Глава I. Введение
§ 5. Алгебраические операции

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть X — непустое множество.

Определение

Бинарной алгебраической операцией на множестве X называется отображение из декартова квадрата $X \times X$ в X.

Отображение $f : X \times X \longrightarrow X$ является алгебраической операцией. Вместо $z = f(x, y)$ принято писать $z = x\,f\,y$, а вместо f используются символы $\circ$, $*$ и т.п.

Примеры алгебраических операций.

1. Операция сложения на множестве чисел $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$.
2. Операция умножения на множестве чисел $(\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R})$.
3. Операция сложения векторов на множестве всех геометрических векторов.

4. Операция умножения на множестве всех отображений из множества X в множество X.

5. Операция умножения на множестве всех бинарных отношений на множестве X.

6. Операция сложения по модулю n на множестве целых чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$: $x +_n y = z$, где z — остаток от деления на n числа $x + y$.

7. Операция умножения по модулю n на множестве целых чисел $\{0, 1, \ldots, n-1\}$: $x \cdot_n y = z$, где z — остаток от деления на n числа $x \cdot y$.

8. Операция $\bullet$ на множестве $\{a, b, c, d\}$, заданная таблицей Кэли

$\bullet$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

Здесь первый аргумент берется в левом столбце, а второй - в первой строке, и на пересечении строки и столбца указан результат. Например, $b \bullet c = d$.

Пусть $\circ$ — бинарная алгебраическая операция на множестве X.

Определения

1. Операция $\circ$ называется *коммутативной*, если $\forall x, y \in X \;\; x \circ y = y \circ x$.
2. Операция $\circ$ называется *ассоциативной*, если $\forall x, y, z \in X \;\; (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$.
3. Элемент $e \in X$ называется *нейтральным* относительно операции $\circ$, если $\forall x \in X \;\; x \circ e = e \circ x = x$.
4. Пусть e — нейтральный элемент относительно операции $\circ$. Элемент $y \in X$ называется *симметричным* к элементу $x \in X$, если $x \circ y = y \circ x = e$.

Пусть на конечном множестве $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ бинарная операция $\circ$ задана с помощью таблицы Кэли. Проверка коммутативности не представляет труда: таблица Кэли должна быть симметрична относительно ее "главной диагонали".

Чтобы проверить, будет ли эта операция ассоциативной, для каждого элемента x множества X строятся таблицы Кэли двух вспомогательных операций: $y *_x z = (y \circ x) \circ z$ и $y \star_x z = y \circ (x \circ z)$. Если таблицы Кэли этих операций совпадают при любом x из X, то операция $\circ$ будет ассоциативной.

Для построения таблицы Кэли операции $*_x$ нужно записать по порядку строки из исходной таблицы Кэли, соответствующие элементам $x_1 \circ x, \ldots, x_n \circ x$. Для построения таблицы Кэли операции $\star_x$ нужно записать по порядку столбцы из исходной таблицы Кэли, соответствующие элементам $x \circ x_1, \ldots, x \circ x_n$. Для проверки ассоциативности достаточно построить таблицы Кэли операций $*_x$ и проверить, является ли каждая из них таблицей Кэли для соответствующей операции $\star_x$.

Нейтральный элемент обнаруживается без труда: строка в его продолжении совпадает с заглавной строкой таблицы, а столбец - с самым левым столбцом. Легко также определить, есть ли у данного элемента симметричный к нему элемент.

Проверим, что операция 10 на сл.3 ассоциативна. Для этого построим таблицы Кэли для операций $*_x$ и $\star_x$ для $x \in \{a, b, c, d\}$.

$*_d$	a	b	c	d
$(a \bullet d)a$	d	a	b	c
$(b \bullet d)b$	a	b	c	d
$(c \bullet d)c$	b	c	d	a
$(d \bullet d)d$	c	d	a	b

$\star_d$	$(d \bullet a)a$	$(d \bullet b)b$	$(d \bullet c)c$	$(d \bullet d)d$
a	d	a	b	c
b	a	b	c	d
c	b	c	d	a
d	c	d	a	b

$*_a$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$*_b$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

$*_c$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

$\star_a$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	b	c	d	a
c	c	d	a	b
d	d	a	b	c

$\star_b$	a	b	c	d
a	b	c	d	a
b	c	d	a	b
c	d	a	b	c
d	a	b	c	d

$\star_c$	a	b	c	d
a	c	d	a	b
b	d	a	b	c
c	a	b	c	d
d	b	c	d	a

Мы видим, что во всех случаях таблицы Кэли операций $*_x$ и $\star_x$ совпадают. Следовательно, операция $\bullet$ ассоциативна.

Операции 1–3 со слайда 2 и 6–8 со слайда 3 являются коммутативными.

Все операции 1–8 являются ассоциативными.

Операция сложения на множестве $\mathbb{N}$ не имеет нейтрального элемента, на остальных множествах чисел нейтральный элемент — 0.

Для умножения на всех множествах чисел нейтральный элемент — 1.

Для сложения векторов нейтральный элемент $\vec{0}$,

Для умножения отображений и бинарных отношений на множестве X нейтральный элемент — отношение равенства $\triangle_X = \{(x,x) | x \in X\}$.
$\Downarrow$Для $\alpha \subseteq X \times X$ имеем $\alpha \circ \triangle_X = \{(x,y) | \exists z \in X : (x,z) \in \alpha, (z,y) \in \triangle_X\}$. Следовательно, $z = y$ по определению отношения равенства $\triangle_X$ и $\alpha \circ \triangle_X = \alpha$. Аналогично проверяется, что $\triangle_X \circ \alpha = \alpha$. Таким образом, отношение равенства $\triangle_X$ является нейтральным элементом для операции умножения бинарных отношений на множестве X.
Так как отображения являются бинарными отношениями, для операции умножения отображений нейтральным элементом будет $\triangle_X$, рассматриваемое как отображение, т.е. тождественное отображение ε множества X на себя: $\varepsilon(x) = x$ для любого $x \in X$.$\Uparrow$

Для операции 8 нейтральным элементом будет a.

