Глава II. Матрицы и определители
§3. Определители

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Перестановки и подстановки

Пусть F – поле $\mathbb{R}$ или поле $\mathbb{C}$. Для определения понятия определителя *квадратной* матрицы $A \in F^{n\times n}$ нам потребуются перестановки и подстановки на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.

Определения

Перестановкой множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется любой кортеж $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$, где $\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Множество всех перестановок множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим через S_n.
Подстановкой на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ называется любая биекция этого множества на себя.

Любой подстановке φ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ можно сопоставить единственную матрицу $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, где $\varphi(m) = i_m$, $m = 1, 2, \ldots, n$, т.е. $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – некоторая перестановка на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$. Мы получаем биекцию между множеством S_n и множеством всех подстановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$.
Очевидно, что при любой перестановке столбцов в матрице $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ подстановки φ получается матрица, определяющая указанным выше образом ту же самую подстановку φ.

Транспозиции в перестановках

Определение

Говорят, что перестановка $(j_1, j_2, \ldots, j_n)$ получается из перестановки $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ *транспозицией* символов i_p и i_q, если $j_m = i_m$ при $m \notin \{p, q\}$ и $j_p = i_q$, $j_q = i_p$. Транспозиция называется *смежной*, если $q = p + 1$.

Теорема

Все $n!$ элементов множества перестановок S_n можно расположить в виде последовательности так, что каждая последующая перестановка получается из предыдущей с помощью одной транспозиции. При этом начать можно с любой перестановки.

$\Downarrow$ Используем индукцию по n. При $n = 2$ утверждение очевидно. Предположим, что для всех $1 \leq m < n$ требуемое доказано. Запишем любую перестановку $(i_1, i_2, \ldots, i_n)$. Применяя предположение индукции к перестановке $(i_2, \ldots, i_n)$, получим расположение $(n-1)!$ перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ с первым элементом i_1. В последней перестановке $(i_1, j_2, \ldots, j_n)$ сделаем транспозицию символов i_1 и j_2 и снова применим предположение индукции. В последней перестановке этого расположения сделаем транспозицию первого элемента с элементом, отличным от i_1. Продолжая этот процесс, за n шагов получим требуемое.$\Uparrow$

Определение

Говорят, что элементы i_p, i_q образуют *инверсию* в перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_n)$, если $p < q$ и $i_p > i_q$. Количество инверсий в перестановке $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ обозначим через $I(i_1, i_2, \dots, i_n)$.

Например, $I(3,5,6,1,2,4) = 2+3+3 = 8$.

Определение

Перестановка $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ называется *четной* [*нечетной*], если $I(i_1, i_2, \dots, i_n)$ – четное [нечетное] число.

Теорема

Одна транспозиция меняет четность перестановки.

$\Downarrow$ Утверждение теоремы очевидно для смежной транспозиции. Предположим, что в транспозиции переставляются элементы i_p и i_q, где $p < q$. Тогда эту транспозицию можно осуществить с помощью $q - p$ смежных транспозиций, переставив i_p на место q-го элемента и затем с помощью $q - p - 1$ смежных транспозиций переставить i_q на место p-го элемента. Таким образом, четность перестановки изменяется нечетное число раз.$\Uparrow$

Из теорем сл.3 и 4 получается такое

Следствие

Количество четных перестановок в множестве S_n равно количеству нечетных перестановок и равно $\dfrac{n!}{2}$.

Рассмотрим подстановку φ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, которой соответствует матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$. Переставляя столбцы этой матрицы, получаем матрицу $\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \ldots & s_n \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_n \end{pmatrix}$. В силу теорем сл.3 и 4 сумма $I(s_1, s_2, \ldots, s_n) + I(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ сохраняет четность при любой перестановке столбцов матрицы.

Определение

Подстановка φ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$, которой соответствует матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, называется *четной* [*нечетной*], если $I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ – четное [нечетное] число.

Анализ формул для определителей малых порядков. Определение определителя порядка n

В формуле $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ знак слагаемого $a_{1i}a_{2j}$ зависит от четности перестановки (i, j) вторых индексов: $I(1,2) = 0$, $I(2,1) = 1$.
Аналогично, в формуле для определителя третьего порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

знак слагаемого $a_{1i}a_{2j}a_{3k}$ зависит от четности перестановки (i, j, k) вторых индексов: $I(1,2,3) = 0$, $I(2,3,1) = 2$, $I(3,1,2) = 2$, $I(2,1,3) = 1$, $I(3,2,1) = 3$, $I(1,3,2) = 1$.
Пусть F – поле, $A \in F^{n\times n}$. Перестановку $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ на множестве $\{1, 2, \ldots, n\}$ обозначим через σ. Обобщив формулы для определителей порядка 2 и 3 на общий случай, получаем

Определение определителя порядка n

Определителем матрицы $A = (a_{ij})_{n\times n}$ называется элемент поля F, равный $\sum\limits_{\sigma\in S_n} (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\ldots a_{n\sigma_n}$.

