Глава II. Матрицы и определители
§2. Матрицы и действия над ними

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Определение

Напомним, что *матрицей размеров* $m \times k$ над множеством M называется прямоугольная таблица из элементов M, имеющая m строк и k столбцов. Элементы множества M, из которых состоит матрица, называются ее *элементами*.

Принято записывать матрицы размеров $m \times k$ в следующем виде:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mk} \end{pmatrix}. \qquad (1)$$

Кратко матрица (1) записывается в виде $A = (a_{ij})_{m \times k}$. Для указания размеров матрицы без обозначения элементов будем использовать обозначение $A_{m \times k}$.

Часто бывает удобно записывать элемент из i-й строки и j-го столбца матрицы A как $A[i, j]$.

Обозначать матрицы будем преимущественно заглавными латинскими буквами. Примеры матриц:

$$X = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \pi & 10 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{5} & \pi \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Z = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ \frac{1}{3} & \pi & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}.$$

При этом $X[2,3] = \pi$, $Y[1,2] = 2$, $Z[3,1] = -1$.

Определение

Матрицы $A_{m\times k}$ и $B_{n\times\ell}$ называются *равными*, если их размеры совпадают (т.е. $m=n$, $k=\ell$) и элементы, стоящие на соответствующих местах, также совпадают: $A[i,j]=B[i,j]$ при всех i,j, пробегающих независимо друг от друга значения $i=1,\ldots,m$ и $j=1,\ldots,k$.

Множество всех матриц размеров $m\times k$ с элементами из фиксированного поля F будем обозначать через $F^{m\times k}$.
Если в определенной матрице зафиксировать какие-либо строки и столбцы и рассмотреть матрицу, образованную элементами, стоящими на пересечении выделенных строк и столбцов, то полученная матрица называется *подматрицей* исходной матрицы. Например, на слайде 3 матрицы Y и Z являются подматрицами матрицы X.
Матрица $A_{m\times k}$ называется *строкой* [соответственно *столбцом*], если $m=1$ [соответственно $k=1$]. Строки и столбцы будем обозначать малыми буквами.

Типы матриц

Если матрица A имеет размеры $m \times m$, то ее называют *квадратной матрицей порядка* m и обозначают так: A_m. Множество всех квадратных матриц порядка n над полем F будем обозначать через $F^{n\times n}$.

Как отмечалось в §1, элементы $A[1,1], A[2,2], \dots, A[m,m]$ образуют главную диагональ квадратной матрицы A. Элементы $A[m,1], A[m-1,2], \dots, A[1,m]$ образуют ее *побочную диагональ*.

Мы говорим, что элемент $A[i,j]$ стоит ниже [соотв. выше] главной диагонали квадратной матрицы A_m, если $i > j$ [соотв. $i < j$]. Квадратная матрица называется *верхнетреугольной* [соотв. *нижнетреугольной*], если все ее элементы, стоящие ниже [соотв. выше] главной диагонали, равны 0.

Квадратная матрица называется *треугольной*, если она верхнетреугольная или нижнетреугольная. Квадратная матрица называется *диагональной*, если она верхнетреугольная и нижнетреугольная, т.е. все элементы вне главной диагонали равны 0. Квадратную матрицу порядка n с элементами $a_1, \dots, a_n$ на главной диагонали будем обозначать через $[a_1, \dots, a_n]$.

Квадратная матрица называется *скалярной*, если она диагональна и все элементы на главной диагонали одинаковы.

Скалярная матрица порядка n с элементами 1 на главной диагонали, как уже говорилось в §1, называется *единичной матрицей порядка* n и обозначается через E_n.

Рассмотрим линейные операции над матрицами: сложение матриц и умножение матрицы на скаляр. Напомним, что для краткости скалярами называются элементы поля.

Сложение определено только для матриц одинаковых размеров. *Суммой* матриц A и B из $F^{m\times k}$ называется матрица $C \in F^{m\times k}$, обозначаемая через $A+B$, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$C[i,j] = A[i,j] + B[i,j],\ i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,k.$

Например, $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 \\ 2 & -4 & 20 \\ 0 & 1 & 18 \end{pmatrix}$;

сумма $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 9 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ не определена.

Произведением матрицы $A_{m\times k}$ и скаляра t называется матрица таких же размеров, как матрица A, обозначаемая через $D = tA$, каждый элемент которой получается умножением соответствующего элемента матрицы A на скаляр t: $D[i,j] = tA[i,j], \ i = 1,\ldots,m; \ j = 1,\ldots,k$.

Например, $4\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 8 & 0 \\ 4 & -8 & 40 \\ -4 & 0 & 36 \end{pmatrix}$.

Для сложения матриц и умножения матрицы на скаляр выполняются следующие проверяемые очевидным образом свойства.

