# Глава I. Введение.
# §2. Элементы комбинаторики

А. Я. Овсянников

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Основы алгебры для направлений
Механика и математическое моделирование и
Прикладная математика
(1 семестр)

### Определение

*Мощностью* конечного множества называется количество элементов этого множества.

Мощность множества $M$ обозначается через $|M|$. По определению $|\emptyset| = 0$. Пусть $X, Y$ — конечные множества. Если $X \cap Y = \emptyset$, то ясно, что $|X \cup Y| = |X| + |Y|$. В общем случае $|X \cup Y| = |X| + |Y| - |X \cap Y|$, так как при подсчете элементов в $|X \cup Y|$ элементы из $|X \cap Y|$ считаются дважды, и $|X \cup Y \cup Z| = |X| + |Y| + |Z| - |X \cap Y| - |X \cap Z| - |Y \cap Z| + |X \cap Y \cap Z|$. Очевидно также, что $|X \backslash Y| = |X| - |X \cap Y|$.

### Определение

Предположим, что каждому элементу множества $X$ сопоставлен элемент множества $Y$, так что различным элементам сопоставляются различные и все элементы множества $Y$ при этом получаются. Таким образом, каждому элементу множества $X$ соответствует единственный элемент множества $Y$. Такое отображение называется *биекцией* множества $X$ на $Y$.

### Наблюдение

Если между конечными множествами существует биекция, то их мощности равны.

В самом деле, соответствующие элементы множеств $X$ и $Y$ можно расположить друг под другом.

$$\begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & \ldots & x_{k-1} & x_k \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_{k-1} & y_k \end{array}$$

# Мощность декартова произведения двух множеств

**Теорема**

Пусть $X, Y$— конечные множества. Тогда $|X \times Y| = |X| \cdot |Y|$.

$\Downarrow$ Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — все различные элементы множества $X$ и $y_1, \ldots, y_k$ — все различные элементы множества $Y$. Расположим элементы декартова произведения $X \times Y$ в виде таблицы

$$\begin{array}{cccc}
(x_1, y_1) & (x_1, y_2) & \ldots & (x_1, y_k) \\
(x_2, y_1) & (x_2, y_2) & \ldots & (x_2, y_k) \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
(x_n, y_1) & (x_n, y_2) & \ldots & (x_n, y_k)
\end{array}$$

Все элементы в одной строке этой таблицы различны, так как у них различны первые элементы, и все элементы в одном столбце также различны, так как у них различны вторые элементы. Следовательно, все элементы в таблице различны. Ясно, что эта таблица содержит все элементы из множества $X \times Y$.

Следовательно, мощность $|X \times Y|$ равна числу элементов в таблице. Так как таблица прямоугольная, имеет $n$ строк и $k$ столбцов, ясно, что в ней $n \cdot k$ элементов. Это завершает доказательство.$\Uparrow$

**Теорема**

Пусть $X_1, \ldots, X_n$— конечные множества. Тогда $|X_1 \times \ldots \times X_n| = |X_1| \cdot \cdots \cdot |X_n|$.

$\Downarrow$ Используем индукцию по $n$. При $n = 2$ требуемое следует из теоремы сл.4.

Пусть утверждение уже доказано для всех $2 \leq k < n$. Сопоставим кортежу $(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ упорядоченную пару $((x_1, \ldots, x_{n-1}), x_n)$, состоящую из кортежа $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и элемента $x_n$.

Получаем отображение множества $Y_1 = X_1 \times \ldots \times X_{n-1} \times X_n$ в множество $Y_2 = (X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n$, которое различные элементы переводит в различные и все элементы множества $Y_2$ при этом получаются.

Это отображение является биекцией множества $Y_1$ на $Y_2$. Следовательно, $|Y_1| = |Y_2|$.

