i}$. Пусть $(x+yi)^2 = 3-4i$. Тогда
$3-4i = (x+yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & 3, \\ 2xy & = & -4. \end{cases} \qquad (2)$$

Найдём действительные решения этой системы. Возведем обе части каждого из этих уравнений в квадрат и рассмотрим сумму полученных равенств:

$$x^4 - 2x^2y^2 + y^4 + 4x^2y^2 = 25 \quad \text{или} \quad (x^2+y^2)^2 = 25.$$

Получаем, что $x^2 + y^2 = 5$ (ясно, что случай $x^2 + y^2 = -5$ невозможен, поскольку x и y — действительные числа). Отсюда и из первого уравнения системы (2) имеем $x^2 = 4$, $y^2 = 1$, откуда $x = \pm 2$ и $y = \pm 1$. Из второго уравнения системы (2) видно, что $xy < 0$. Поэтому мы получаем два решения: $x_1 = 2$, $y_1 = -1$ и $x_2 = -2$, $y_2 = 1$. Итак, мы нашли
$\sqrt{3-4i} = \{2-i, -2+i\}$.

Решить уравнение $z^2 + (2i - 7)z + 13 - i = 0$. Формула для корней квадратного уравнения $\alpha z^2 + \beta z + \gamma = 0$, где $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, имеет вид

$$z_{1,2} = \frac{-\beta + \sqrt{\beta^2 - 4\alpha\gamma}}{2\alpha}.$$

Почему перед корнем знак $+$?
$D = (2i - 7)^2 - 4(13 - i) = -4 - 28i + 49 - 52 + 4i = -7 - 24i$.
Находим $d_{1,2} = \sqrt{-7 - 24i}$: $(x + iy)^2 = -7 - 24i$; $x, y \in \mathbb{R}$;
$x^2 + 2xyi - y^2 = -7 - 24i$; $\begin{cases} x^2 - y^2 & = & -7, \\ 2xy & = & -24; \end{cases}$
$(x^2 - y^2)^2 + (2xy)^2 = 49 + 576 = 625$; $(x^2 + y^2)^2 = 625$;
$\begin{cases} x^2 - y^2 & = & -7, \\ x^2 + y^2 & = & 25; \end{cases}$ $2x^2 = 18$, $2y^2 = 32$, $x^2 = 9$, $y^2 = 16$;
$xy = -12$, x и y имеют разные знаки; $x_1 = 3$, $y_1 = -4$, $x_2 = -3$, $y_2 = 4$;
$d_1 = 3 - 4i$, $d_2 = -3 + 4i$.
Находим корни: $z_1 = \dfrac{7 - 2i + d_1}{2} = \dfrac{7 - 2i + 3 - 4i}{2} = 5 - 3i$;
$z_2 = \dfrac{7 - 2i + d_2}{2} = \dfrac{7 - 2i - 3 + 4i}{2} = 2 + i$.
Ответ: $z_1 = 5 - 3i$, $z_2 = 2 + i$.

3. Решить уравнение $z^2 = -8$.
Имеем $z_{1,2} = \pm i\sqrt{-(-8)} = \pm i\sqrt{8} = \pm 2i\sqrt{2}$.

4. Вычислить i^n для любого натурального числа n.
Вычисляем $i^2 = -1$, $i^3 = i^2 \cdot i = -i$, $i^4 = ((i)^2)^2 = 1$. Пусть $n \in \mathbb{N}$.
Разделим n на 4 с остатком: $n = 4q + m$, где $m \in \{0, 1, 2, 3\}$. Тогда
$i^n = i^{4q+m} = i^{4q} i^m = (i^4)^q i^m = i^m$.

Таким образом, $i^n = \begin{cases} 1, \ m = 0, n = 4q; \\ i, \ m = 1, n = 4q + 1; \\ -1, \ m = 2, n = 4q + 2; \\ -i, \ m = 3, n = 4q + 3. \end{cases}$