©2021 г. **Ю.В. Нагребецкая**, канд. физ.-мат. наук, **В.Г. Панов**, канд. физ.-мат. наук
Уральский федеральный университет, Екатеринбург,
Институт промышленной экологии УрО РАН, Екатеринбург

ЧИСЛО СПЕКТРОВ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ФАКТОРОВ В БИНАРНОМ ОТКЛИКЕ

На основе булевой модели бинарной теории достаточных причин введено понятие частичного взаимодействия факторов в данном бинарном отклике и понятие спектра взаимодействия факторов в данном отклике. Исследованы некоторые свойства спектра взаимодействия.

Ключевые слова: булева алгебра, действие группы, граф, инвариант действия группы.

Yu.V. Nagrebetskaya, V.G. Panov
Ural Federal University, Yekaterinburg,
Institute of Industrial Ecology of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg

NUMBER OF SPECTRA OF INTERACTION OF FACTORS IN BINARY RESPONSE

On the basis of the Boolean model of the binary theory of sufficient causes, the concept of partial interaction of factors in this binary response and the concept of the spectrum of interaction of factors in this response are introduced. Some properties of the interaction spectrum are investigated.

Key words: Boolean algebra, group action, graph, group action invariant.

Введение. Понятие взаимодействия действующих факторов является одним из важнейших при оценке результата их совместного действия. Важность этого понятия связана, очевидно, с тем, что совместное действие нескольких агентов может быть совсем не таким, каким его можно было бы ожидать на основе знания их изолированного действия. Поэтому, в частности, в описаниях всех лекарственных средств обязательно указывается их взаимодействие с другими лекарственными и нелекарственными агентами (см., например, [1]). Однако формально-математическое описание задачи оценки совместного действия (взаимодействия) представляет значительные сложности, связанные с многообразием и разнородностью видов действующих факторов. Однако для сравнительно простого случая совместного действия двухуровневых факторов и двухуровневого отклика (результирующей функции) такая модель может быть построена, и она оказывается отнюдь не такой простой, как можно было бы ожидать *a priori* [2-8]. Важно также отметить, что случай двухуровневых переменных является не искусственным упрощением реальной ситуации, а одной из тех моделей общего описания причинности, которые рассматриваются в эпидемиологии [9-12] и философии [13, 14].

В рамках этой модели, основным математическим аппаратом которой является теория булевых алгебр и булевых функций, задача описания взаимодействия бинарных факторов была поставлена как математическая проблема, а также получено её решение в виде процедуры построения определенных алгебраических объектов [2-4]. Отметим, что построенная теория описывает, в частности, типологизацию взаимодействия *всех* действующих бинарных факторов в данном опыте. Гибкость построенной теории позволяет поставить проблему описания совместного действия в более широком контексте. А именно, кроме понятия взаимодействия *всех* факторов в данном отклике в рамках построенного формализма можно определить понятие взаимодействия для *некоторого множества факторов* в этом отклике, которое позволяет понять структуру взаимодействия факторов в отклике более полно.

Необходимые понятия и определения. Булева алгебра функций от булевых переменных $x_1,\ldots,x_n$ будет обозначаться $\mathrm{B}(x_1,\ldots,x_n)$. Постоянные булевы функции, тождественно равные 0 и 1, будут обозначаться $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}$ соответственно. В работах [5–7] было введено и исследовано понятие степени $\mu_{f,k}$ совместного действия *k* бинарных переменных из $x_1,...,x_n$ в бинарной функции отклика $f \in B(x_1,\ldots,x_n)$. На основе этого понятия естественно вводится следующее

Определение 1. Спектром совместного действия факторов $x_1,\ldots,x_n$ в отклике $f \in B(x_1,\ldots,x_n)$ назовем набор $M_f = (\mu_{f,1},...,\mu_{f,n})$.

Так как степень $\mu_{f,k}$ инвариантна относительно действия группы симметрий эксперимента, которая является группой G_n автоморфизмов булева куба B^n [4], то и спектр M_f является таким же инвариантом. При этом в рамках рассматриваемого булева формализма теории достаточных причин орбиты действия группы G_n на $B(x_1,\ldots,x_n)$ являются *типами* совместного действия бинарных факторов. Следовательно, спектр M_f корректно определен на типах совместного действия и является полной характеристикой совместного действия факторов в данном отклике.

В [8] приведено следующее свойство элементов спектра данного отклика.

Теорема 1. Для любого отклика $f \in B(x_1,\ldots,x_n)$ существует единственное число $m_f \in \{1,\ldots,n\}$ такое, что выполняются неравенства

(1) $\mu_{f,i} = i$ для любого $i \in \{0,1,\ldots,m_f\}$;

(2) $\mu_{f,j} \le \mu_{f,j-1}$ для любого $j \in \{m_f+1,\ldots,n\}$.