Обозначения определителя порядка n и дополнительные замечания

Развернутое обозначение определителя: $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$.

Обозначение определителя как функции от матрицы: $|A|$ или $\det(A)$.

Определитель матрицы порядка n представляет собой сумму $n!$ слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение $a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\dots a_{n\sigma_n}$ элементов матрицы, взятых по одному из каждой ее строки и каждого столбца, если перестановка σ четная, и $-a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\dots a_{n\sigma_n}$, если перестановка σ нечетная.

Знак при произведении $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\dots a_{i_nj_n}$, где $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$ – подстановка, определяется четностью этой подстановки (минус если подстановка нечетная).

Развернутая запись определителя похожа на запись матрицы, но разница между ними существенная. Элементы матрицы определителя называются его *элементами*. Аналогично можно говорить о *строках* или *столбцах* определителя. Порядок матрицы определителя называют *порядком* определителя.

Определитель первого порядка равен своему единственному элементу.

Свойство 1

Имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \ldots & a_{in}+b_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i1} & a_{i2} & \ldots & a_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{i1} & b_{i2} & \ldots & b_{in} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для доказательства запишем правую часть по определению: $\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\ldots(a_{i\sigma_i}+b_{i\sigma_i})\ldots a_{n\sigma_n}$. Раскрывая скобки и переставляя слагаемые, получаем
$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\ldots a_{i\sigma_i}\ldots a_{n\sigma_n}+$
$+\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\ldots b_{i\sigma_i}\ldots a_{n\sigma_n}$, последнее выражение совпадает с правой частью требуемого равенства.

Свойство однородности определителя относительно строки

Свойство 2

Общий множитель всех элементов одной строки определителя можно вынести за знак определителя, т.е. имеет место равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \dots & \lambda a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Доказательство получается с помощью равенства
$\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\dots(\lambda a_{i\sigma_i})\dots a_{n\sigma_n} =$
$\lambda(\sum_{\sigma\in S_n}(-1)^{I(\sigma)}a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\dots a_{i\sigma_i}\dots a_{n\sigma_n})$.

Из свойства 2 непосредственно вытекает

Свойство 3

Определитель матрицы, содержащей нулевую строку, равен нулю.

Определитель с двумя одинаковыми строками

Свойство 4

Определитель матрицы, имеющей две одинаковые строки, равен нулю.

$\Downarrow$Пусть матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ имеет совпадающие строки: $a_{ij} = a_{mj}$ для $j = 1, 2, \ldots, n$, $1 \le i < m \le n$. Рассмотрим произвольное слагаемое определителя $|A|$ $u_\sigma = (-1)^{I(\sigma)} a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{i\sigma_i} \ldots a_{m\sigma_m} \ldots a_{n\sigma_n}$. Обозначим через τ перестановку, полученную из σ транспозицией элементов σ_i и σ_m. Тогда в силу теоремы сл.4 имеем $(-1)^{I(\sigma)} = -(-1)^{I(\tau)}$. Кроме того, по предположению получаем $a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{i\sigma_i} \ldots a_{m\sigma_m} \ldots a_{n\sigma_n} = a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \ldots a_{i\sigma_m} \ldots a_{m\sigma_i} \ldots a_{n\sigma_n} = a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \ldots a_{i\tau_i} \ldots a_{m\tau_m} \ldots a_{n\tau_n}$. Таким образом, слагаемое u_σ взаимно уничтожается в сумме, выражающей определитель $|A|$. Так как взято произвольное слагаемое определителя, требуемое доказано.$\Uparrow$

Дальнейшие свойства определителей

Из свойств 2 и 4 вытекает

Свойство 5

Определитель, имеющий две пропорциональные строки, равен нулю.

Из свойств 1 и 5 получается

Свойство 6

Если к элементам одной строки определителя прибавить элементы некоторой другой строки, умноженные на один и тот же элемент поля, то полученный определитель будет равен исходному.

Свойство 7

Если в определителе Δ поменять местами две строки, сохранив расположение остальных строк, то полученный определитель будет равен $-\Delta$.