Используя предположение индукции $|X_1 \times \ldots \times X_{n-1}| = |X_1| \cdot \cdots \cdot |X_{n-1}|$, получаем требуемое утверждение:

$|X_1 \times \ldots \times X_{n-1} \times X_n| = |(X_1 \times \ldots \times X_{n-1}) \times X_n| =$
$|X_1 \times \ldots \times X_{n-1}| \cdot |X_n| = |X_1| \cdot \cdots \cdot |X_{n-1}| \cdot |X_n|.$$\Uparrow$

# Мощность декартовой степени множества

Определение декартовой степени множества см. на сл.20 §1.
Из теоремы сл.5 непосредственно получается следующее утверждение.

**Следствие**

*Пусть $X$ – конечное множество, $n$ – натуральное число. Тогда $|X^n| = |X|^n$.*

Например, $|\{0,1\}^n| = 2^n$, т.е. количество всевозможных последовательностей из нулей и единиц, содержащих $n$ символов, равно $2^n$.

**Определение**

*Булеаном* множества $X$ называется множество всех подмножеств множества $X$, включая его само и пустое множество.

Булеан множества $X$ обозначим через $\mathcal{B}(X)$. (В задачнике используется другое обозначение $\mathcal{P}(X)$).

**Теорема**

Пусть $X$ – конечное множество. Тогда $|\mathcal{B}(X)| = 2^{|X|}$.

$\Downarrow$ Пусть $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$, и $|X| = k$. Пусть $Y \subseteq X$. Для $j = 1, \ldots, k$ положим $i_Y(j) = \begin{cases} 1, & \text{если } x_j \in Y, \\ 0, & \text{если } x_j \notin Y. \end{cases}$
Определим отображение $\varphi$ из множества $\mathcal{B}(X)$ в множество $\{0,1\}^k$, полагая $\varphi(Y) = (i_Y(1), \ldots, i_Y(k))$ для любого $Y \in \mathcal{B}(X)$.
Например, при $k = 5$ $\varphi(\{x_1, x_3, x_4\}) = (1, 0, 1, 1, 0)$.
Если $Y_1 \neq Y_2$, то для некоторого $j$ имеем $x_j \in Y_1 \setminus Y_2$, откуда $i_{Y_1}(j) = 1$, $i_{Y_2}(j) = 0$ и потому $\varphi(Y_1) \neq \varphi(Y_2)$.
Очевидно, что каждая строка $(i_1, \ldots, i_k)$ из множества $\{0,1\}^k$ получается из подмножества $\{x_j | i_j = 1\}$ множества $X$.
Например, при $k = 5$ $(0, 1, 1, 0, 1) = \varphi(\{x_2, x_3, x_5\})$.
Следовательно, построена биекция множества $\mathcal{B}(X)$ на $\{0,1\}^k$. Требуемое утверждение теперь следует из следствия сл.6.$\Uparrow$

Пусть $X$ – конечное множество из $n$ элементов, где $n \geq 1$.

**Определение**

*Размещением* из $n$ элементов по $k$ элементов называется любой кортеж из множества $X^k$, состоящий из различных элементов.

Количество размещений из $n$ элементов по $k$ элементов обозначается через $A_n^k$.

Чтобы сосчитать размещения из $n$ по $k$ элементов, заметим, что первый элемент размещения можно выбрать $n$ способами. Если первый элемент зафиксирован, то второй можно выбрать $n-1$ способом. Таким образом, первые два элемента можно выбрать $n(n-1)$ способами. Если первые два элемента зафиксированы, то третий можно выбрать $n-2$ способами. Поэтому первые три элемента можно выбрать $n(n-1)(n-2)$ способами. Продолжая рассуждать таким образом, получаем формулу

$$A_n^k = n(n-1)\cdots(n-k+1).$$

Вспоминая определение факториала (сл.8 т.1), можно переписать полученную формулу так:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

# Перестановки

Два размещения из $n$ элементов по $k$ элементов отличаются друг от друга порядком и составом элементов.
Например, количество 5-значных чисел, не содержащих цифры $0$, равно $A_9^5 = 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 = 15120$.

## Определение

*Перестановкой* из $n$ элементов называется размещение $n$ элементов по $n$ элементов.