1. Для любых матриц A, B одинаковых размеров справедливо равенство $A + B = B + A$.

2. Для любых матриц A, B, C одинаковых размеров справедливо равенство $(A + B) + C = A + (B + C)$.

3. Существует матрица $O = O_{m\times k}$ размеров $m \times k$ такая, что для любой матрицы A таких же размеров справедливо равенство $A + O = A$.

4. Для любой матрицы $A_{m\times k}$ существует матрица B тех же размеров такая, что справедливо равенство $A + B = O_{m\times k}$.

5. Для любых матриц A, B одинаковых размеров и любого скаляра t справедливо равенство $t(A + B) = tA + tB$.

6. Для любой матрицы A и любых скаляров s, t справедливо равенство $(s + t)A = sA + tA$.

7. Для любой матрицы A и любых скаляров s, t справедливо равенство $s(tA) = (st)A = t(sA)$.

8. Для любой матрицы A справедливо равенство $1A = A$.

Обоснование свойств линейных операций

Свойства 1 и 2 следуют из соответствующих свойств сложения в поле. В свойстве 3 в качестве $O_{m\times k}$ следует взять матрицу размеров $m \times k$ с нулевыми элементами; такая матрица называется *нулевой*. В свойстве 4 в качестве B можно взять матрицу с элементами, противоположными элементам матрицы A; такая матрица называется *противоположной* матрице A. Свойства 5–8 обеспечиваются соответствующими свойствами поля (дистрибутивностью, ассоциативностью умножения).

Таким образом, $F^{m\times k}$ является абелевой группой относительно сложения матриц.

Заметим, что скалярная матрица порядка n с элементом a на главной диагонали может быть представлена как aE_n, где E_n — единичная матрица порядка n.

Пусть $A_1, \ldots, A_s$ — матрицы размеров $m \times k$, $t_1, \ldots, t_s$–некоторые скаляры. Матрица $t_1 A_1 + \ldots + t_s A_s$ называется *линейной комбинацией* матриц $A_1, \ldots, A_s$ с коэффициентами $t_1, \ldots, t_s$. Если матрица B равна линейной комбинации матриц $A_1, \ldots, A_s$ с некоторыми коэффициентами, то говорят, что B *линейно выражается* через указанные матрицы.

Обозначим через $\boldsymbol{e}^{i,j}_{m\times k}$ матрицу размеров $m \times k$, у которой все элементы равны нулю, за исключением элемента на пересечении i-й строки и j-го столбца, который равен единице. Такие матрицы называются *матричными единицами* размеров $m \times k$. Для матрицы $A = (a_{ij})_{m\times k}$ справедливо очевидное равенство

$$A_{m\times k} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} a_{ij}\boldsymbol{e}^{i,j}_{m\times k}. \qquad (2)$$

Это равенство показывает, что любая матрица размеров $m \times k$ линейно выражается через матричные единицы размеров $m \times k$.

Например,
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определим теперь умножение матриц.
Говорят, что размеры матриц $A_{m\times k}$ и $B_{n\times \ell}$ *согласованы*, если $k=n$, т.е. число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. В этом определении существен порядок матриц A, B: размеры A и B могут быть согласованы, а размеры B и A – не согласованы.

Произведение матриц $A\cdot B$ определено только тогда, когда размеры матриц $A_{m\times k}$ и $B_{n\times \ell}$ согласованы, и по определению $A\cdot B = C_{m\times \ell}$, где $C[i,j]=A[i,1]B[1,j]+A[i,2]B[2,j]+\ldots+A[i,k]B[k,j]$ для всех $i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,\ell$. Используя краткое обозначение для суммы, элемент c_{ij} можно записать в виде

$$C[i,j]=\sum_{r=1}^{k} A[i,r]B[r,j]. \tag{3}$$

Формула (3) дает выражение для произведения строки
$(A[i,1],A[i,2],\ldots,A[i,k])$ на столбец $\begin{pmatrix} B[1,j] \\ B[2,j] \\ \ldots \\ B[k,j] \end{pmatrix}$.

Примеры вычисления произведения матриц

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ 1 & 1 & 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 20 \\ 9 & 16 & 70 \\ 8 & 7 & 81 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ не определено;}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 6 \\ 4 & 8 & 8 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 9 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 14 \\ 63 & 54 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_2 \\ b_1 & b_3 & b_2 \\ c_1 & c_3 & c_2 \end{pmatrix};$$

$$\boldsymbol{e}^{i,j}_{k\times n} \cdot \boldsymbol{e}^{s,t}_{\ell\times m} = \begin{cases} \boldsymbol{e}^{i,t}_{k\times m}, & \text{если} \quad n=\ell \text{ и } j=s, \\ O_{k\times m}, & \text{если} \quad n=\ell \text{ и } j\neq s, \\ \text{не определено,} & \text{если} \quad n\neq\ell. \end{cases}$$

Мы видим, что умножение матриц *некоммутативно*, т.е. не для всех матриц справедливо равенство $A \cdot B = B \cdot A$. Кроме того, одно из этих произведений может быть определено, а другое – не определено.