Для доказательства заметим, что на основании свойств 3, 1 и 4

$$0 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1}+a_{j1} & a_{i2}+a_{j2} & \dots & a_{in}+a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{j1} & a_{j2} & \dots & a_{jn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(мы не выписываем после второго знака равенства определители с совпадающими строками), откуда следует требуемое.

Определитель транспонированной матрицы

Свойство 8

Пусть $A \in F^{n \times n}$. Тогда $|A^\top| = |A|$.

$\Downarrow$Пусть $A = (a_{ij})$. Тогда произведение элементов $a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} \dots a_{i_n j_n}$ матрицы A входит в качестве слагаемого в определители $|A|$ и $|A^\top|$ с одинаковым знаком, определяемым четностью подстановки $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \dots & i_n \\ j_1 & j_2 & \dots & j_n \end{pmatrix}$, откуда следует требуемое.$\Uparrow$

Из доказанного утверждения вытекает принцип "равноправия строк и столбцов" в определителе: для каждого свойства определителей, формулируемого в терминах строк, справедливо аналогичное свойство для столбцов. Таким образом, для столбцов определителя справедливы аналоги свойств 1-7.

Из свойств 2, 6, 7 получаем следующее утверждение.

Предложение 1

Пусть $A, B \in F^{n\times n}$ и матрица A получается из матрицы B с помощью конечного числа элементарных преобразований строк, то $|A| = 0$ тогда и только тогда, когда $|B| = 0$.

По аналогии с элементарными преобразованиями строк матрицы (см. сл.26 т.1) определяются элементарные преобразования столбцов. Применяя принцип "равноправия строк и столбцов" , получаем

Предложение 2

Пусть $A, B \in F^{n\times n}$ и матрица A получается из матрицы B с помощью конечного числа элементарных преобразований строк или столбцов (в любой последовательности), то $|A| = 0$ тогда и только тогда, когда $|B| = 0$.

Определитель треугольной матрицы

Определитель треугольной матрицы равен произведению элементов на ее главной диагонали.

В таком определителе единственное ненулевое слагаемое - это $a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$ (со знаком плюс).

Определитель единичной матрицы

Определитель единичной матрицы любого порядка равен единице.

Определитель матрицы, у которой выше или ниже побочной диагонали нули.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}.$$

В таком определителе единственное ненулевое слагаемое - это $a_{1n}a_{2,n-1}\dots a_{n1}$ со знаком $(-1)^{I(n,n-1,\dots,1)}$. Так как $I(n,n-1,\dots,1) =$ $= (n-1)+(n-2)+\dots+1 = \frac{n(n-1)}{2}$, получаем требуемое равенство.

Определения

Пусть $A \in F^{n\times n}$. *Минором* элемента a_{ij} $(1 \le i, j \le n)$ определителя $\det(A)$ порядка n называется определитель матрицы A' порядка $n-1$, полученной из матрицы A вычеркиванием i-й строки и j-го столбца. Обозначение: M_{ij}. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} в определителе $\det(A)$ порядка n называется $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Лемма

Если в определителе $\det(A)$ порядка n все элементы i-й строки кроме быть может a_{ij} равны 0, то $\det(A) = a_{ij} \cdot A_{ij}$.

$\Downarrow$Пусть $i = j = 1$. Тогда

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma\in S_n, \sigma_1=1} (-1)^{I(\sigma)} a_{11}a_{2\sigma_2}\dots a_{n\sigma_n} =$$

$$a_{11} \cdot \sum_{\sigma'=(\sigma_2,\dots,\sigma_n)} (-1)^{I(\sigma')} a_{2\sigma_2}\dots a_{n\sigma_n} = a_{11}M_{11} = a_{11}A_{11}.$$

В общем случае переместим элемент a_{ij} в левый верхний угол определителя, переставляя последовательно i-ю строку со всеми вышестоящими ($i-1$ перестановка строк), а затем j-й столбец переставим последовательно со всеми столбцами левее его ($j-1$ перестановка столбцов). Получим определитель $(-1)^{i-1+j-1}|A| = \begin{vmatrix} a_{ij} & 0 \\ * & M_{ij} \end{vmatrix} = a_{ij}M_{ij}$, откуда согласно доказанному выше $|A| = (-1)^{i+j-2}a_{ij}M_{ij} = a_{ij}A_{ij}$.$\Uparrow$

Свойство 9 (правило разложения определителя по строке)

Определитель равен сумме произведений элементов своей фиксированной строки на их алгебраические дополнения, т.е. имеет место равенство $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$.

