# Понятие ряда

<u>Опр</u>. Выражение вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

называется рядом;

$u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ - членами ряда.

Если $u_n$ – числа, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется числовым.

Если $u_n$ – функции, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется функциональным.

# Примеры 1-4 числовых рядов

Примеры 1-4.

1) $1+1+1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}1$

4) $1-1+1-1+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$

2) $1+3+5+7+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(2n-1)$

3) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$

# Понятие частичной суммы ряда

Опр. Сумма $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$ конечного числа $n$ первых членов ряда называется $n$-частичной суммой ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

$$S_1 = u_1, \;\; S_2 = u_1 + u_2, \ldots$$

$$S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \ldots$$

$\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

# Понятие суммы ряда и сходимости ряда

Опр. Если существует **конечный** предел

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется сходящимся.

Число $S$ называется суммой ряда.

Если этого предела не существует, то ряд называется расходящимся.

# Сходимость ряда и сумма ряда. Задача 1

Задача 1. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$$

и найти его сумму.

Решение.

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = b_1 + b_1 q + b_1 q^2 + \ldots + b_1 q^{n-1} + \cdots -$$

бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $b_1 = 1, q = \frac{1}{2}$.

# Сходимость ряда и сумма ряда. Задача 1

$$u_n = b_1 q^{n-1}$$

$$S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}};$$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(2 - \frac{1}{2^{n-1}}\right) =$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}} =$$

# Сходимость ряда и сумма ряда. Задача 1

$$= 2 - \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \left[ \frac{1}{\infty} \right] = 2 - 0 = 2$$

Ответ: ряд сходится по определению сходимости ряда и его сумма равна $S = 2$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия представляет сходящийся ряд!

# Задача 2 на сходимость числового ряда

Задача 2. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = 1 + 1 + 1 + \ldots + 1 + \ldots$$

Решение.

$$S_n = \sum_{n=1}^{n} u_n = n \Rightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$$

Ответ: ряд расходится по определению сходимости ряда.

# Независимость сходимости ряда от конечного числа его членов

Теорема 1. На сходимость ряда не влияет добавление (отбрасывание) **конечного** числа слагаемых.

Сходящиеся ряды можно почленно складывать, вычитать, умножать на константу.

При этом суммы новых рядов получаются из сумм старых рядов этими же действиями.

# Умножение членов ряда на константу

Теорема 2. Если ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *сходится* и его сумма равна $S$, то ряд $\sum_{n=1}^{\infty} cu_n$ тоже *сходится* и его сумма равна $cS$.

Теорема 3. Если ряды $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ , $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ *сходятся* и их суммы равны $S, T$ соответственно,
то ряд $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ тоже *сходится* и его сумма равна $S \pm T$.

# Необходимый признак сходимости ряда

Теорема 4 (необходимый признак сходимости ряда).

Если ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

*сходится,*

то общий член ряда стремиться к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0$$

# Необходимый признак сходимости ряда

Следствие 1.

Если общий член ряда НЕ стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$$

то ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty} u_i = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots$$

РАСХОДИТСЯ.

# Необходимый признак сходимости ряда

Замечание 1. Необходимый признак сходимости используется ТОЛЬКО для установления факта расходимости ряда!

Замечание 2. Необходимый признак сходимости ряда не является достаточным.

Контрпример. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ расходится (покажем позже), хотя общий член ряда $u_n = \frac{1}{n}$ стремится к нулю.

# Необходимый признак сходимости ряда
# Задача 3

Задача 3. Исследовать на сходимость ряд

$$u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \ldots + \frac{n}{n+1} + \ldots$$

т.е ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1}$

# **Необходимый признак сходимости ряда Задача 3**

Решение.

$$u_n = \frac{n}{n+1} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \left[ \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n} \right] =$$

$$= 1 \neq 0$$

Ответ: Ряд расходится, т.к. нарушен необходимый признак сходимости.

# Сравнение рядов с неотрицательными членами

Теорема 7. Пусть имеем два ряда с неотрицательными членами:

$$(1) \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots, u_n \geq 0$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \ldots, v_n \geq 0$$