Примеры-2

Для операции сложения на множествах $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ каждый элемент обладает симметричным.

Для операции умножения на множестве $\mathbb{N}$ симметричным обладает только 1, на множестве $\mathbb{Z}$ — только $-1, 1$, на множествах $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — каждое ненулевое число.

Каждый вектор обладает симметричным относительно операции сложения векторов.

Биекции множества X на X и только они имеют симметричные элементы относительно операций умножения отображений и бинарных отношений. $\Downarrow$ Пусть $\alpha, \beta \subseteq X \times X$ и $\alpha \circ \beta = \beta \circ \alpha = \triangle_X$. Тогда $D(\alpha) = X$ и $E(\alpha) = X$, т.е. α – всюду определенное сюрьективное соответствие. Если $x\alpha y$ и $x\alpha z$, то $y\beta x$ и $z\beta x$, иначе $x(\alpha \circ \beta)u$ при $x \neq u$. Отсюда $z(\beta \circ \alpha)y$ и $y = z$. Таким образом, α – функциональное соответствие. Аналогично проверяется, что α инъективно. Итак, α – биекция.$\Uparrow$

Для операции 8 элементы a и c являются симметричными к самим себе, d является симметричным к b.

Предложение

Если операция обладает нейтральным элементом, то он единствен. Если ассоциативная операция обладает нейтральным элементом, то симметричный элемент определяется однозначно в случае, когда он существует.

$\Downarrow$ Пусть e_1, e_2 — два нейтральных элемента относительно операции $\circ$. Тогда $e_1 = e_1 \circ e_2 = e_2$ по определению нейтрального элемента.
Пусть ассоциативная операция $\circ$ обладает нейтральным элементом e и y_1, y_2 — два симметричных элемента к элементу x. Тогда $x \circ y_1 = y_1 \circ x = e$ и $x \circ y_2 = y_2 \circ x = e$. Имеем $y_1 = e \circ y_1 = (y_2 \circ x) \circ y_1 = y_2 \circ (x \circ y_1) = y_2 \circ e = y_2$, т.е. $y_1 = y_2$, что и требуется доказать.$\Uparrow$

Если операция $\circ$ на множестве A не ассоциативная, то необходимо ставить скобки при записи выражений: $x \circ (y \circ z)$ может быть не равно $(x \circ y) \circ z$. Расставлять скобки в произведениях, содержащих более 3-х элементов, можно многими способами. Например, в произведениях 4-х элементов скобки можно расставить следующими способами:
$x_1 \circ (x_2 \circ (x_3 \circ x_4))$, $x_1 \circ ((x_2 \circ x_3) \circ x_4)$, $(x_1 \circ (x_2 \circ x_3)) \circ x_4$, $((x_1 \circ x_2) \circ x_3) \circ x_4$, $(x_1 \circ x_2) \circ (x_3 \circ x_4)$.

Теорема

Если операция $\circ$ на множестве X ассоциативная, то для любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ значение выражения $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$ не зависит от способа расстановки скобок.

$\Downarrow$Докажем индукцией по n, что при $n \geq 3$ и любых $x_1, x_2, \dots, x_n \in X$ выражение $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$ при любом способе расстановки скобок равно $x_1 \circ (x_2 \circ (\dots \circ x_n) \cdots)$. База индукции ($n = 3$) следует из определения ассоциативной операции: $(x_1 \circ x_2) \circ x_3 = x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$.
Шаг индукции. Предположим, что для всех $3 \leq k < n$ утверждение уже доказано. Рассмотрим произведение $(x_1 \circ x_2 \dots \circ x_m) \circ (x_{m+1} \circ \dots \circ x_n)$. Если $m = 1$, то требуемое сразу получается из предположения индукции, примененного к второй скобке. Пусть $m > 1$. По предположению индукции выражение в первой скобке равно $x_1 \circ (x_2 \circ (x_3 \circ \dots \circ x_m))$.
Применяя свойство ассоциативности, получаем $(x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_m) \circ (x_{m+1} \circ \dots \circ x_n) = (x_1 \circ (x_2 \circ (x_3 \circ \dots \circ x_m))) \circ (x_{m+1} \circ \dots \circ x_n) = x_1 \circ ((x_2 \circ (x_3 \circ \dots x_m)) \circ (x_{m+1} \circ \dots \circ x_n))$, откуда в силу предположения индукции следует требуемое утверждение.$\Uparrow$

С учетом теоремы в случае ассоциативной операции выражения вида $x_1 \circ x_2 \circ \dots \circ x_n$ принято записывать без скобок.

Аддитивный и мультипликативный способы представления алгебраической операции

1. Аддитивный способ.
Если операция на множестве коммутативна и ассоциативна, то ее часто обозначают знаком $+$ и называют *сложением*. При этом нейтральный элемент, если он существует, обозначается 0 и называется *нулем*, а (единственный) симметричный элемент к элементу a обозначается через $-a$ и называется *противоположным* к a элементом.

2. Мультипликативный способ. Если операция на множестве ассоциативна, то ее часто обозначают знаком $\cdot$ и называют *умножением*. При этом нейтральный элемент, если он существует, обозначается 1 и называется *единицей*, а (единственный) симметричный элемент к элементу a, если он существует, обозначается через a^{-1} и называется *обратным* к a элементом. Сам элемент a, для которого существует обратный элемент, называется *обратимым элементом*.