$\Downarrow$Представим i-ю строку определителя $|A|$ в виде суммы n строк $(a_{i1}, 0, \ldots, 0) + (0, a_{i2}, \ldots, 0) + \ldots (0, 0, \ldots a_{in})$ и применим свойство аддитивности относительно строки (сл.8), а затем лемму: $|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$.$\Uparrow$

Применяя это утверждение к выражению $a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in}$ при $k \neq i$, заключаем, что оно равно определителю Δ, полученому из $|A|$ заменой i-й строки на k-ю.

Согласно свойству 4 $\Delta = 0$. Следовательно, получаем

Наблюдение

При $k \neq i$ имеет место равенство $a_{k1}A_{i1} + a_{k2}A_{i2} + \ldots + a_{kn}A_{in} = 0$, которое формулируется так: сумма произведений элементов строки определителя на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другой строки равна нулю.

По свойству 8 получаем

Свойство 9' (правило разложения определителя по столбцу)

Определитель равен сумме произведений элементов своего фиксированного столбца на их алгебраические дополнения, т.е. имеет место равенство $|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{jn}A_{jn}$.

Наблюдение

При $k \neq j$ имеет место равенство $a_{1k}A_{1j} + a_{2k}A_{2j} + \ldots + a_{nk}A_{nj} = 0$, которое формулируется так: сумма произведений элементов столбца определителя на алгебраические дополнения к соответствующим элементам другого столбца равна нулю.

Определения

Матрица $A \in F^{n\times n}$ называется *полураспавшейся*, если ее можно разбить на блоки так, что $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & Z \end{pmatrix}$, где $X \in F^{m\times m}$, $Y \in F^{m\times n-m}$, $U \in F^{n-m\times m}$, $Z \in F^{n-m\times n-m}$ и $U = O$ или $Y = O$. Если $U = O$ и $Y = O$, то матрица A называется *распавшейся*.

Теорема

Если $A = \begin{pmatrix} X & Y \\ U & Z \end{pmatrix}$ – полураспавшаяся матрица, то $|A| = |X| \cdot |Z|$.

$\Downarrow$Предположим, что $Y = O$ и применим индукцию по m — порядку матрицы X. При $m = 1$ требуемое следует из леммы сл.16. Предположим, что утверждение уже доказано для всех $k < m$ и пусть $k = m$. Разложим $|A|$ по 1-й строке: $|A| = a_{11}A_{11} + \ldots + a_{1m}A_{1m}$. Здесь $A_{1j} = (-1)^{1+j}M_{1j}(A)$ и по предположению индукции $M_{1j}(A) = M_{1j}(X)|Z|$. Далее,
$|X| = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}(X)$ и $|A| = \sum_{j=1}^{m} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}(A) =$
$\sum_{j=1}^{m} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}(X)\cdot|Z| = \left(\sum_{j=1}^{m} a_{1j}(-1)^{1+j}M_{1j}(X)\right)\cdot|Z| = |X|\cdot|Z|$.
Случай $U = O$ сводится к только что рассмотренному с помощью транспонирования в силу свойства 8.$\Uparrow$

Теорема

Пусть $A, B \in F^{n\times n}$. Тогда $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

$\Downarrow$Рассмотрим блочную матрицу $C = \begin{pmatrix} A & O \\ -E_n & B \end{pmatrix}$ и вычислим $|C|$ двумя способами. По теореме сл.19 имеем $|C| = |A| \cdot |B|$. С другой стороны, умножая j-й столбец на b_{jm} и последовательно прибавляя к $(n+m)$-му столбцу при всех $j = 1, \ldots, n$ для каждого $m = 1, \ldots, n$, получим

$$|C| = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & 0 & \ldots & 0 \\ -1 & \ldots & 0 & b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -1 & b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} & a_{11}b_{11} + \ldots + a_{1n}b_{n1} & \ldots & a_{11}b_{1n} + \ldots + a_{1n}b_{nn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} & a_{n1}b_{11} + \ldots + a_{nn}b_{n1} & \ldots & a_{n1}b_{1n} + \ldots + a_{nn}b_{nn} \\ -1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & \ldots & -1 & 0 & \ldots & 0 \end{vmatrix}.$$