Количество перестановок из $n$ элементов обозначается через $P_n$. По определению имеем $P_n = A_n^n$. С помощью формулы для вычисления $A_n^k$ сл.8 получаем формулу для вычисления $P_n$:

$$P_n = n!.$$

Две перестановки из $n$ элементов отличаются друг от друга только порядком элементов.
Например, количество способов, которыми можно расставить на полке собрание сочинений из 9 томов, равно $P_9 = 9! = 362880$.

Пусть $X$ – конечное множество из $n$ элементов, где $n \geq 1$.

**Определение**

*Сочетанием* из $n$ элементов по $k$ элементов называется любое подмножество множества $X$, содержащее $k$ элементов.

Количество сочетаний из $n$ элементов по $k$ элементов обозначается через $C_n^k$. Два сочетания из $n$ элементов по $k$ элементов отличаются друг от друга только составом элементов. Докажем, что

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Для этого заметим, что из каждого сочетания, переставляя произвольным образом его элементы, можно получить $P_k$ различных перестановок.
При этом множества перестановок, полученных из различных сочетаний, имеют пустое пересечение.
Так как каждое размещение получается из некоторого сочетания, легко понять, что $A_n^k = C_n^k \cdot P_k$. Вспоминая формулы для $A_n^k$ (сл.8) и $P_k$ (сл.9), получаем требуемую формулу.
Полезно запомнить, что

$$C_n^0 = C_n^n = 1,\ C_n^1 = C_n^{n-1} = n,\ C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}.$$

Справедливы следующие равенства:

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$;
2. $C_n^{k-1} + C_n^k = C_{n+1}^k$;
3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$.

Первое свойство непосредственно получается из формулы сл.10.
Третье свойство следует из теоремы сл.7 с учетом того, что $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n$ равно числу всех подмножеств множества из $n$ элементов, расписанному как сумма количеств $k$-элементных подмножеств при $k = 0, 1, \ldots, n$.
Докажем второе свойство путем непосредственного вычисления:

$$C_n^{k-1} + C_n^k = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} + \frac{n!}{k!(n-k)!} =$$
$$= \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\left(\frac{1}{n-k+1} + \frac{1}{k}\right) = \frac{n!}{(k-1)!(n-k)!}\,\frac{k+n-k+1}{k(n-k+1)} =$$
$$= \frac{n!(n+1)}{(k-1)!k(n-k)!(n-k+1)} = \frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!} = C_{n+1}^k.$$

Расположим числа $C_n^k$ в виде треугольника:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0 & & & & & \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
$$

Используя свойство 2 сл.11 и формулы для $C_n^0$ и $C_n^n$ сл.10, получаем *треугольник Паскаля*

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
(x+y)^0 \\
x+y \\
x^2+2xy+y^2 \\
x^3+3x^2y+3xy^2+y^3
\end{array}
$$

Рассмотрим $(x+y)^n$ при $n=1$, $n=2$, $n=3$: $(x+y)^1 = x+y$, $(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$, $(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3$.
Сравнивая коэффициенты при $x^iy^j$ в правой части каждого равенства с соответствующей строкой треугольника Паскаля, приходим к формуле

**Бином Ньютона**

$$(x+y)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k}y^k + \ldots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n.$$

Докажем эту формулу по индукции. База индукции установлена.
Предположим, что формула имеет место при всех $0 < k \leq n$. Вычислим с использованием свойства 2 сл.11:

$$\begin{aligned}
(x+y)^{n+1} &= (x+y)^n(x+y) = \\
&= (x^n + C_n^1 x^{n-1}y + C_n^2 x^{n-2}y^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k}y^k + \ldots + C_n^{n-1}xy^{n-1} + y^n)(x+y) = \\
&= x^{n+1} + C_n^1 x^n y + C_n^2 x^{n-1}y^2 + \ldots + C_n^k x^{n-k+1}y^k + \ldots + C_n^{n-1}x^2y^{n-1} + xy^n + \\
&+ x^n y + C_n^1 x^{n-1}y^2 + C_n^2 x^{n-2}y^3 + \ldots + C_n^k x^{n-k}y^{k+1} + \ldots + C_n^{n-1}xy^n + y^{n+1} = \\
&= x^{n+1} + (C_n^1+1)x^n y + (C_n^2 + C_n^1)x^{n-1}y^2 + \ldots + (C_n^k + C_n^{k-1})x^{n-k+1}y^k + \\
&+ (1 + C_n^{n-1})xy^n + y^{n+1} = \\
&x^{n+1} + C_{n+1}^1 x^n y + C_{n+1}^2 x^{n-1}y^2 + \ldots + C_{n+1}^k x^{n-k+1}y^k + \ldots + C_{n+1}^1 xy^n + y^{n+1},
\end{aligned}$$

что и требуется доказать.

