Глава I. Введение
§ 4. Бинарные отношения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Пусть X — непустое множество.

Определение

Бинарным отношением на множестве X называется соответствие из множества X в X, т.е. всякое подмножество декартова квадрата X^2.

Пусть $\alpha \subseteq X^2$. Вместо $(x, y) \in \alpha$ обычно пишут $x\alpha y$ и говорят "элемент x находится в отношении α с элементом y".

Определения

1. Если для любого $x \in X$ имеет место $x\alpha x$, то отношение α называется *рефлексивным*.
2. Если для любых $x, y \in X$ из $x\alpha y$ следует $y\alpha x$ то отношение α называется *симметричным*.
3. Если для любых $x, y, z \in X$ из $x\alpha y$ и $y\alpha z$ следует $x\alpha z$, то отношение α называется *транзитивным*.
4. Если для любых $x, y \in X$ из $x\alpha y$ и $y\alpha x$ следует $x = y$, то отношение α называется *антисимметричным*.

1. X – множество всех людей. Отношение α определено так: $A\alpha B \iff A$ и B родились в одном и том же году. Оно рефлексивно, симметрично, транзитивно, не антисимметрично.

2. X – множество всех прямых в пространстве. Отношение α определено так: $\ell\alpha m \iff \ell = m$ или $\ell \parallel m$. Оно рефлексивно, симметрично, транзитивно, не антисимметрично.

3. $X = \mathbb{N}$, отношение α определено так: $m\alpha n \iff m$ *делит* n $(n = k \cdot m$ для некоторого $k \in \mathbb{N})$. Обозначение: $m|n$. Это отношение рефлексивно, не симметрично, транзитивно, антисимметрично.

4. $X = \mathbb{Z}$, отношение α определено так же, как в примере 3: $m\alpha n \iff m|n$. Оно рефлексивно, не симметрично, транзитивно, не антисимметрично.

5. $X = \mathbb{R}$, отношение α определено так: $m\alpha n \iff m \leq n$. Оно рефлексивно, не симметрично, транзитивно, антисимметрично.

6. $X = \mathbb{Z}$, отношение α определено так: $m\alpha n \iff 5|(m-n)$. Оно рефлексивно, симметрично, транзитивно, не антисимметрично. Транзитивность следует из того, что если $m\alpha n$ и $n\alpha k$, то $5|(m-n)$ и $5|(n-k)$, поэтому $5|(m-k)$, так как $m-k = (m-n)+(n-k)$. Следовательно, $m\alpha k$.

Свойства бинарных отношений в терминах операций над соответствиями

Определения

Пусть X – непустое множество. Положим $\triangle_X = \{(x,x)|x \in X\}$, $\bigtriangledown_X = X \times X$.Тогда $\triangle_X$ называется *отношением равенства*, а $\bigtriangledown_X$ — *универсальным отношением* на множестве X.

Пусть α – бинарное отношение на множестве X. Что такое α^{-1}? Это обратное соответствие к α, т.е. бинарное отношение, определенное так: $x\alpha^{-1}y \iff y\alpha x$.

Справедливы следующие утверждения:

1. Бинарное отношение α рефлексивно $\iff \triangle_X \subseteq \alpha$.
2. Бинарное отношение α симметрично $\iff \alpha^{-1} \subseteq \alpha \iff \alpha^{-1} = \alpha$.
3. Бинарное отношение α транзитивно $\iff \alpha \circ \alpha \subseteq \alpha$.
4. Бинарное отношение α антисимметрично $\iff \alpha^{-1} \cap \alpha \subseteq \triangle_X$.

Утверждения 1, 3, 4 являются непосредственными следствиями соответствующих определений.

В утверждении 2 нужно лишь проверить, что $\alpha^{-1} \subseteq \alpha \Longrightarrow \alpha^{-1} = \alpha$.

Покажем, что из $\alpha^{-1} \subseteq \alpha$ следует $\alpha \subseteq \alpha^{-1}$:

$x\alpha y \Longrightarrow y\alpha^{-1}x \Longrightarrow y\alpha x \Longrightarrow x\alpha^{-1}y$.

Определения

Рефлексивное симметричное транзитивное отношение называется *отношением эквивалентности*.
Система подмножеств $\{A_i | i \in I\}$ множества X называется *разбиением множества* X, если $A_i \neq \emptyset$ при всех $i \in I$, $A_i \cap A_j = \emptyset$ при $i \neq j$ и $X = \cup_{i \in I} A_i$.
Пусть α — отношение эквивалентности на множестве X, $x \in X$. *Классом эквивалентности элемента* x *по отношению* α называется множество $\{y \in X | y\alpha x\}$. Обозначение: x^α.

На сл.3 отношения эквивалентности – примеры 1, 2, 6.

Теорема

Для любого отношения эквивалентности α на множестве X множество всех классов эквивалентности по α образует разбиение множества X.
Для любого разбиения $\{A_i | i \in I\}$ множества X бинарное отношение, определенное условием $x\alpha y \iff x, y \in A_i$ для некоторого $i \in I$, является отношением эквивалентности, и его классы эквивалентности являются множествами A_i $(i \in I)$.