Таким образом, $|C| = \begin{vmatrix} A & A \cdot B \\ -E_n & O \end{vmatrix}$. Для вычисления последнего определителя переставим строки с $(n+1)$-й по $(2n)$-ю последовательно со всеми вышестоящими так, чтобы они заняли места n первых строк (потребуется $n + n + \ldots + n = n^2$ перестановок строк): $\begin{vmatrix} A & A \cdot B \\ -E_n & O \end{vmatrix} =$ $(-1)^{n^2} \begin{vmatrix} -E_n & O \\ A & A \cdot B \end{vmatrix} = (-1)^{n^2} |-E_n||A \cdot B| = (-1)^{n+n^2} |A \cdot B| = |A \cdot B|$, так как показатель при -1 равен $n + n^2 = n(n+1)$ – четное число.$\Uparrow$

Утверждение сл.15 можно использовать для вычисления определителя произвольной матрицы. Из теоремы сл.30 т.1 следует, что произвольную квадратную матрицу A можно с помощью элементарных преобразований строк привести к верхнетреугольной матрице B. Свойства 2, 6, 7 и принцип равноправия строк и столбцов показывают, как связаны $|A|$ и $|B|$. Вычислив $|B|$ как определитель треугольной матрицы, можно найти и $|A|$.

Пример

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 5 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & -6 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 4 & -4 & 0 \\ 0 & -4 & -12 & 10 \end{vmatrix} = \frac{1}{8} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -9 & 4 \\ 0 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{9} \cdot \frac{1}{7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -63 & 28 \\ 0 & 0 & -63 & 54 \end{vmatrix} = \frac{1}{8 \cdot 9 \cdot 7} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & -5 & 4 \\ 0 & 0 & -63 & 28 \\ 0 & 0 & 0 & 26 \end{vmatrix} =$$

$$= \frac{1 \cdot (-4) \cdot (-63) \cdot 26}{8 \cdot 9 \cdot 7} = 13.$$

На первом шаге мы, воспользовавшись свойством 6, прибавили ко второй строке первую, умноженную на -1, к третьей – первую, умноженную на -2, а к четвертой – первую, умноженную на -3. На втором шаге умножили третью и четвертую строки на 4 и 2 соответственно и воспользовались свойством 2. На третьем шаге мы, вновь воспользовавшись свойством 6, прибавили к третьей строке вторую, умноженную на 1, а к четвертой – вторую, умноженную на -1. На четвертом шаге умножили третью и четвертую строки на 7 и 9 соответственно и воспользовались свойством 2. На пятом – прибавили к четвертой строке третью, умноженную на -1, еще раз использовав свойство 6, а на шестом – вычислили определитель треугольной матрицы.

Вычислим определитель $\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$. Первую строку прибавим ко второй, умножим первую строку на -2 и прибавим к третьей, вычтем первую строку из четвертой. Полученный определитель разложим по третьему столбцу. В определителе третьего порядка умножим вторую строку на -2 и прибавим к первой; полученный определитель разложим по первой строке и придем к определителю второго порядка. Получаем

$$\begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -3 & 7 & -1 & 4 \\ 5 & -9 & 2 & 7 \\ 4 & -6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$1 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = (-3) \cdot 3 = -9.$$

Реализованный в этом примере способ вычисления определителя называется *понижением порядка определителя*.

Рассмотрим примеры вычисления определителей порядка n.

1. Для данных чисел a, b вычислить следующий определитель порядка n:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}.$$

Преобразуем его, прибавив к 1-й строке последовательно 2-ю, 3-ю и все остальные, затем вынося из первой строки общий множитель $a + (n-1)b$ и прибавляя ко всем строкам, начиная со второй, первую строку, умноженную на $-b$. Наконец, воспользуемся правилом вычисления определителя треугольной матрицы.

Окончание примера 1

$$\begin{vmatrix} a+(n-1) & a+(n-1)b & a+(n-1)b & \dots & a+(n-1)b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix} =$$

$$= (a+(n-1)b)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & a-b & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a-b \end{vmatrix} = (a+(n-1)b)(a-b)^{n-1}.$$

2. Пусть n — натуральное число, $a_1, a_2 \dots, a_n$ — произвольные скаляры из поля F. *Определителем Вандермонда* называется следующий определитель порядка n:

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & a_3^{n-1} & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}. \tag{1}$$

Докажем, что при любом n определитель Вандермонда равен произведению всевозможных разностей $a_i - a_j$, где $1 \le j < i \le n$:

$$d = \prod_{1 \le j < i \le n} (a_i - a_j).$$

Воспользуемся индукцией по n.