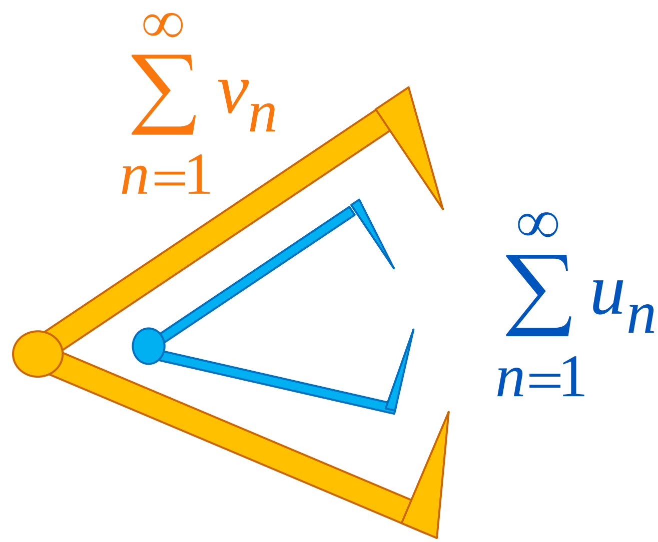
# Сравнение рядов с неотрицательными членами

Если $u_n \leq v_n$ и «больший» ряд (2) сходится,

то «меньший» ряд (1) тоже сходится.

сходимость

$$u_n \leq v_n$$



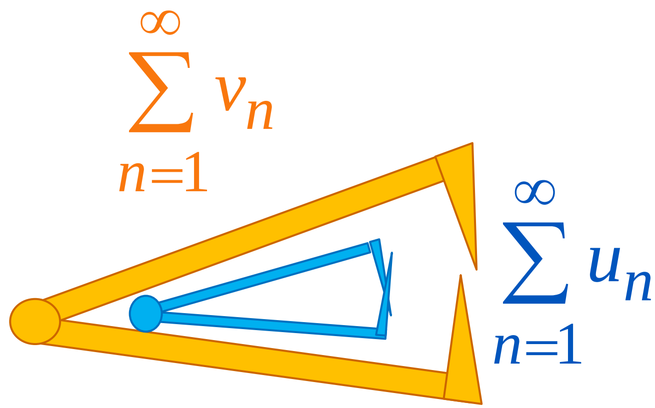
# Сравнение рядов с неотрицательными членами

Если $u_n \leq v_n$ и «больший» ряд (2) сходится,

то «меньший» ряд (1) тоже сходится.

сходимость

$$u_n \leq v_n$$



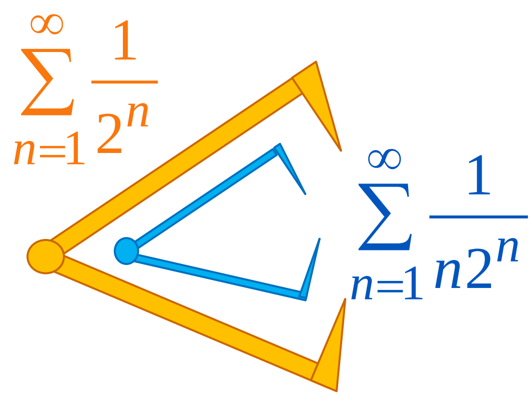
# Сравнение рядов с неотрицательными членами. Задача 4

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$.

Решение. $\dfrac{1}{n2^n} \le \dfrac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходится (?)

Ответ. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$

сходится по теореме 7.



# Сравнение рядов с неотрицательными членами. Задача 4

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$.

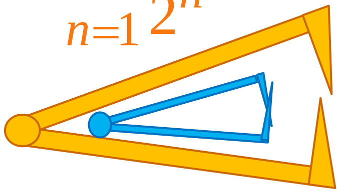
Решение. $\dfrac{1}{n2^n} \le \dfrac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$ сходится (?)

Ответ. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$

сходится по

теореме 7.

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2^n}$



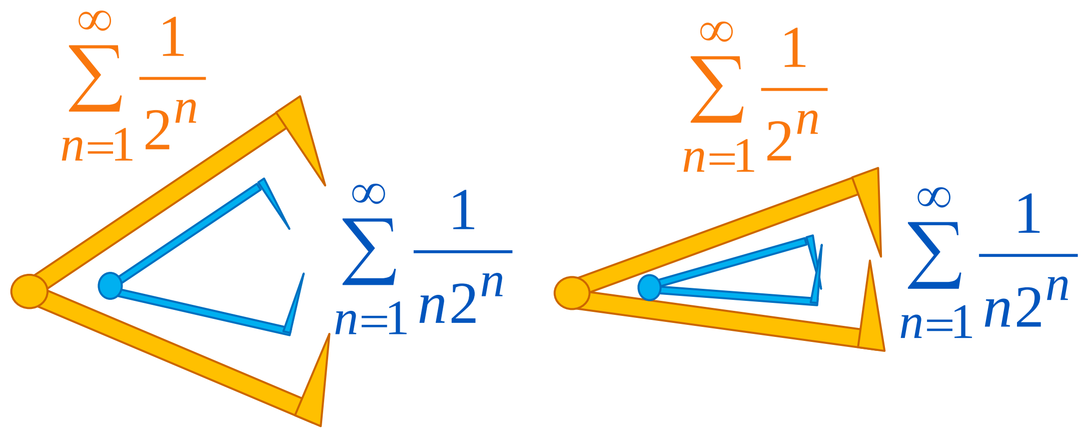
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n2^n}$

# Необходимый признак сходимости ряда Задача 4

Задача 4. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n2^n}$.