$\Downarrow$Пусть α — отношение эквивалентности на множестве X.
Так как $x \in x^\alpha$, $x^\alpha \neq \emptyset$ и $X = \cup_{x \in X} x^\alpha$.
Убедимся, что $x^\alpha \cap y^\alpha = \emptyset$ при $x^\alpha \neq y^\alpha$. Для этого докажем, что

$$x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x\alpha y \Leftrightarrow x^\alpha = y^\alpha.$$

Докажем, что $x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x\alpha y$.
Пусть $z \in x^\alpha \cap y^\alpha$. Тогда $z\alpha x$ и $z\alpha y$, откуда в силу симметричности отношения α следует $x\alpha z$ и в силу транзитивности $x\alpha y$. Следовательно, $x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Rightarrow x\alpha y$.
Обратное утверждение очевидно, так как из $x\alpha y$ следует $x \in y^\alpha$ и значит $x \in x^\alpha \cap y^\alpha$. Мы доказали, что $x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x\alpha y$.
Докажем, что $x\alpha y \Leftrightarrow x^\alpha = y^\alpha$. Если $x\alpha y$, то для любого $z \in x^\alpha$ имеем $z\alpha x$, откуда в силу транзитивности α следует $z\alpha y$, т.е. $z \in y^\alpha$. Значит, $x^\alpha \subseteq y^\alpha$.
Поскольку из $x\alpha y$ в силу симметричности отношения α следует $y\alpha x$, аналогично получаем $y^\alpha \subseteq x^\alpha$, т.е. $x^\alpha = y^\alpha$. Итак, доказана импликация $x\alpha y \Rightarrow x^\alpha = y^\alpha$.
Если $x^\alpha = y^\alpha$, то очевидно, что $x \in y^\alpha$, и $x\alpha y$.
Таким образом, $x^\alpha \cap y^\alpha \neq \emptyset \Leftrightarrow x^\alpha = y^\alpha$ и первое утверждение теоремы доказано.

Окончание доказательства теоремы

Пусть $\{A_i | i \in I\}$ — разбиение множества X и α — бинарное отношение, определенное условием $x\alpha y \iff x, y \in A_i$ для некоторого $i \in I$.
Очевидно, что отношение α рефлексивно и симметрично. Проверим, что оно транзитивно.
Пусть $x\alpha y$ и $y\alpha z$. Тогда $x, y \in A_i$ и $y, z \in A_j$ для некоторых $i, j \in I$. Так как $y \in A_i \cap A_j$, заключаем, что $i = j$ и $x\alpha z$. Этим доказана транзитивность α. Следовательно, α — отношение эквивалентности.
Из определений класса эквивалентности и отношения α непосредственно следует, что классы эквивалентности α — это в точности множества A_i.
Теорема доказана.$\Uparrow$

Определение

Множество всех классов эквивалентности элементов множества X по отношению эквивалентности α называется *фактормножеством* и обозначается через X/α.

Охарактеризуйте классы эквивалентности для отношений из примеров 1, 2, 6 на слайде 3.

Важные примеры отношений эквивалентности

1. $X = \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}$, для любых $x, y \in \mathbb{Z}$ $x\rho_n y \iff n$ делит $x - y$. При этом говорят, что числа x и y *сравнимы по модулю n*.
Очевидно, что отношение ρ_n рефлексивно и симметрично.
Оно транзитивно, так как если $x\rho_n y$ и $y\rho_n z$, то n делит $x - y$ и $y - z$, и потому n делит $x - z = (x - y) + (y - z)$.
Для числа $x \in \mathbb{Z}$ через $\overline{x}_n$ обозначим целое число из отрезка $[0, n-1]$ такое что $x = qn + \overline{x}_n$ для некоторого $q \in \mathbb{Z}$.
Очевидно, что $x\rho_n y \iff \overline{x}_n = \overline{y}_n$. Поэтому фактормножество $\mathbb{Z}/\rho_n$ состоит из n элементов, называемых *вычетами* по модулю n.
Вычет x^{ρ_n} равен $\{\overline{x}_n + qn | q \in \mathbb{Z}\}$.

2. Пусть X, Y — множества и $\varphi : X \longrightarrow Y$ — отображение множества X на множество Y. Определим отношение $\mathrm{ker}(\varphi)$ на множестве X, полагая $x_1 \mathrm{ker}(\varphi) x_2 \iff \varphi(x_1) = \varphi(x_2)$.
Легко проверить, что $\mathrm{ker}(\varphi)$ — отношение эквивалентности на множестве X.
Его классы эквивалентности суть *полные прообразы* элементов множества Y при отображении φ: $\varphi^{-1}(y) = \{x \in X | \varphi(x) = y\}$.
Отображение $\varphi^{-1}(y) \mapsto y$ является биекцией фактормножества $X/\mathrm{ker}(\varphi)$ на множество Y.