Доказательство

При $n = 2$ очевидно, что $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = a_2 - a_1$. Пусть утверждение уже доказано для определителей Вандермонда порядка $n-1$. Преобразуем определитель (1) следующим образом: для каждого $k = n, n-1, \ldots, 2$ из k-й его строки вычтем $(k-1)$-ю, умноженную на a_1. Тогда

$$d = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \\ 0 & a_2 - a_1 & a_3 - a_1 & \ldots & a_n - a_1 \\ 0 & a_2^2 - a_1 a_2 & a_3^2 - a_1 a_3 & \ldots & a_n^2 - a_1 a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & a_2^{n-1} - a_1 a_2^{n-2} & a_3^{n-1} - a_1 a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-1} - a_1 a_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Разлагая полученный определитель по первому столбцу, мы получим определитель $(n-1)$-го порядка. Вынося из k-го столбца множитель $a_k - a_1$ при $k = 2, \ldots, n$, приходим к равенству

$$d = (a_2 - a_1)(a_3 - a_1) \cdots (a_n - a_1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_n \\ a_2^2 & a_3^2 & \ldots & a_n^2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_2^{n-2} & a_3^{n-2} & \ldots & a_n^{n-2} \end{vmatrix}. \qquad (2)$$

Последний множитель является определителем Вандермонда порядка $n-1$. Применяя предположение индукции, из формулы (2) получаем требуемое.

Из полученного результата следует

Предложение

Определитель Вандермонда порядка n, построенный на скалярах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, равен нулю тогда и только тогда, когда $a_j = a_k$ при некоторых $1 \leq j < k \leq n$, и определитель Вандермонда порядка n, построенный на различных скалярах $a_1, a_2, \ldots, a_n$, всегда отличен от нуля.

Определение обратимой матрицы см. на сл.27 т.2. Квадратная матрица называется *невырожденной*, если ее определитель отличен от нуля. Следующая теорема дает критерий обратимости матрицы.

Теорема

Матрица является обратимой тогда и только тогда, когда она невырожденная.

$\Downarrow$Пусть квадратная матрица A порядка n обратима. Тогда по определению существует матрица B такая, что $A \cdot B = B \cdot A = E_n$. По теореме сл.20, учитывая, что $|E_n| = 1$, имеем $1 = |A \cdot B| = |A||B|$, откуда непосредственно следует, что $|A| \neq 0$, т.е. матрица A является невырожденной.

Обратно, предположим, что квадратная матрица $A = (a_{ij})_{n\times n}$ порядка n невырожденная. Рассмотрим матрицу, составленную следующим образом из алгебраических дополнений элементов определителя $|A|$:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Она называется *присоединенной матрицей* матрицы A. Положим

$$B = \frac{1}{|A|}\tilde{A}$$

и покажем, что B является матрицей, обратной к A. В самом деле, используя утверждения сл.17 и 18, легко убедиться, что $A \cdot \tilde{A} = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk}\right)_{n\times n} = |A|E_n$, откуда в силу свойства 4 умножения матриц (сл.15 т.2) вытекает $A \cdot B = E_n$. Для проверки равенства $B \cdot A = E_n$ необходимо провести аналогичные рассуждения с использованием утверждений сл.18.$\Uparrow$

Формула для обратной матрицы

Из доказательства теоремы на сл.31 получается следующая формула для нахождения обратной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\tilde{A}.$$

Обоснование первого способа нахождения обратной матрицы

Следствие

Пусть A — квадратная матрица порядка n, а матрица B такова, что $A \cdot B = E_n$. Тогда матрица A обратима, $B = A^{-1}$ и $B \cdot A = E_n$.

$\Downarrow$Из равенства $A \cdot B = E_n$, беря определители левой и правой части, получаем $|A \cdot B| = |E_n|$, откуда в силу теоремы сл.20 следует $|A||B| = 1$. Таким образом, $|A| \neq 0$ и матрица A – невырожденная. По теореме сл.31 она является обратимой. Поскольку обратная матрица A^{-1} является единственным решением матричного уравнения $A \cdot X = E_n$, заключаем, что $B = A^{-1}$. Равенство $B \cdot A = E_n$ теперь очевидно.$\Uparrow$

Это утверждение показывает, что матричное уравнение $A \cdot X = E_n$ либо имеет единственное решение, совпадающее с A^{-1}, либо не имеет решений. Таким образом, первый способ нахождения обратной матрицы полностью обоснован.