При этом подразумевается, что при $m_f = n$ неравенство (2) выполняется автоматически, так как в этом случае множество $\{m_f+1,\ldots,n\}$ пусто.

Основные результаты. Рассмотрим последовательности, удовлетворяющие свойствам (1)–(2) из Теоремы 1.

Определение 2. Будем говорить, что последовательность $M = (m_1,...,m_n)$ чисел $1 \le m_i \le n$ обладает свойством спектра, если существует единственное число $m \in \{1,\ldots,n\}$ такое, что выполняются неравенства

(1) $m_i = i$ для любого $i \in \{0,1,\ldots,m\}$;

(2) $m_j \le m_{j-1}$ для любого $j \in \{m+1,\ldots,n\}$.

Теорема 2. Для любого $n \in N$ число S_n последовательностей, обладающих свойством спектра равно

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1}\sum_{l=1}^{k+1} C_{k+1}^{l} C_{n-k-1}^{l-1} + 1$$

Здесь C_j^i − число сочетаний из *j* по *i*. При считаем, что $C_a^b = 0,$ если $a < b$.

Пример 1. Для *n* = 2 имеем следующий список спектров откликов:

Классы откликов	M_f	Классы откликов	M_f
$\langle x_1 x_2 \rangle$	(1, 2)	$\langle x_1 \rangle, \langle x_1 \vee x_2 \rangle$	(1, 0)
$\langle x_1 x_2 \vee \bar{x}_1 \bar{x}_2 \rangle$	(1, 1)	**1, 0**	(0, 0)

Пример 2. Для n = 3 имеем следующий список спектров откликов:

Классы откликов	M_f	Классы откликов	M_f
$\langle x_1x_2x_3 \rangle$	(1, 2, 3)	$\langle x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \rangle$	(1, 2, 2)
$\langle x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \rangle, \langle x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \rangle$ $\langle x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \rangle$ $\langle x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \rangle$	(1, 2, 1)	$\langle x_1x_2 \rangle, \langle x_1x_2 \vee x_3 \rangle$ $\langle x_1x_2 \vee x_1x_3 \rangle$ $\langle x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3 \rangle$ $\langle x_1x_2 \vee \bar{x}_1x_3 \rangle$	(1, 2, 0)
$\langle x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2\bar{x}_3 \vee x_1\bar{x}_2\bar{x}_3 \rangle$ $\langle x_1x_2x_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \rangle$	(1, 1, 1)	$\langle x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \rangle$ $\langle x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_3 \rangle$ $\langle x_1x_2 \vee \bar{x}_1\bar{x}_2 \vee x_1x_3 \rangle$	(1, 1, 0)
$\langle x_1 \rangle, \langle x_1 \vee x_2 \rangle, \langle x_1 \vee x_2 \vee x_3 \rangle$ $\langle x_1x_3 \vee x_2x_3 \vee \bar{x}_1x_2 \vee x_1\bar{x}_2 \vee \vee \bar{x}_2\bar{x}_3 \vee \bar{x}_1\bar{x}_3 \rangle$	(1, 0, 0)	**1, 0**	(0, 0, 0)

Из Теорем 1–2 следует основной результат настоящей работы.

Следствие. Для любого $n \in \mathrm{N}$ число всевозможных спектров для откликов, зависящих от n факторов меньше или равно S_n.

Пример 3. Для n = 2 число S_2 последовательностей, обладающих свойством спектра равно

$$S_2 = \sum_{k=0}^{1}\sum_{l=1}^{k+1} C_{k+1}^{l} C_{1-k}^{l-1} + 1 = \sum_{l=1}^{1} C_1^l C_1^{l-1} + \sum_{l=1}^{2} C_2^l C_0^{l-1} + 1 = C_1^1 C_1^0 + \left(C_2^1 C_0^0 + C_2^2 C_0^1\right) + 1 = 4$$

Следовательно, число всевозможных спектров для n = 2 меньше или равно 4, что вполне согласуется с результатом из Примера 1.

Пример 4. Для n = 3 число S_3 последовательностей, обладающих свойством спектра равно

$$S_3 = \sum_{k=0}^{2}\sum_{l=1}^{k+1} C_{k+1}^{l} C_{2-k}^{l-1} + 1 = \sum_{l=1}^{1} C_1^l C_2^{l-1} + \sum_{l=1}^{2} C_2^l C_1^{l-1} + \sum_{l=1}^{3} C_3^l C_0^{l-1} + 1 =$$
$$= C_1^1 C_2^0 + \left(C_2^1 C_1^0 + C_2^2 C_1^1\right) + \left(C_3^1 C_0^0 + C_3^2 C_0^1 + C_3^3 C_0^2\right) + 1 = 8$$

Следовательно, число всевозможных спектров для n = 3 меньше или равно 8, что тоже согласуется с результатами из Примера 2.