Приведем свойства умножения матриц. Первое из них напоминает ассоциативность.
1. Для любых матриц A, B, C над полем F, если определено одно из произведений $(A \cdot B) \cdot C$ или $A \cdot (B \cdot C)$, то определено и другое, и справедливо равенство $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$.
$\Downarrow$Если произведение $(A \cdot B) \cdot C \in F^{m \times n}$ определено, то $A \cdot B \in F^{m \times \ell}$, $C \in F^{\ell \times n}$, и далее $A \in F^{m \times k}$, $B \in F^{k \times \ell}$. Следовательно, произведения $B \cdot C \in F^{k \times n}$ и $A \cdot (B \cdot C) \in F^{m \times n}$ также определены. Мы видим, что матрицы $(A \cdot B) \cdot C$ и $A \cdot (B \cdot C)$ имеют одинаковые размеры $m \times n$. Обратное утверждение получается аналогично.

Для доказательства поэлементного равенства матриц $(A \cdot B) \cdot C$ и $A \cdot (B \cdot C)$ необходимо воспользоваться изменением порядка суммирования в двойной сумме (см. сл.15 §2 гл.I): $\displaystyle\sum_{s=1}^{u} \sum_{t=1}^{v} x_{st} = \sum_{t=1}^{v} \sum_{s=1}^{u} x_{st}$.

Имеем для любых $i = 1, \ldots m$ и $j = 1, \ldots n$

$$((A \cdot B) \cdot C)[i,j] = \sum_{r=1}^{\ell} (A \cdot B)[i,r] C[r,j] = \sum_{r=1}^{\ell} \left(\sum_{s=1}^{k} A[i,s] B[s,r] \right) C[r,j] =$$

$$= \sum_{r=1}^{\ell} \sum_{s=1}^{k} A[i,s] B[s,r] C[r,j] = \sum_{s=1}^{k} \sum_{r=1}^{\ell} A[i,s] B[s,r] C[r,j] =$$

$$= \sum_{s=1}^{k} A[i,s] \left(\sum_{r=1}^{\ell} B[s,r] C[r,j] \right) = \sum_{s=1}^{k} A[i,s] (B \cdot C)[s,j] =$$

$$= (A \cdot (B \cdot C))[i,j].$$

Таким образом, требуемое равенство доказано.$\Uparrow$

В частности, умножение матриц является ассоциативной бинарной операцией на множестве $F^{n \times n}$ всех квадратных матриц порядка n над полем F.

Свойства умножения матриц 2

2. Для любых матриц $A_{m\times k}$, $B_{k\times l}$, $C_{k\times l}$ справедливо равенство $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$.

3. Для любых матриц $A_{m\times k}$, $B_{m\times k}$, $C_{k\times l}$ справедливо равенство $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$.

4. Для любых матриц $A_{m\times k}$, $B_{k\times l}$ и любого скаляра t справедливы равенства $(tA)\cdot B=t(A\cdot B)=A\cdot(tB)$.

5. Для любой матрицы $A_{m\times k}$ и единичных матриц E_k, E_m справедливы равенства $A\cdot E_k=E_m\cdot A=A$.

Эти свойства получаются из определения произведения матриц рассуждениями, аналогичными применявшимся при доказательстве свойства 1.

Мы видим, что совокупность $F^{n\times n}$ всех квадратных матриц порядка n над полем F является ассоциативным кольцом с единицей.

Получим матричную запись системы линейных уравнений в общем виде.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n = b_k. \end{cases} \tag{4}$$

Рассмотрим матрицу $A = (a_{ij})_{k\times n}$, состоящую из коэффициентов при неизвестных в этой системе (напомним, что она называется основной матрицей этой системы), столбец $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$ неизвестных и столбец $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix}$ свободных членов. Тогда система (4) записывается в матричном виде так:

$$A \cdot x = b. \tag{5}$$

Матрица $(A \mid b)$, полученная приписыванием к основной матрице системы линейных уравнений столбца ее свободных членов, была названа в §1 расширенной матрицей системы.