Определения

Отношением частичного порядка на множестве X называется рефлексивное, антисимметричное и транзитивное бинарное отношение на этом множестве. Множество с зафиксированным на нем отношением частичного порядка называется *частично упорядоченным множеством*.

На сл.3 отношения частичного порядка – примеры 3, 5.

Еще два примера.

1. Для любого множества X отношение включения $\subseteq$ на булеане $\mathcal{B}(X)$ является отношением частичного порядка.

2. Естественное отношение порядка $\leq$ на каждом из множеств чисел $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ является отношением частичного порядка.

Определения

Отношением линейного порядка на множестве X называется отношение частичного порядка σ, удовлетворяющее следующему дополнительному условию: для любых $x, y \in X$ имеет место либо $x\sigma y$, либо $y\sigma x$.
Последнее условие для бинарного отношения называется *линейностью*.
Множество с зафиксированным на нем отношением линейного порядка называется *линейно упорядоченным множеством*.

Примеры.
1. Естественное отношение порядка $\leq$ на каждом из множеств чисел $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ является отношением линейного порядка.
2. Для любого множества X отношение включения $\subseteq$ на булеане $\mathcal{B}(X)$ является отношением линейного порядка тогда и только тогда, когда X — либо пустое, либо одноэлементное множество.
3. Пусть $(X, \leq)$ — линейно упорядоченное множество, $n \in \mathbb{N}$. На множестве X^n определим отношение *лексикографического порядка* $\preceq$: $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n)$, если либо $(x_1, \ldots, x_n) = (y_1, \ldots, y_n)$, либо $x_1 < y_1$, либо существует натуральное число k, такое что $1 \leq k < n$, $x_i = y_i$ для $i = 1, \ldots, k$ и $x_{k+1} < y_{k+1}$.
Легко проверить, что это отношение является рефлексивным, антисимметричным и линейным.

Убедимся, что оно транзитивно. Пусть $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (y_1, \ldots, y_n)$, $(y_1, \ldots, y_n) \preceq (z_1, \ldots, z_n)$ и оба неравенства строгие, так как иначе доказывать нечего. Тогда $x_1 \leq y_1 \leq z_1$ и если по крайней мере одно из этих неравенств строгое, то $x_1 < z_1$ и $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (z_1, \ldots, z_n)$. Предположим, что $x_1 = y_1 = z_1$. Тогда существует число $1 < i < n$ такое, что $x_1 = y_1$,. . .,$x_i = y_i$, $x_{i+1} < y_{i+1}$ и существует число $1 < j < n$ такое, что $y_1 = z_1$,. . .,$y_j = z_j$, $y_{j+1} < z_{j+1}$. Пусть k – наименьшее из чисел i, j. Тогда $x_1 = z_1$,. . .,$x_k = z_k$, причем $x_{k+1} < y_{k+1} \leq z_{k+1}$при $k = i$ и $x_{k+1} \leq y_{k+1} < z_{k+1}$ при $k = j$. В обоих случаях $x_{k+1} < z_{k+1}$ и $(x_1, \ldots, x_n) \preceq (z_1, \ldots, z_n)$, что и требуется доказать.

Определения

Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество, $M \subseteq X$ — его непустое подмножество.

Элемент m называется *максимальным* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ из $m \leq x$ следует $x = m$.

Элемент m называется *минимальным* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ из $x \leq m$ следует $x = m$.

Изображение частично упорядоченных множеств с помощью диаграмм

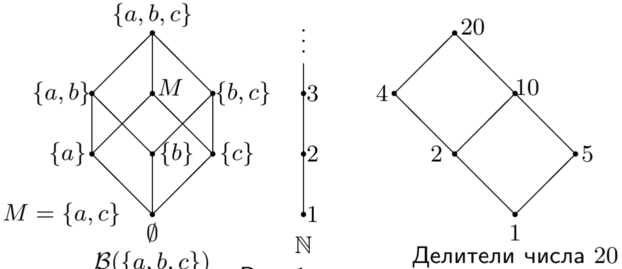

Рис. 1

Некоторые частично упорядоченные множества можно изображать диаграммами. Элементы множеств изображаются точками. Если элементы x, y частично упорядоченного множества (X, σ) таковы, что $x\sigma y$ и для любого $z \in X$ из $x\sigma z\sigma y$ следует $z = x$ или $z = y$, то x и y соединяются отрезком прямой.

Определения

Пусть $(X, \leq)$ — частично упорядоченное множество, $M \subseteq X$ — его непустое подмножество.
Элемент m называется *наибольшим* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ имеет место $x \leq m$.
Элемент m называется *наименьшим* элементом множества M, если для любого элемента $x \in M$ имеет место $m \leq x$.

Легко проверить, что наибольший (соотв. наименьший) элемент любого непустого подмножества частично упорядоченного множества единствен. Верно ли это для максимальных и минимальных элементов?
Также ясно, что наибольший элемент является максимальным, а наименьший элемент — минимальным. Верно ли обратное?