# Следствия биномиальной формулы

Расписывая по биномиальной формуле $(1+1)^n$, получаем еще одно доказательство свойства 3 сл.11.
Расписывая по биномиальной формуле $(1-1)^n$, получаем
$0 = C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^k C_n^k + \ldots + (-1)^n$, откуда

$$C_n^0 + C_n^2 + \ldots + C_n^{2m} + \ldots = C_n^1 + C_n^3 + \ldots + C_n^{2m+1} + \ldots$$

Здесь левая и правая часть содержат конечное число слагаемых, причем в левой части записаны все слагаемые вида $C_n^{2m}$, где $0 \leq 2m \leq n$, а в правой части – все слагаемые вида $C_n^{2m+1}$, где $1 \leq 2m+1 \leq n$.

# Краткая запись суммы нескольких слагаемых

## Определение

Сумма чисел $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ сокращенно записывается в виде $\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$.

Здесь $a_j$ – общий вид слагаемого, $j$ – индекс суммирования.

Например, биномиальная формула Ньютона может быть записана в виде $(x+y)^n = \sum\limits_{j=0}^{n} C_n^j x^{n-j} y^j$. Легко видеть, что $\sum\limits_{j=1}^{n}(a_j + b_j) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$; $\sum\limits_{j=1}^{n}(a + b_j) = na + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$; $\sum\limits_{j=1}^{n}(ta_j) = t\left(\sum\limits_{j=1}^{n} a_j\right)$.
Условие на индекс суммирования может быть выражено в виде неравенства или системы неравенств. Например, равенство на сл.14 может быть записано как $\sum\limits_{0 \le j \le n/2} C_n^{2j} = \sum\limits_{0 \le j \le (n-1)/2} C_n^{2j+1}$.

Если имеется набор чисел $a_{j\ell}$ $(j = 1, 2, \ldots, k,\ \ell = 1, 2, \ldots, m)$, то сумму всех этих чисел можно записать двумя способами: $\sum\limits_{j=1}^{k} \sum\limits_{\ell=1}^{m} a_{j\ell} = \sum\limits_{\ell=1}^{m} \sum\limits_{j=1}^{k} a_{j\ell}$.

Говорят, что в двойной сумме можно изменить порядок суммирования.

# Доказательство

Расположим элементы $a_{j\ell}$ в виде таблицы
$$\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1m} & s_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2m} & s_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{km} & s_k \\ t_1 & t_2 & \ldots & t_m & \end{array}$$
и обозначим через $s_j$ сумму всех чисел в $j$-й строке, а через $t_\ell$ сумму всех чисел в $\ell$-м столбце этой таблицы. Тогда

$$\sum_{j=1}^{k}\sum_{\ell=1}^{m} a_{j\ell} = \sum_{j=1}^{k}(a_{j1} + a_{j2} + \ldots + a_{jm}) = \sum_{j=1}^{k} s_j$$ и

$$\sum_{\ell=1}^{m}\sum_{j=1}^{k} a_{j\ell} = \sum_{\ell=1}^{m}(a_{1\ell} + a_{2\ell} + \ldots + a_{k\ell}) = \sum_{\ell=1}^{m} t_\ell.$$ Таким образом, каждая сумма равна сумме всех элементов записанной таблицы: в первой сначала вычисляются суммы в каждой строке, затем складываются, а во второй сначала вычисляются суммы в столбцах, затем складываются.