Определитель обратной матрицы

Пусть A – обратимая матрица. Из равенства $A \cdot A^{-1} = E$, вычисляя определители левой и правой части, выводим $|A||A^{-1}| = |E|$. Таким образом, $|A||A^{-1}| = 1$. Отсюда получаем формулу, связывающую определители обратимой матрицы A и ее обратной матрицы:

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Формула сл.33 дает еще один способ нахождения обратной матрицы (первый способ см. на сл.31 т.2). Этот способ особенно удобен для матриц второго порядка, так как можно выписать следующую формулу для обратной матрицы:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Пример обращения матрицы вторым способом

Для матриц порядка n указанный выше способ требует вычисления n^2 определителей порядка $n-1$, поэтому на практике для матриц порядка больше 3 он не применяется.

Рассмотрим пример обращения матрицы порядка 3 этим способом. Вычислим матрицу, обратную к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Сначала вычислим алгебраические дополнения к элементам первой строки определителя $|A|$:
$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 6$;
$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -4$. Находим определитель
$|A| = A_{11} + 2A_{12} + A_{13} = 3 \neq 0$, поэтому матрица A^{-1} существует (и единственна). Продолжаем вычисление алгебраических дополнений.
$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$;
$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$; $A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 4$;

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = -3;\ A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Запишем матрицу из алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix} -5 & 6 & -4 \\ 3 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Транспонируем эту матрицу:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -5 & 3 & 4 \\ 6 & -3 & -3 \\ -4 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Все элементы матрицы $\tilde{A}$ разделим на $\det(A) = 3$. Получим

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Напомним, что система линейных уравнений называется *крамеровской*, если число уравнений в ней равно числу неизвестных. Рассмотрим крамеровскую систему линейных уравнений в общем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{5}$$

Введем следующие определители для этой системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \ldots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n \end{vmatrix}.$$

Здесь Δ называется *главным определителем* крамеровской системы (5), а определитель Δ_i получается из Δ заменой i-го столбца столбцом свободных членов уравнений и называется *определителем при неизвестном* x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Следующее утверждение называется теоремой (или правилом) Крамера.

Теорема

Если главный определитель Δ крамеровской системы линейных уравнений отличен от нуля, то она является определенной и ее единственное решение есть $\left(\frac{\Delta_1}{\Delta}, \ldots, \frac{\Delta_n}{\Delta}\right)$.

$\Downarrow$Запишем крамеровскую систему в матричном виде:

$$Ax = b. \tag{6}$$

Пусть $\Delta \neq 0$. Так как $\Delta = |A|$, в силу критерия обратимости (сл.31) матрица A обратима. Матричное уравнение (6) имеет единственное решение $x = A^{-1}b$. Применяя для обратной матрицы формулу сл.33, имеем $x = \frac{1}{|A|}\tilde{A}b$. Расписывая это матричное равенство, получаем систему равенств

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{b_1 A_{11} + b_2 A_{21} + \ldots + b_n A_{n1}}{|A|}, \\ x_2 &= \frac{b_1 A_{12} + b_2 A_{22} + \ldots + b_n A_{n2}}{|A|}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n &= \frac{b_1 A_{1n} + b_2 A_{2n} + \ldots + b_n A_{nn}}{|A|}. \end{aligned}$$

Окончание доказательства

В знаменателях правых частей полученных равенств стоит определитель Δ, а в числителях — определители $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$, разложенные соответственно по первому, второму и так далее, n-му столбцу. Этим требуемое доказано.$\Uparrow$

В качестве приложения теоремы Крамера рассмотрим следующую важную задачу. Известны значения (вообще говоря, неизвестной) функции $f(x)$ в точках x_0, x_1, $\dots$, x_n: $f(x_0) = y_0$, $f(x_1) = y_1$, $\dots$, $f(x_n) = y_n$. Нужно *интерполировать* $f(x)$, т.е. построить *многочлен* $p(x)$ наименьшей возможной степени, принимающий в данных точках указанные значения.

Будем искать $p(x)$ в виде $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$. Условия $p(x_0) = y_0$, $p(x_1) = y_1$, $\dots$, $p(x_n) = y_n$ дают следующую систему линейных уравнений относительно коэффициентов $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$:

$$\begin{cases} a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \dots + a_nx_0^n = y_0 \\ a_0 + a_1x_1 + a_2x_1^2 + \dots + a_nx_1^n = y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_0 + a_1x_n + a_2x_n^2 + \dots + a_nx_n^n = y_n \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}.$$

Ее основная матрица – это матрица Вандермонда порядка $n + 1$. Так как определитель Вандермонда от $x_0, x_1, \dots, x_n$ отличен от 0, по теореме Крамера эта система имеет единственное решение.