Рассмотрим квадратные матрицы порядка n. Их можно складывать и умножать, в частности возводить в степень с натуральным показателем. Пусть A – квадратная матрица порядка n и

$$f(x) = a_0 x^r + a_1 x^{r-1} + \ldots + a_{r-1} x + a_r$$

есть многочлен степени r. Значение многочлена от матрицы определяется так:

$$f(A) = a_0 A^r + a_1 A^{r-1} + \ldots + a_{r-1} A + a_r E_n.$$

Вот пример. Пусть $f(x) = x^2 - 3x + 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$. Тогда $f(A) =$ $A^2 - 3A + 4E_2 = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$.

Можно рассматривать и матричные многочлены вида

$$F(x) = A_0 x^r + A_1 x^{r-1} + \ldots + A_{r-1} x + A_r,$$

где $A_0, A_1, \ldots, A_r$ – фиксированные квадратные матрицы порядка n. Значение такого многочлена от квадратной матрицы B порядка n вычисляется по формуле

$$F(B) = A_0 \cdot B^r + A_1 \cdot B^{r-1} + \ldots + A_{r-1} \cdot B + A_r.$$

Рассмотрим пример. Пусть $F(x) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} x^2 - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Тогда

$$F(C) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^2 - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}.$$

Транспонирование матриц

Транспонированной к матрице A называется матрица, полученная из A заменой строк на столбцы. Она обозначается через $A^\top$. Если матрица A имеет размеры $m \times k$, то $A^\top$ имеет размеры $k \times m$ и

$$A^\top[i,j] = A[j,i] \ \ (i = 1, \ldots, k; j = 1, \ldots, m). \tag{6}$$

Рассмотрим примеры.

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 10 \\ -1 & 0 & 9 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & 10 & 9 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -6 & 20 \\ 9 & 16 & 70 \end{pmatrix}^\top = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -6 & 16 \\ 20 & 70 \end{pmatrix};$$

$$(a_1, a_2, \ldots, a_n)^\top = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Из определения операций над матрицами можно вывести следующие свойства, показывающие, как транспонирование взаимодействует с этими операциями.

1. Для любых матриц A, B одинаковых размеров справедливо равенство $(A+B)^\top = A^\top + B^\top$.

2. Для любой матрицы A и любого скаляра t справедливо равенство $(tA)^\top = tA^\top$.

3. Для любых матриц A, B согласованных размеров справедливо равенство $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$.

4. Для любой матрицы A справедливо равенство $(A^\top)^\top = A$.

Свойства 1, 2, 4 выводятся очевидным образом. Чтобы получить свойство 3, возьмем матрицы $A \in F^{m\times k}$ и $B \in F^{k\times n}$. Тогда $A \cdot B \in F^{m\times n}$, $A^\top \in F^{k\times m}$, $B^\top \in F^{n\times k}$, и $B^\top \cdot A^\top \in F^{n\times m}$, $(A \cdot B)^\top \in F^{n\times m}$. Далее,

$$(A \cdot B)^\top[i,j] = (A \cdot B)[j,i] = \sum_{s=1}^{k} A[j,s]B[s,i];$$

$$(B^\top \cdot A^\top)[i,j] = \sum_{s=1}^{k} B^\top[i,s]A^\top[s,j] = \sum_{s=1}^{k} B[s,i]A[j,s] = \sum_{s=1}^{k} A[j,s]B[s,i].$$

Таким образом, $(A \cdot B)^\top[i,j] = (B^\top \cdot A^\top)[i,j]$ для всех $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$ и равенство $(A \cdot B)^\top = B^\top \cdot A^\top$ доказано.

Определение

Матрица называется *симметрической*, если она совпадает со своей транспонированной.

Легко понять, что симметрическая матрица является квадратной и ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, совпадают.

Определение

Матрица A называется *кососимметрической*, если она противоположна к: своей транспонированной: $A^\top = -A$.

Легко понять, что кососимметрическая матрица A является квадратной и ее элементы, симметричные относительно главной диагонали, противоположны, т.е. $A[i,j] = -A[j,i]$ для всех $i,j = 1,2,\ldots,n$, где n – порядок A. Если A – кососимметрическая матрица над полем характеристики не равной 2, то $A[j,j] = 0$ для всех $i,j = 1,2,\ldots,n$, где n – порядок A.

Очевидно, что сумма двух [косо]симметрических матриц одного порядка и произведение [косо]симметрической матрицы на скаляр являются [косо]симметрическими матрицами.

Матричным уравнением мы будем называть уравнение одного из видов

$$A \cdot X = B \text{ или } X \cdot C = D, \tag{7}$$

где A, B, C, D – известные матрицы; X – неизвестная матрица. Разумеется, матрицы A и X в первом уравнении, X и C во втором должны быть согласованных размеров, а число строк в матрицах A и B, равно как и число столбцов в матрицах C и D, должно быть одинаковым. С помощью транспонирования обеих частей уравнения $X \cdot C = D$, получаем, что указанное уравнение равносильно следующему уравнению: $C^\top \cdot X^\top = D^\top$. Таким образом, достаточно научиться решать матричные уравнения вида $A \cdot X = B$.