**Определение**

Произведение чисел $a_1 a_2 \dots a_n$ сокращенно записывается в виде $\prod\limits_{j=1}^{n} a_j$.

Например, $n! = \prod\limits_{j=1}^{n} j$, $A_n^k = \prod\limits_{j=n-k+1}^{n} j$.

Легко видеть, что $\prod\limits_{j=1}^{n}(a_j b_j) = \prod\limits_{j=1}^{n} a_j \prod\limits_{j=1}^{n} b_j$; $\prod\limits_{j=1}^{n}(ab_j) = a^n \prod\limits_{j=1}^{n} b_j$.

Если имеется набор чисел $a_{j\ell}$ $(j = 1, 2, \dots, k,\ \ell = 1, 2, \dots, m)$, то произведение всех этих чисел можно записать двумя способами: $\prod\limits_{j=1}^{k}\prod\limits_{\ell=1}^{m} a_{j\ell} = \prod\limits_{\ell=1}^{m}\prod\limits_{j=1}^{k} a_{j\ell}$. Говорят, что в двойном произведении можно изменить порядок умножения.

Пусть $X$ – конечное множество из $n$ элементов, где $n \geq 1$.

**Определение**

Иногда приходится рассматривать наборы элементов, в которых порядок следования несуществен, но один и тот же элемент может встречаться несколько раз. Такие объекты называют *сочетаниями с повторениями* или *мультимножествами*.

*Сочетанием с повторениями* из $n$ элементов по $k$ элементов называется любое мультимножество из элементов множества $X$, содержащее $k$ элементов с учетом повторения.

Например, при $X = \{a, b, c, d\}$ сочетаниями с повторениями из $4$ по $10$ будут $(ababccdacd) = (aaabbccccdd)$ и $(aaabbbbddd)$.

Число сочетаний с повторениями из $n$ по $k$ обозначается через $C_{(n)}^{k}$.

Чтобы получить формулу для $C^k_{(n)}$, сопоставим сочетанию с повторениями из $n$ по $k$, в котором одинаковые элементы стоят подряд, сочетание с повторениями, полученное добавлением разделителя "$|$" между группами из разных элементов. Это будет сочетание с повторениями из $n$ по $n+k-1$. Например, $(aaabbcccdd)$ сопоставляется $(aaa|bb|ccc|dd)$, а $(aaabbbbddd)$ – $(aaa|bbbb||ddd)$.
Таким образом, каждому сочетанию с повторениями из $n$ по $k$ ставится в соответствие расстановка $n-1$ разделителя на $n+k-1$ мест. Получается биекция между множеством всех сочетаний с повторениями из $n$ по $k$ и множеством способов расставить $n-1$ разделитель на $n+k-1$ место. Последнее число равно числу сочетаний $C^{n-1}_{n+k-1}$. Итак,

**Формула для числа сочетаний с повторениями из $n$ по $k$:**

$$C^k_{(n)} = C^{n-1}_{n+k-1}.$$

Например, $C^{10}_{(4)} = C^3_{13} = \dfrac{13!}{10! \cdot 3!} = \dfrac{13 \cdot 12 \cdot 11}{6} = 13 \cdot 22 = 286.$

# Примеры

## Пример 1

Флаг составляется из 13 полос красного, белого и зеленого цвета, причем любые две соседние полосы должны быть разных цветов. Сколькими способами это можно сделать?

Первая полоса может быть любого из трех цветов. Вторая может быть любого цвета из двух оставшихся. Таким образом, две первые полосы можно выбрать $3 \cdot 2 = 6$ способами. Каждая следующая полоса также может выбрана двумя способами. Поэтому общее число способов равно $3 \cdot 2^{12} = 3 \cdot 4096 = 12288$.

## Пример 2

Сколько существует положительных целых чисел, меньших чем $10^n$, в записи которых в десятичной системе цифры расположены в неубывающем порядке?

Запись такого числа не может содержать цифры $0$ и может рассматриваться как сочетание с повторениями из 9 (множества цифр $\{1, \ldots, 9\}$) по $n$. Таким образом, указанное число равно $C_{(9)}^{n} = C_{n+8}^{8}$.