Обсуждение. Как видно из Примеров 1–4, число всевозможных спектров для откликов, зависящих от двух или трех факторов, совпадает с числом последовательностей длины два или три соответственно, обладающих свойством спектра. Из теоремы 2 отсюда следует что для n = 2 или n = 3 для любой последовательности M, обладающей свойством спектра, найдется хотя бы один отклик f такой, что $M_f = M$. Этот факт продемонстрирован в Примерах 1, 2. На основании этих рассуждений можно выдвинуть следующее предположение.

<u>Гипотеза 1</u>. Для любого $n \in \mathrm{N}$ и для любой последовательности $M = (m_1, ..., m_n)$ чисел $1 \le m_i \le n$, обладающей свойством спектра, существует хотя бы один отклик f такой, что $M_f = M$.

Если Гипотеза 1 справедлива, то можно не только оценить сверху, но и точно вычислить число спектров, а именно, будет справедлива

Гипотеза 2. Для любого $n \in \mathrm{N}$ число всевозможных спектров для откликов, зависящих от *n* факторов равно S_n.

Заключение. Развитие булева формализма бинарной теории достаточных причин позволяет:

1) ввести понятия спектра данного отклика, зависящего от *n* факторов, вполне характеризующее взаимодействие факторов в данном отклике;

2) показать, что понятие спектра инвариантно относительно группы симметрий эксперимента и корректно определено для типа взаимодействия;

3) произвести оценку сверху числа всевозможных спектров взаимодействия в откликах, зависящих от данного числа факторов.

4) сформулировать гипотезу, в случае справедливости которой можно точно подсчитать число спектров откликов, зависящих от данного числа факторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Машковский М.Д. Лекарственные средства. М.: Изд-во «Новая волна», 2012. 1216 с.
2. Панов В.Г., Нагребецкая Ю.В. Алгебраическая трактовка двухфакторной теории достаточных причин // Труды СПИИРАН. 2013. №26(3). С. 277-296.
3. Panov V.G., Nagrebetskaya J.V. Boolean algebras and classification of interactions in sufficient-component cause model // Int. J. Pure Appl. Math. 2015. Vol. 98(2). P. 239-259.
4. Panov V.G., Nagrebetskaya J.V. Classification of combined action of binary factors and Coxeter groups // J. Discr. Math. Sci. & Cryptography. 2018. Vol. 21(3). P. 661-677.
5. Нагребецкая Ю. В., Панов, В.Г. Степень взаимодействия бинарных факторов в теории достаточных причин // Системный анализ в медицине: материалы XIII междунар. конф., Благовещенск, 19-20 сентября 2019 г. Благовещенск: ДНЦ ФПД, 2019. С. 31–34.
6. Нагребецкая Ю.В., Панов В.Г. Обобщение понятия взаимодействия n факторов в теории достаточных причин и его свойства // Системный анализ в медицине: материалы XIII междунар. конф., Благовещенск, 19-20 сентября 2019 г. Благовещенск: ДНЦ ФПД, 2019. С. 35–38.
7. Nagrebetskaya J.V., Panov V.G. Joint action of binary factors in the sufficient causes theory and its classification// Int. J. Innovative Technology and Exploring Engineering. 2019. Vol. 9(1). P. 2146-2152.
8. Нагребецкая Ю.В., Панов В.Г. Максимальное взаимодействие бинарных факторов // Системный анализ в медицине: материалы XIV междунар. конф., Благовещенск, 15-16 октября 2020 г. Благовещенск: ДНЦ ФПД, 2020. С. 28–32.
9. Rothman K. Causes. Am. J. Epidemiol. 1976. Vol. 104(6). P. 587-592.
10. Miettinen O. S. Causal and preventive interdependence: Elementary principles // Scand. J. Work. Environ. Health. 1982. Vol. 8. P. 159-168.
11. Greenland S., Poole Ch. Invariants and noninvariants in the concept of interdependent effects // Scand. J. Work Environ. Health. 1988. Vol. 14. P. 125-129.
12. VanderWeele T.J., Richardson T.S. General theory for interactions in sufficient cause models with dichotomous exposures // Ann. Statistics. 2012. Vol.40. P. 2128-2161.
13. Mackie J. L. The cement of the Universe: a study of causation. Oxford: Clarendon Press, 1980.
14. Lewis D. Philosophical papers. Oxford, UK: Oxford University Press. 1983 Vol.2.

I.V.Nagrebetckaia@urfu.ru, vpanov@ecko.uran.ru