РЕШЕТКА МНОГООБРАЗИЙ ИМПЛИКАТИВНЫХ ПОЛУГРУПП

Б.М. Верников, С.В. Гусев, Х.П.Санкаппанавар

Уральский федеральный университет, Екатеринбург
State University of New York, New Paltz

Мальцевские чтения

Новосибирск, 19–22 ноября 2018

Определение

Алгеброй Де Моргана называется алгебра $\langle A; \vee, \wedge, 0, 1, ^c \rangle$ с бинарными операциями $\vee$, $\wedge$, унарной операцией ^{c} и 0-арными операциями 0, 1 такими, что:

1) $\langle A; \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ — ограниченная дистрибутивная решетка;
2) $(x^c)^c \approx x$;
3) $(x \vee y)^c \approx x^c \wedge y^c$;
4) $(x \wedge y)^c \approx x^c \vee y^c$.

Если, кроме того,

5) $x^c \vee x \approx 1$ и/или $x^c \wedge x \approx 0$,

то A — *булева алгебра*.

Определение

Алгеброй Де Моргана называется алгебра $\langle A; \vee, \wedge, 0, 1, ^c \rangle$ с бинарными операциями $\vee$, $\wedge$, унарной операцией ^{c} и 0-арными операциями 0, 1 такими, что:

1) $\langle A; \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ — ограниченная дистрибутивная решетка;
2) $(x^c)^c \approx x$;
3) $(x \vee y)^c \approx x^c \wedge y^c$;
4) $(x \wedge y)^c \approx x^c \vee y^c$.

Если, кроме того,

5) $x^c \vee x \approx 1$ и/или $x^c \wedge x \approx 0$,

то A — *булева алгебра*.

Переход к сигнатуре $\{\to, 0\}$

Булевы алгебры можно определить как алгебры в сигнатуре, состоящей из бинарной операции $\to$ и 0-арной операции 0, где $x \to y := (x \wedge y^c)^c$.

$(x^c := x \to 0,\ x \vee y := x^c \to y,\ x \wedge y := (x^c \vee y^c)^c,\ 1 := 0^c)$

Рассмотрим ту же операцию в классе алгебр Де Моргана.

Теорема (Sankappanavar, 2012)

Класс алгебр де Моргана термально эквивалентен классу алгебр в сигнатуре $\{\to, 0\}$, удовлетворяющих тождествам:

1) $(x \to y) \to z \approx ((z' \to x) \to (y \to z)')'$,
2) $(x \to y) \to x \approx x$,

где $\mathbf{u}' := \mathbf{u} \to 0$.

Если в тождестве 2) положить $x = y = 0$, получим тождество $0'' \approx 0$.

Булевы алгебры можно определить как алгебры в сигнатуре, состоящей из бинарной операции $\to$ и 0-арной операции 0, где $x \to y := (x \wedge y^c)^c$.

$(x^c := x \to 0,\ x \vee y := x^c \to y,\ x \wedge y := (x^c \vee y^c)^c,\ 1 := 0^c)$

Рассмотрим ту же операцию в классе алгебр Де Моргана.

Теорема (Sankappanavar, 2012)

Класс алгебр де Моргана термально эквивалентен классу алгебр в сигнатуре $\{\to, 0\}$, удовлетворяющих тождествам:

1) $(x \to y) \to z \approx ((z' \to x) \to (y \to z)')'$,
2) $(x \to y) \to x \approx x$,

где $\mathbf{u}' := \mathbf{u} \to 0$.

Если в тождестве 2) положить $x = y = 0$, получим тождество $0'' \approx 0$.

Переход к сигнатуре $\{\to, 0\}$

Булевы алгебры можно определить как алгебры в сигнатуре, состоящей из бинарной операции $\to$ и 0-арной операции 0, где $x \to y := (x \wedge y^c)^c$.

$(x^c := x \to 0,\ x \vee y := x^c \to y,\ x \wedge y := (x^c \vee y^c)^c,\ 1 := 0^c)$

Рассмотрим ту же операцию в классе алгебр Де Моргана.

Теорема (Sankappanavar, 2012)

Класс алгебр де Моргана термально эквивалентен классу алгебр в сигнатуре $\{\to, 0\}$, удовлетворяющих тождествам:

1) $(x \to y) \to z \approx ((z' \to x) \to (y \to z)')'$,
2) $(x \to y) \to x \approx x$,

где $\mathbf{u}' := \mathbf{u} \to 0$.

Если в тождестве 2) положить $x = y = 0$, получим тождество $0'' \approx 0$.

Определение (Sankappanavar)

Алгебра $\langle A; \to, 0\rangle$, сигнатура которой состоит из бинарной операции $\to$ и 0-арной операции 0, удовлетворяющая тождествам

$$(x \to y) \to z \approx ((z' \to x) \to (y \to z)')' \quad \text{и} \quad 0'' \approx 0,$$

где $\mathbf{u}' := \mathbf{u} \to 0$, называется *импликативным группоидом с 0* или *импликативным зруппоидом*.

