Глава I. Введение
§ 3. Соответствия и отображения

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

Соответствие

Пусть X, Y — непустые множества.

Определения

Соответствием из множества X в множество Y называется всякое непустое подмножество $\alpha \subseteq X \times Y$.
Областью определения соответствия α называется множество $D(\alpha) = \{x \in X | \exists y \in Y : (x, y) \in \alpha\}$.
Областью значений соответствия α называется множество $E(\alpha) = \{y \in Y | \exists x \in X : (x, y) \in \alpha\}$.

Очевидно, что $D(\alpha) \subseteq X$, $E(\alpha) \subseteq Y$ и $D(\alpha) \neq \emptyset$, $E(\alpha) \neq \emptyset$.
Соответствия между конечными множествами можно изображать диаграммами, в которых элементы множеств изображаются точками, а тот факт, что упорядоченная пара (a, b) принадлежит соответствию, изображается стрелкой $a \longrightarrow b$.

Свойства соответствий: функциональность и инъективность

Пусть α — соответствие из множества X в множество Y.

Определения

Соответствие α называется *функциональным*, если для любых $x \in X$, $y_1, y_2 \in Y$ из $(x, y_1) \in \alpha$ и $(x, y_2) \in \alpha$ следует $y_1 = y_2$.
Соответствие α называется *инъективным*, если для любых $x_1, x_2 \in X$, $y \in Y$ из $(x_1, y) \in \alpha$ и $(x_2, y) \in \alpha$ следует $x_1 = x_2$.

На языке диаграмм свойство фунциональности означает, что невозможна ситуация изображенная на рис.1 при $y_1 \neq y_2$:

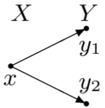

Рис. 1

а свойство инъективности означает, что невозможна ситуация изображенная на рис.2 при $x_1 \neq x_2$:

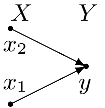

Рис. 2

Свойства соответствий: сюръективность и всюду определенность.

Определения

Соответствие α называется *сюръективным*, если $E(\alpha) = Y$, т.е. для любого $y \in Y$ существует $x \in X$ такой что $(x, y) \in \alpha$.
Соответствие α называется *всюду определенным*, если $D(\alpha) = X$, т.е. для любого $x \in X$ существует $y \in Y$ такой что $(x, y) \in \alpha$.

На диаграмме сюръективного соответствия в каждый элемент множества Y идет по крайней мере одна стрелка.
На диаграмме всюду определенного соответствия из каждого элемента множества X выходит по крайней мере одна стрелка.

Типы соответствий

Определения

Всюду определенное функциональное соответствие из множества X в множество Y называется *отображением* множества X *в* множество Y.
Сюръективное отображение из множества X в множество Y называется отображением множества X *на* множество Y.
Инъективное отображение из множества X на множество Y называется *биекцией* множества X на множество Y или *взаимно однозначным соответствием* множества X на множество Y.

Термин “*функция*” является синонимом термина “отображение”.

Примеры соответствий (язык диаграмм)

Определите свойства соответствий, изображенных следующими диаграммами, и их типы:

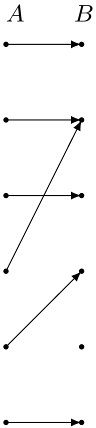

Рис. 3

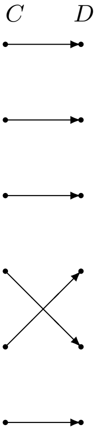

Рис. 4

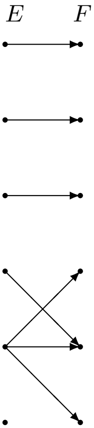

Рис. 5

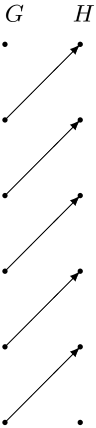

Рис. 6

Договоренности об обозначениях и примеры

Отображение α из множества X в множество Y кратко принято записывать так: $\alpha : X \longrightarrow Y$.
Вместо $(x, y) \in \alpha$ в случае, когда α – отображение, будем писать $y = \alpha(x)$.
При этом y называется *образом* элемента x, а x – *прообразом* элемента y при отображении α.
При определении отображения α будем писать $x \mapsto \alpha(x)$.
Термин "*функция*" будет использоваться как синоним для термина "отображение".
Отображение $\alpha : X \longrightarrow Y$ будет инъективным тогда и только тогда, когда $\forall x_1, x_2 \in X \ (\alpha(x_1) = \alpha(x_2) \Longrightarrow x_1 = x_2)$.
Отображение $\alpha : X \longrightarrow Y$ будет сюръективным тогда и только тогда, когда $\forall y \in Y \exists x \in X : \alpha(x) = y$.

Положим $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$. Тогда отображение $x \mapsto x^2$ будет отображением $\mathbb{R}$ *в* $\mathbb{R}$, отображением $\mathbb{R}$ *на* $\mathbb{R}^+$ и *биекцией* $\mathbb{R}^+$ *на* $\mathbb{R}^+$.

Обратное соответствие

Пусть α — соответствие из множества X в множество Y.

Определение

Обратным соответствием к соответствию α называется соответствие $\{(y, x) | (x, y) \in \alpha\}$ из множества Y в множество X.