Такие уравнения сводятся к нескольким системам линейных уравнений (число систем равно числу столбцов матрицы B) с одинаковой основной матрицей. Это легко усмотреть из матричной записи системы линейных уравнений. Удобно решать все системы одновременно с помощью метода Гаусса–Жордана. Если по крайней мере одна система оказывается несовместной, то матричное уравнение не имеет решения. Если все системы совместны и по крайней мере одна из них неопределенная, то матричное уравнение имеет более одного решения (бесконечное множество в случае бесконечного поля). Если все системы определенные, то матричное уравнение имеет единственное решение.

1. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$ над полем $\mathbb{R}$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица X имеет размеры 3×2, т.е. может быть записана с неопределенными элементами в виде

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix}.$$

Для отыскания неизвестных элементов имеем две системы линейных уравнений (для каждого из столбцов матрицы X) с одинаковой основной матрицей (A) и разными столбцами свободных членов (они образуют матрицу B). Для решения преобразуем расширенную матрицу, полученную приписыванием к матрице A матрицы B:

$$\left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & 2 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & 3 & 3 & 3 \end{array}\right) \sim$$
$$\sim \left(\begin{array}{rrr|rr} 1 & -1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Запишем по последней матрице матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},$$

равносильное исходному.
Отсюда получаются две системы линейных уравнений:
$\begin{cases} x_{11} - x_{21} = -1; \\ x_{21} + x_{31} = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_{12} - x_{22} = -2; \\ x_{22} + x_{32} = 1. \end{cases}$ Из них находим выражения элементов x_{11}, x_{31} матрицы X через x_{21}, а элементы x_{12}, x_{32} выражаем через x_{22}: $x_{11} = x_{21} - 1$, $x_{31} = -x_{21} + 1$, $x_{12} = x_{22} - 2$, $x_{32} = -x_{22} + 1$.
Значения элементов x_{21}, x_{22} можно выбирать произвольно.
Положим $x_{21} = a$, $x_{22} = b$. Таким образом, рассматриваемое матричное уравнение имеет бесконечное множество решений:

$$\left\{ \begin{pmatrix} a-1 & b-2 \\ a & b \\ -a+1 & -b+1 \end{pmatrix} \middle| a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Пример уравнения, не имеющего решений

2. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица X имеет размеры 2×2. Преобразуем матрицу

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

Мы видим, что системы для каждого из столбцов матрицы X несовместны, т.е. матричное уравнение не имеет решения.

3. Решить матричное уравнение $A \cdot X = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Неизвестная матрица X имеет размеры 2×2. Преобразуем матрицу

$$\left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rr|rr} 1 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 \end{array}\right).$$

Мы видим, что матричное уравнение имеет единственное решение $X = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Условие единственности решения

Легко проверить, что если при решении матричного уравнения $A \cdot X = B$ с квадратной матрицей A порядка n матрица $(A \mid B)$ элементарными преобразованиями строк приводится к виду $(E_n \mid C)$ с единичной матрицей слева, то матричное уравнение имеет единственное решение $X = C$.

Определение

Матрица A называется *обратимой*, если существует такая матрица B, и такое натуральное число n, что

$$A \cdot B = E_n, \quad B \cdot A = E_n. \tag{8}$$

Из определения произведения матриц легко следует, что если матрица A является обратимой, то она и матрица B должны быть квадратными матрицами порядка n. Таким образом, обратимая матрица является обратимым элементом кольца $F^{n\times n}$ (т.е. элементом, имеющим обратный элемент относительно умножения, см. сл.10 §4 гл.I).

Лемма

Для обратимой матрицы A существует единственная матрица B со свойствами (8).

⇓Допустим, что матрицы B_1 и B_2 таковы, что $A \cdot B_1 = E_n, \;\; B_1 \cdot A = E_n$ и $A \cdot B_2 = E_n, \;\; B_2 \cdot A = E_n$. Тогда, используя свойства 5 и 1 умножения матриц, а также последние равенства, имеем
$B_1 = B_1 \cdot E_n = B_1 \cdot (A \cdot B_2) = (B_1 \cdot A) \cdot B_2 = E_n \cdot B_2 = B_2$, т.е. $B_1 = B_2$, что и требуется доказать.⇑

Для обратимой матрицы A единственная матрица B, удовлетворяющая равенствам (8), называется *обратной к A* и обозначается через A^{-1}. Таким образом,

$$A \cdot A^{-1} = E_n, \;\; A^{-1} \cdot A = E_n. \tag{9}$$

Заметим, что утверждение леммы получается из предложения сл.5 §4 гл.I о единственности симметричного элемента, а обратная матрица является обратным элементом к исходной матрице в кольце квадратных матриц порядка n над полем F.