Многообразие всех импликативных зруппоидов обозначается через **IZ**.

Глобальная цель: описать решетку подмногообразий многообразия **IZ**.
Один из подходов: рассматривать важные и интересные подмногообразия в **IZ**.

Определение (Sankappanavar)

Алгебра $\langle A; \to, 0\rangle$, сигнатура которой состоит из бинарной операции $\to$ и 0-арной операции 0, удовлетворяющая тождествам

$$(x \to y) \to z \approx ((z' \to x) \to (y \to z)')' \quad \text{и} \quad 0'' \approx 0,$$

где $\mathbf{u}' := \mathbf{u} \to 0$, называется *импликативным группоидом с 0* или *импликативным зруппоидом*.

Многообразие всех импликативных зруппоидов обозначается через **IZ**.

Глобальная цель: описать решетку подмногообразий многообразия **IZ**. Один из подходов: рассматривать важные и интересные подмногообразия в **IZ**.

Определение

Импликативной полугруппой называется импликативный зруппоид, удовлетворяющий тождеству

$$(x \to y) \to z \approx x \to (y \to z).$$

Таким образом, импликативная полугруппа — это полугруппа (с бинарной операцией $\to$) с дополнительной 0-арной операцией 0, удовлетворяющая тождествам

$$(x \to y) \to z \approx ((z' \to x) \to (y \to z)')' \quad \text{и} \quad 0'' \approx 0,$$

где $\mathbf{u}' := \mathbf{u} \to 0$.

Переобозначим операции: вместо $x \to y$ будем писать xy, а 0-арную операцию обозначим через ω. Поскольку бинарная операция ассоциативна, скобок в произведении более чем двух сомножителей ставить не будем. Тогда тождества, задающие многообразие импликативных полугрупп, примут следующий вид:

$$xyz \approx z\omega xyz\omega^2 \quad \text{и} \quad \omega^3 \approx \omega.$$

Обозначим многообразие, заданное этими тождествами, через **IS**.

Задача: описать решетку $L(\mathbf{IS})$.

Определение

Импликативной полугруппой называется импликативный зруппоид, удовлетворяющий тождеству

$$(x \to y) \to z \approx x \to (y \to z).$$

Таким образом, импликативная полугруппа — это полугруппа (с бинарной операцией $\to$) с дополнительной 0-арной операцией 0, удовлетворяющая тождествам

$$(x \to y) \to z \approx ((z' \to x) \to (y \to z)')' \quad \text{и} \quad 0'' \approx 0,$$

где $\mathbf{u}' := \mathbf{u} \to 0$.

Переобозначим операции: вместо $x \to y$ будем писать xy, а 0-арную операцию обозначим через ω. Поскольку бинарная операция ассоциативна, скобок в произведении более чем двух сомножителей ставить не будем. Тогда тождества, задающие многообразие импликативных полугрупп, примут следующий вид:

$$xyz \approx z\omega xyz\omega^2 \quad \text{и} \quad \omega^3 \approx \omega.$$

Обозначим многообразие, заданное этими тождествами, через **IS**.

Задача: описать решетку $L(\mathbf{IS})$.

Определение

Импликативной полугруппой называется импликативный зруппоид, удовлетворяющий тождеству

$$(x \to y) \to z \approx x \to (y \to z).$$

Таким образом, импликативная полугруппа — это полугруппа (с бинарной операцией $\to$) с дополнительной 0-арной операцией 0, удовлетворяющая тождествам

$$(x \to y) \to z \approx ((z' \to x) \to (y \to z)')' \quad \text{и} \quad 0'' \approx 0,$$

где $\mathbf{u}' := \mathbf{u} \to 0$.

Переобозначим операции: вместо $x \to y$ будем писать xy, а 0-арную операцию обозначим через ω. Поскольку бинарная операция ассоциативна, скобок в произведении более чем двух сомножителей ставить не будем. Тогда тождества, задающие многообразие импликативных полугрупп, примут следующий вид:

$$xyz \approx z\omega xyz\omega^2 \quad \text{и} \quad \omega^3 \approx \omega.$$

Обозначим многообразие, заданное этими тождествами, через **IS**.

Задача: описать решетку $L(\mathbf{IS})$.

Определение

Импликативной полугруппой называется импликативный зруппоид, удовлетворяющий тождеству

$$(x \to y) \to z \approx x \to (y \to z).$$

Таким образом, импликативная полугруппа — это полугруппа (с бинарной операцией $\to$) с дополнительной 0-арной операцией 0, удовлетворяющая тождествам

$$(x \to y) \to z \approx ((z' \to x) \to (y \to z)')' \quad \text{и} \quad 0'' \approx 0,$$

где $\mathbf{u}' := \mathbf{u} \to 0$.