Решение. $\frac{1}{n2^n}\le\frac{1}{2^n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ сходится (?)

Ответ. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$




сходится по теореме 7.

# Сравнение рядов с неотрицательными членами

Теорема 8. Пусть имеем два ряда с неотрицательными членами:

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n \ldots, u_n \geq 0$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + \ldots + v_n \ldots, v_n \geq 0$$

# Сравнение рядов с неотрицательными членами

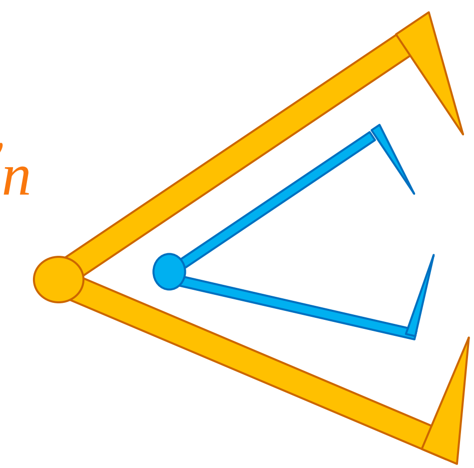
Если $u_n \le v_n$ и «меньший» ряд (1) расходится, то «больший» ряд (2) расходится.

сходимость

$$u_n \le v_n$$

расходимость

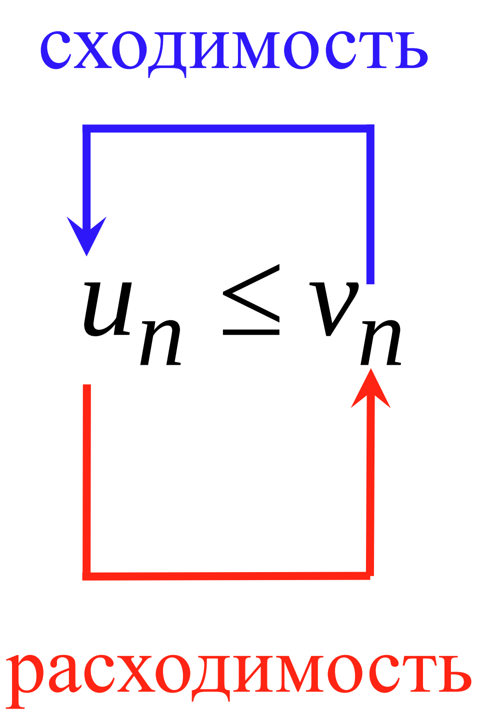
$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$$

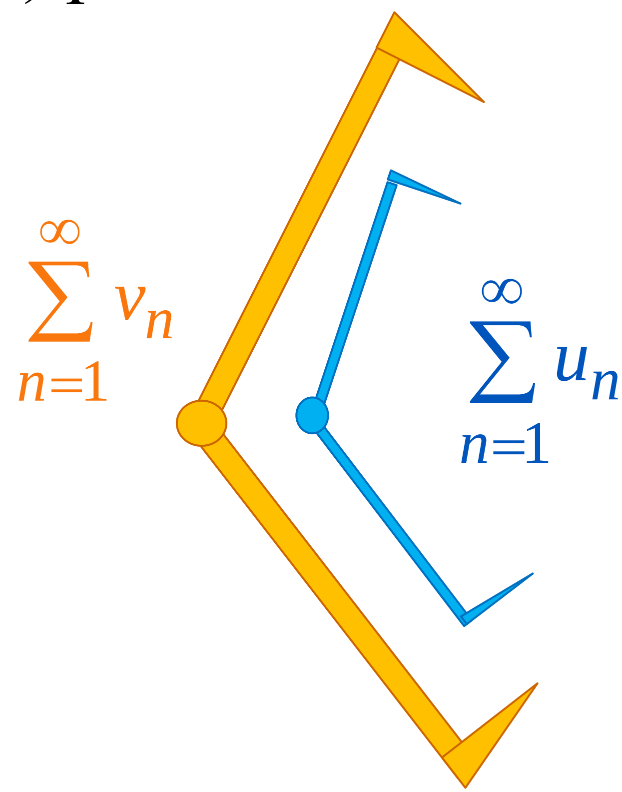


$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

# Сравнение рядов с неотрицательными членами

Если $u_n \le v_n$ и «меньший» ряд (1) расходится, то «больший» ряд (2) расходится.