Свойства обратимых матриц

1. Если матрица A обратима и t–ненулевой скаляр, то матрица tA обратима и $(tA)^{-1} = \frac{1}{t}A^{-1}$.

2. Если матрицы A и B обратимые одного и того же порядка, то матрица $A \cdot B$ обратима и $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$.

Эти свойства непосредственно выводятся из определения обратимой матрицы и свойств умножения матриц.

3. Если матрица A порядка n обратима, а B, C – произвольные матрицы размеров $n \times k$, то из $A \cdot B = A \cdot C$ следует $B = C$.

$\Downarrow$Для доказательства умножим равенство $A \cdot B = A \cdot C$ слева на A^{-1}. Получим $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = A^{-1} \cdot (A \cdot C)$, откуда $(A^{-1} \cdot A) \cdot B = (A^{-1} \cdot A) \cdot C$ и $E_n \cdot B = E_n C$. Таким образом, $B = C$, что и требуется.$\Uparrow$

Аналогично доказывается следующее свойство.

4. Если матрица A порядка n обратима, а B, C – произвольные матрицы размеров $m \times n$, то из $B \cdot A = C \cdot A$ следует $B = C$.

5. Матрица A порядка n обратима тогда и только тогда, когда когда обратима транспонированная к ней матрица $A^\top$, и при этом $(A^{-1})^\top = (A^\top)^{-1}$.
$\Downarrow$Из $A \cdot A^{-1} = E_n$ следует $(A \cdot A^{-1})^\top = E_n^\top$, откуда по свойствам операции транспонирования выводим $(A^{-1})^\top \cdot A^\top = E_n$. Аналогично из $(A^{-1} \cdot A)^\top = E_n^\top$ получаем $A^\top \cdot (A^{-1})^\top = E_n$, откуда следует требуемое.$\Uparrow$

Не всякая квадратная матрица является обратимой. Очевидный пример – нулевая матрица порядка n при любом натуральном n. Если матрица A является обратимой, то матричное уравнение $A \cdot X = E_n$ имеет решение (ниже будет установлено, что единственное), которое является матрицей A^{-1}. Поэтому матрица $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$ не является обратимой, так как матричное уравнение $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ не имеет решений:

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \end{array} \right).$$

Таким образом, для нахождения обратной матрицы можно решить матричное уравнение $A \cdot X = E_n$. Получается первый способ нахождения обратной матрицы.

Чтобы выяснить, является ли квадратная матрица A обратимой и в случае положительного ответа найти обратную к ней матрицу, следует приписать справа к матрице A единичную матрицу такого же порядка и, используя элементарные преобразования строк полученной матрицы, попытаться привести матрицу, стоящую на месте матрицы A, к единичной. Если это удается, то матрица A является обратимой, и на месте единичной матрицы получается обратная к A матрица. В противном случае матрица A не является обратимой.

Пример

Применим этот алгоритм для нахождения обратной матрицы к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Имеем:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 6 & 0 & 7 & -3 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 0 & 0 & -5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 3 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/3 & 1 & 4/3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -4/3 & 1 & 2/3 \end{array}\right).$$

Следовательно,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix}.$$

Применение алгоритма

Если применить указанный алгоритм к любой матрице, то после приведения левой матрицы к ступенчатому виду может возникнуть одна из двух ситуаций:

- на главной диагонали левой подматрицы все элементы ненулевые (и тогда исходная матрица является обратимой, можно найти обратную матрицу);
- одна или несколько последних строк левой подматрицы нулевые (и тогда исходная матрица не является обратимой, преобразования следует прекратить).

Предложение

Если квадратная матрица A порядка n обратима и матрица B имеет n строк [столбцов], то матричное уравнение $A \cdot X = B$ $[X \cdot A = B]$ имеет единственное решение $X = A^{-1} \cdot B$ $[X = B \cdot A^{-1}]$.

$\Downarrow$Докажем первое утверждение, второе доказывается аналогично. Имеем $A \cdot (A^{-1} \cdot B) = (A \cdot A^{-1}) \cdot B = E_n \cdot B = B$, т.е. матрица $A^{-1} \cdot B$ есть решение уравнения $A \cdot X = B$. Пусть C – произвольное решение этого уравнения. Тогда $A \cdot C = B$. Умножая обе части этого равенства слева на A^{-1}, получаем $A^{-1} \cdot (A \cdot C) = A^{-1} \cdot B$. Отсюда $(A^{-1} \cdot A) \cdot C = A^{-1} \cdot B$ и $C = A^{-1} \cdot B$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

С помощью обратных матриц можно решать системы линейных уравнений, основная матрица которых обратимая. В самом деле, пусть $A \cdot X = B$ — такая система. Применяя предложение сл.35, получаем, что наша система имеет единственное решение, которое выражается формулой $X = A^{-1} \cdot B$.