Мы доказали такой факт:

Теорема об интерполяционном многочлене

Пусть $x_0, x_1, \ldots, x_n$ – попарно различные, а $y_0, y_1, \ldots, y_n$ – произвольные действительные числа. Существует и притом только один многочлен $p(x)$ степени не выше n, такой, что $p(x_i) = y_i$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$.

Отметим одно простое, но важное следствие.

В алгебре многочлены рассматривают как *формальные выражения*, и равенство двух многочленов $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ и $q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_kx^k$ означает, что эти выражения совпадают, т.е. $n = k$ и $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, ..., $a_n = b_n$.
В анализе многочлены над полем $\mathbb{R}$ рассматривают как *функции* $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, и равенство двух многочленов $p(x) \in \mathbb{R}$ и $q(x) \in \mathbb{R}$ означает, что $p(\alpha) = q(\alpha)$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Понятно, что каждый многочлен $p(x)$ определяет функцию $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ по правилу $\alpha \mapsto p(\alpha)$.

Следствие о многочленах как функциях

Многочлены с действительными коэффициентами равны тогда и только тогда, когда они равны как функции.

$\Downarrow$ Ясно, что одинаковые многочлены определяют одну и ту же функцию. Обратно, пусть $p(x)$ и $q(x)$ – многочлены степеней n и k соответственно, которые равны как функции.
Без ограничения общности можно считать, что $n \geq k$. Выберем попарно различные числа $x_0, x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$. По условию $p(x_i) = q(x_i)$ для всех $i = 0, 1, \ldots, n$. В силу теоремы многочлен степени не выше n однозначно определяется своими значениями в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$, откуда $p(x) = q(x)$.$\Uparrow$

Вычислить определитель $\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$ порядка n.

Обозначим указанный в условии определитель через Δ_n и разложим его по 1-й строке: $\Delta_n = (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha \begin{vmatrix} \beta & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$.

Второй определитель разложим по 1-му столбцу: $\begin{vmatrix} \beta & \alpha & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha+\beta & \alpha & \dots & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \beta\Delta_{n-2}$. Таким образом, получаем рекуррентное соотношение $\Delta_n = (\alpha+\beta)\Delta_{n-1} - \alpha\beta\Delta_{n-2}$.

Решим это соотношение. Составляем характеристическое уравнение (подставляем в соотношение x^n вместо Δ_n), получаем $x^n = (\alpha+\beta)x^{n-1} - \alpha\beta x^{n-2}$. Затем сокращаем на x^{n-2}, переносим все слагаемые в левую часть: $x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$. Это квадратное уравнение имеет корни $x_1 = \alpha$ и $x_2 = \beta$. Рассмотрим два возможных случая.

1. $\alpha \neq \beta$. В этом случае ищем Δ_n в виде $C_1\alpha^n + C_2\beta^n$, где C_1, C_2 – постоянные, не зависящие от n. Непосредственно вычисляем $\Delta_1 = \alpha+\beta$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha \\ \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix} = (\alpha+\beta)^2 - \alpha\beta = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2$. Записываем систему линейных уравнений: $\begin{cases} C_1\alpha + C_2\beta = \alpha+\beta, \\ C_1\alpha^2 + C_2\beta^2 = \alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2. \end{cases}$ Решая эту систему по правилу Крамера, получаем $C_1 = -\frac{\alpha}{\beta-\alpha}$, $C_2 = \frac{\beta}{\beta-\alpha}$. Таким образом, $\Delta_n = -\dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}\alpha^n + \dfrac{\beta}{\beta-\alpha}\beta^n = \dfrac{\beta^{n+1} - \alpha^{n+1}}{\beta-\alpha}$.

2. $\alpha = \beta$. В этом случае ищем Δ_n в виде $\alpha^n(C_1 + nC_2)$, где C_1, C_2 – постоянные, не зависящие от n. Непосредственно вычисляем $\Delta_1 = 2\alpha$ и $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2\alpha & \alpha \\ \alpha & 2\alpha \end{vmatrix} = 3\alpha^2$. Записываем систему линейных уравнений:
$\begin{cases} \alpha(C_1 + C_2) = 2\alpha, \\ \alpha^2(C_1 + 2C_2) = 3\alpha^2. \end{cases}$ Если $\alpha = 0$, то $\Delta_n = 0$. Пусть $\alpha \neq 0$. Тогда $C_1 + C_2 = 2$, $C_1 + 2C_2 = 3$, откуда $C_1 = C_2 = 1$. Таким образом, $\Delta_n = (n+1)\alpha^n$.