Указанное соответствие обозначается через α^{-1}.
Из определений сл.2 следует, что $E(\alpha^{-1}) = D(\alpha)$ и $D(\alpha^{-1}) = E(\alpha)$ для любого соответствия α.
Из определений сл.3 следует, что
α является функциональным $\Longleftrightarrow$ α^{-1} является инъективным.
Из определений сл.4 следует, что
α является всюду определенным $\Longleftrightarrow$ α^{-1} является сюръективным.

Обратимое отображение

Определение

Отображение α из множества X в множество Y называется *обратимым*, если обратное соответствие α^{-1} является отображением Y на X. Отображение α^{-1} при этом называется *обратным* к отображению α.

Из утверждений сл.8 следует, что отображение α является обратимым тогда и только тогда, когда оно является биекцией. При этом обратное отображение α^{-1} также является биекцией.

Отображение $x \mapsto x^2$ множества $\mathbb{R}^+$ на $\mathbb{R}^+$ является обратимым и обратным к нему будет отображением $x \mapsto \sqrt{x}$.

Пусть α — соответствие из множества X в множество Y, β — соответствие из множества Y в множество Z.

Определение

Произведением соответствий α и β называется подмножество декартова произведения $X \times Z$, определяемое формулой

$$\alpha \circ \beta = \{(x, z) | \exists y \in Y : (x, y) \in \alpha, (y, z) \in \beta\}.$$

Легко видеть, что $\alpha \circ \beta$ является соответствием тогда и только тогда, когда $E(\alpha) \cap D(\beta) \neq \emptyset$.

Предложение

Пусть α — соответствие из множества X в множество Y, β — соответствие из множества Y в множество Z и γ – соответствие из множества Z в множество T. Тогда $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma = \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$.

$\Downarrow$Пусть $(x, t) \in (\alpha \circ \beta) \circ \gamma$ для некоторых $x \in X, t \in T$. Тогда существует $z \in Z$: $(x, z) \in \alpha \circ \beta$, $(z, t) \in \gamma$ и существует $y \in Y$: $(x, y) \in \alpha$ и $(y, z) \in \beta$. Следовательно, $(y, t) \in \beta \circ \gamma$ и $(x, t) \in \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$, т.е. $(\alpha \circ \beta) \circ \gamma \subseteq \alpha \circ (\beta \circ \gamma)$. Противоположное включение доказывается аналогично.$\Uparrow$

Теорема

Пусть X, Y, Z – множества, α – соответствие из X в Y, β – соответствие из Y в Z. Если α и β являются функциональными [соотв. инъективными, сюръективными, всюду определенными] соответствиями, то и их произведение $\alpha \circ \beta$ будет функциональным [соотв. инъективным, сюръективным, всюду определенным] соответствием.

$\Downarrow$Пусть α и β – функциональные соответствия. Предположим, что для некоторых $x \in X$ и $z, z' \in Z$ имеет место $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ и $(x, z') \in \alpha \circ \beta$. Тогда существуют $y, y' \in Y$: $(x, y) \in \alpha$, $(y, z) \in \beta$, $(x, y') \in \alpha$, $(y', z') \in \beta$. Из функциональности α и $(x, y) \in \alpha$, $(x, y') \in \alpha$ следует $y = y'$. Так как β – функциональное соответствие, из $(y, z) \in \beta$ и $(y', z') \in \beta$ следует $z = z'$. Мы доказали, что $\alpha \circ \beta$ – функциональное соответствие.

Пусть α и β – инъективные соответствия. Предположим, что для некоторых $x, x' \in X$ и $z \in Z$ имеет место $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ и $(x', z) \in \alpha \circ \beta$. Тогда существуют $y, y' \in Y$: $(x, y) \in \alpha$, $(y, z) \in \beta$, $(x', y') \in \alpha$, $(y', z) \in \beta$. Так как β – инъективное соответствие, из $(y, z) \in \beta$ и $(y', z) \in \beta$ следует $y = y'$. Из инъективности α и $(x, y) \in \alpha$, $(x', y') \in \alpha$ теперь следует $x = x'$. Таким образом, $\alpha \circ \beta$ – инъективное соответствие.

Пусть α и β – сюръективные соответствия. Зафиксируем произвольный элемент $z \in Z$. Для него существует элемент $y \in Y$ такой что $(y, z) \in \beta$. Для этого элемента y существует $x \in X$: $(x, y) \in \alpha$. Следовательно, $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ и $\alpha \circ \beta$ – сюръективное соответствие.

Пусть α и β – всюду определенные соответствия. Зафиксируем произвольный элемент $x \in X$. Для него существует элемент $y \in Y$ такой что $(x, y) \in \alpha$. Для этого элемента y существует $z \in Z$: $(y, z) \in \beta$. Следовательно, $(x, z) \in \alpha \circ \beta$ и $\alpha \circ \beta$ – всюду определенное соответствие.$\Uparrow$

Следствие 1

Произведение отображений является отображением.

Обозначать произведение γ отображения $\alpha : X \longrightarrow Y$ на $\beta : Y \longrightarrow Z$ будем через $\beta \bullet \alpha$, так как $\gamma(x) = \beta(\alpha(x))$ для любого $x \in X$.

Следствие 2

Если $\alpha : X \longrightarrow Y$ и $\beta : Y \longrightarrow Z$ являются инъективными [сюръективными, биективными] отображениями, то их произведение $\beta \bullet \alpha$ будет инъективным [сюръективным, биективным] отображением.