Решим указанным способом систему линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 2, \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & -5 \\ 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 7. \end{array}\right. \tag{10}$$

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \text{ а } B = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Окончание примера

Матрица A^{-1} была вычислена выше. Используя формулу $X = A^{-1} \cdot B$, имеем

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -5/3 & 1 & 4/3 \\ 2 & -1 & -1 \\ -4/3 & 1 & 2/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, система (10) имеет единственное решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$.

Понятие блочной матрицы

Часто приходится рассматривать матрицы, разбитые на прямоугольные "клетки" или "блоки". Пусть $A = (a_{ij})_{m\times n}$ – матрица над полем F и $m = \sum_{k=1}^{s} m_k$, $n = \sum_{\ell=1}^{t} n_\ell$, где m_k, n_ℓ – натуральные числа. Разобъем матрицу A с помощью s горизонтальных и t вертикальных линий на блоки, которые являются матрицами $A_{k\ell}$ размеров $m_k \times n_\ell$:

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1t} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2t} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{s1} & A_{s2} & \dots & A_{st} \end{pmatrix}.$$

Определения

Будем говорить, что *матрица A представлена в виде блочной матрицы* и писать $A = (A_{k\ell})_{s\times t}$. Если $s = t$ и $A_{ij} = O$ при всех $i \neq j$, то блочная матрица A называется *квазидиагональной матрицей* и обозначается через $[A_{11}, A_{22}, \dots, A_{tt}]$.

Естественным образом определяется одинаковое разбиение на блоки для двух матриц совпадающих размеров.

Пусть $A = (A_{k\ell})_{s\times t}$, $B = (B_{k\ell})_{s\times t}$ – матрицы размеров $m \times n$, имеющие одинаковое разбиение на блоки.

Линейные операции над блочными матрицами

Сумма блочных матриц A и B через разбиение на блоки определяется естественным способом: $A + B = (A_{k\ell} + B_{k\ell})_{s\times t}$.
Аналогично определяется *произведение блочной матрицы на скаляр $t \in F$*: $tA = (tA_{k\ell})_{s\times t}$.

Для выяснения разбиения на блоки произведения двух блочных матриц предположим, что блочные матрицы $A = (A_{k\ell})_{s\times t}$ и $B = (B_{\ell p})_{t\times q}$ разбиты на блоки так, что количество t групп столбцов матрицы A и групп строк B одно и то же, и количество столбцов в блоке $A_{k\ell}$ матрицы A равно количеству строк в соответствующем блоке $B_{\ell p}$ матрицы B.

Произведение блочных матриц

В указанных предположениях *произведение* $A \cdot B = (C_{kp})_{s\times q}$, где $C_{kp} = \sum_{r=1}^{t} A_{kr} \cdot B_{rp}$ $(k = 1, \ldots, s,\ p = 1, \ldots, q)$.

Пусть $n = n_1 + n_2$, $A = (A_1 A_2) \in F^{m\times n}$, $A_1 \in F^{m\times n_1}$, $A_2 \in F^{m\times n_2}$, $B = \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \in F^{n\times d}$, $B_1 \in F^{n_1\times d}$, $B_2 \in F^{n_2\times d}$. Легко видеть, что

$$A[i,s] = \begin{cases} A_1[i,s], & \text{если } 1 \le s \le n_1 \\ A_2[i,s-n_1], & \text{если } n_1 < s \le n \end{cases}$$

и

$$B[s,j] = \begin{cases} B_1[s,j], & \text{если } 1 \le s \le n_1 \\ B_2[s-n_1,j], & \text{если } n_1 < s \le n. \end{cases}$$

Покажем, что $(A_1 A_2) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2$.

Для всех $1 \le i \le m$, $1 \le j \le d$ имеем

$$(A\cdot B)[i,j] = \sum_{s=1}^{n} A[i,s]\cdot B[s,j] = \sum_{s=1}^{n_1} A[i,s]\cdot B[s,j] + \sum_{s=n_1+1}^{n} A[i,s]\cdot B[s,j] =$$

$$\sum_{s=1}^{n_1} A_1[i,s]\cdot B_1[s,j] + \sum_{t=1}^{n_2} A_2[i,t]\cdot B_2[t,j] = (A_1\cdot B_1)[i,j] + (A_2\cdot B_2)[i,j].$$

Аналогично проверяется, что для любой матрицы $C \in F^{d\times m}$ справедливо $C \cdot (A_1 A_2) = (C\cdot A_1 \;\; C\cdot A_2)$ и для любой матрицы $D \in F^{n\times d}$ справедливо $\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} B_1\cdot D \\ B_2 \cdot D \end{pmatrix}$.