# Сравнение рядов с неотрицательными членами

Доказательство следует из теоремы 7.

Доказательство нужно провести методом от противного (упр).

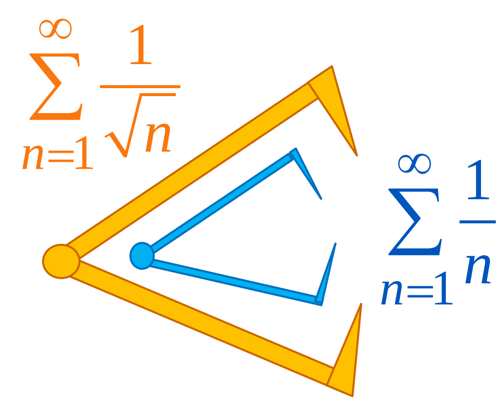
# Сравнение рядов с неотрицательными членами. Задача 5

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Ответ. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

расходится по теореме 8.



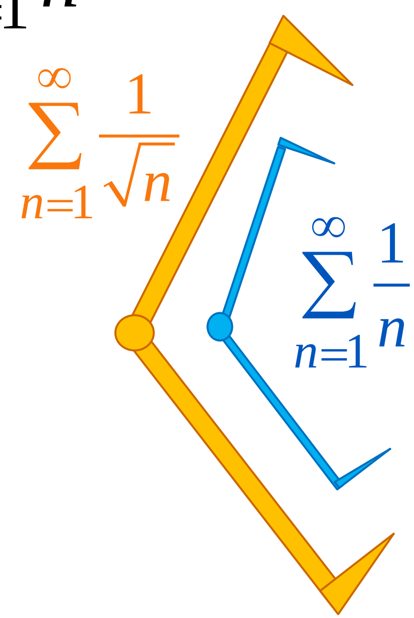
# Необходимый признак сходимости ряда
# Задача 5

Задача 5. Исследовать на сходимость ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

Решение. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

Ответ. Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$

расходится по теореме 8.

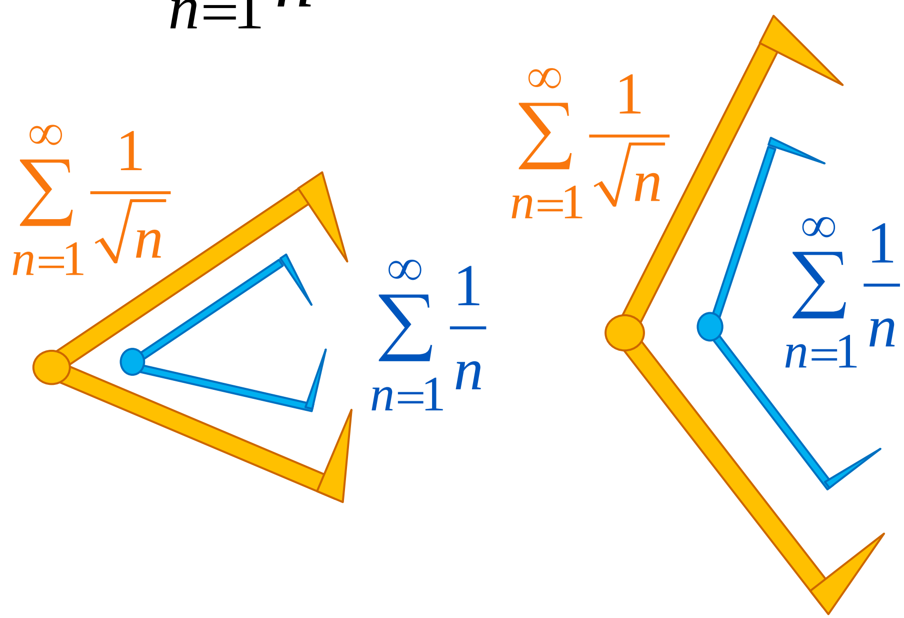


# Необходимый признак сходимости ряда
# Задача 5

<u>Задача 5</u>. Исследовать на сходимость ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

<u>Решение</u>. $\frac{1}{\sqrt{n}} \geq \frac{1}{n}$, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ расходится.

<u>Ответ</u>. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$




расходится по теореме 8.