Продолжение доказательства

Индукцией по t докажем, что

$$(A_1 A_2 \ldots A_t) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_t \end{pmatrix} = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 + \ldots + A_t \cdot B_t.$$

База индукции $t = 2$ же доказана. Предположим, что утверждение уже доказано для всех $2 \leq t' < t$. Положим $L = (A_2 \ldots A_t)$, $R = \begin{pmatrix} B_2 \\ \vdots \\ B_t \end{pmatrix}$ и с помощью утверждения для $t = 2$ и предположения индукции получаем

$$(A_1 L) \cdot \begin{pmatrix} B_1 \\ R \end{pmatrix} = A_1 \cdot B_1 + L \cdot R = A_1 \cdot B_1 + A_2 \cdot B_2 + \ldots + A_t \cdot B_t.$$

Аналогично проверяется, что для любых матриц C и D подходящих размеров справедливо $C \cdot (A_1 A_2 \ldots A_t) = (C \cdot A_1 \; C \cdot A_2 \ldots C \cdot A_t)$ и

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \\ \vdots \\ B_t \end{pmatrix} \cdot D = \begin{pmatrix} B_1 \cdot D \\ B_2 \cdot D \\ \vdots \\ B_t \cdot D \end{pmatrix}.$$

Напомним, что блочные матрицы $A = (A_{k\ell})_{s\times t}$ и $B = (B_{\ell p})_{t\times q}$ разбиты на блоки так, что количество t групп столбцов матрицы A и групп строк B одно и то же, и количество столбцов в блоке $A_{k\ell}$ матрицы A равно количеству строк в соответствующем блоке $B_{\ell p}$ матрицы B.
Для $k = 1, \ldots, s$ положим $A_k = (A_{k1} A_{k2} \ldots A_{kt})$, а для $p = 1, \ldots, q$ положим $B_p = \begin{pmatrix} B_{1p} \\ B_{2p} \\ \vdots \\ B_{tp} \end{pmatrix}$. Тогда $A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_s \end{pmatrix}$ и $B = (B_1 B_2 \ldots B_q)$.

Теперь $A\cdot B=\begin{pmatrix}A_1\\A_2\\\vdots\\A_s\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}A_1\cdot B\\A_2\cdot B\\\vdots\\A_s\cdot B\end{pmatrix}=$
$\begin{pmatrix}A_1\cdot B_1 & A_1\cdot B_2 & \dots & A_1\cdot B_q\\A_2\cdot B_1 & A_2\cdot B_2 & \dots & A_2\cdot B_q\\\dots & \dots & \dots & \dots\\A_s\cdot B_1 & A_s\cdot B_2 & \dots & A_s\cdot B_q\end{pmatrix}$; далее, $A_k\cdot B_p=$

$$(A_{k1}A_{k2}\dots A_{kt})\cdot\begin{pmatrix}B_{1p}\\B_{2p}\\\vdots\\B_{tp}\end{pmatrix}=A_{k1}\cdot B_{1p}+A_{k2}\cdot B_{2p}+\dots A_{kt}\cdot B_{tp}=C_{kp},$$

что и требуется доказать.

Об обратимости блочных матриц

Пусть F – поле, $A \in F^{n_1 \times n_1}$, $C \in F^{n_2 \times n_2}$, $B \in F^{n_1 \times n_2}$, $O = O_{n_2 \times n_1}$. Если матрицы A и C обратимые, то обратима и блочная матрица $K = \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix}$ и $K^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1} \\ O & C^{-1} \end{pmatrix}$.

Будем искать K^{-1} в виде $\begin{pmatrix} X & Y \\ O & Z \end{pmatrix}$, где $X \in F^{n_1 \times n_1}$, $Z \in F^{n_2 \times n_2}$, $Y \in F^{n_1 \times n_2}$, $O = O_{n_2 \times n_1}$, с помощью равенства $K \cdot K^{-1} = E_{n_1+n_2}$:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X & Y \\ O & Z \end{pmatrix} = E_{n_1+n_2};$$

$$\begin{pmatrix} A \cdot X & A \cdot Y + B \cdot Z \\ O & C \cdot Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_{n_1} & O^\top \\ O & E_{n_2} \end{pmatrix}; \ A \cdot X = E_{n_1} \Longrightarrow X = A^{-1},$$

$C \cdot Z = E_{n_2} \Longrightarrow Z = C^{-1}$,

$A \cdot Y + B \cdot Z = O^\top \Longrightarrow A \cdot Y = -B \cdot Z = -B \cdot C^{-1}$, $Y = A^{-1} \cdot B \cdot C^{-1}$.