Переобозначим операции: вместо $x \to y$ будем писать xy, а 0-арную операцию обозначим через ω. Поскольку бинарная операция ассоциативна, скобок в произведении более чем двух сомножителей ставить не будем. Тогда тождества, задающие многообразие импликативных полугрупп, примут следующий вид:

$$xyz \approx z\omega xyz\omega^2 \quad \text{и} \quad \omega^3 \approx \omega.$$

Обозначим многообразие, заданное этими тождествами, через **IS**.

Задача: описать решетку $L(\mathbf{IS})$.

Определение

Импликативной полугруппой называется импликативный зруппоид, удовлетворяющий тождеству

$$(x \to y) \to z \approx x \to (y \to z).$$

Таким образом, импликативная полугруппа — это полугруппа (с бинарной операцией $\to$) с дополнительной 0-арной операцией 0, удовлетворяющая тождествам

$$(x \to y) \to z \approx ((z' \to x) \to (y \to z)')' \quad \text{и} \quad 0'' \approx 0,$$

где $\mathbf{u}' := \mathbf{u} \to 0$.

Переобозначим операции: вместо $x \to y$ будем писать xy, а 0-арную операцию обозначим через ω. Поскольку бинарная операция ассоциативна, скобок в произведении более чем двух сомножителей ставить не будем. Тогда тождества, задающие многообразие импликативных полугрупп, примут следующий вид:

$$xyz \approx z\omega xyz\omega^2 \quad \text{и} \quad \omega^3 \approx \omega.$$

Обозначим многообразие, заданное этими тождествами, через **IS**.

Задача: описать решетку $L(\mathbf{IS})$.

Положим $\mathbf{N} = \mathrm{var}\{xyz \approx \omega\}$ (здесь и ниже $\mathrm{var}\,\Sigma$ — многообразие, заданное системой тождеств Σ внутри $\mathbf{IS}$).

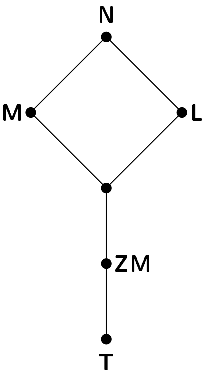
Импликативные полугруппы из $\mathbf{N}$ — это полугруппы с нулем, операция ω выделяет в них нулевой элемент. Таким образом, $\mathbf{N}$ — многообразие 3-ступенно нильпотентных полугрупп.

Положим $\mathbf{N} = \mathrm{var}\{xyz \approx \omega\}$ (здесь и ниже $\mathrm{var}\,\Sigma$ — многообразие, заданное системой тождеств Σ внутри $\mathbf{IS}$).

Импликативные полугруппы из $\mathbf{N}$ — это полугруппы с нулем, операция ω выделяет в них нулевой элемент. Таким образом, $\mathbf{N}$ — многообразие 3-ступенно нильпотентных полугрупп.

Положим $\mathbf{N} = \mathrm{var}\{xyz \approx \omega\}$ (здесь и ниже $\mathrm{var}\Sigma$ — многообразие, заданное системой тождеств Σ внутри $\mathbf{IS}$).

Импликативные полугруппы из $\mathbf{N}$ — это полугруппы с нулем, операция ω выделяет в них нулевой элемент. Таким образом, $\mathbf{N}$ — многообразие 3-ступенно нильпотентных полугрупп. Решетка $L(\mathbf{N})$ имеет вид



$\mathbf{T}$ — тривиальное многообразие, $\mathbf{ZM} = \mathrm{var}\{xy \approx \omega\}$,
$\mathbf{L} = \mathrm{var}\{xyz \approx x^2 \approx \omega\}$, $\mathbf{M} = \mathrm{var}\{xyz \approx \omega, xy \approx yx\}$.

Положим $\mathbf{B} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x\}$.

Лемма

Многообразие импликативных полугрупп состоит из связок (т.е. содержится в **B***) тогда и только тогда, когда оно состоит из моноидов, в которых нейтральный элемент выделяется операцией* ω*.*

Решетка многообразий идемпотентных моноидов описана Ш.Висмат в 1986 г. Используя это описание, можно проверить, что решетка $L(\mathbf{B})$ есть 3-элементная цепь $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{B}$, где $\mathbf{SL} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x, xy \approx yx\}$.

Лемма

$\mathbf{IS} = \mathbf{N} \vee \mathbf{B}$.

Положим $\mathbf{B} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x\}$.

Лемма

Многообразие импликативных полугрупп состоит из связок (т.е. содержится в $\mathbf{B}$*) тогда и только тогда, когда оно состоит из моноидов, в которых нейтральный элемент выделяется операцией* ω.

Решетка многообразий идемпотентных моноидов описана Ш.Висмат в 1986 г. Используя это описание, можно проверить, что решетка $L(\mathbf{B})$ есть 3-элементная цепь $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{B}$, где $\mathbf{SL} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x, xy \approx yx\}$.

Лемма

$\mathbf{IS} = \mathbf{N} \vee \mathbf{B}$.

Положим $\mathbf{B} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x\}$.

Лемма

Многообразие импликативных полугрупп состоит из связок (т.е. содержится в **B***) тогда и только тогда, когда оно состоит из моноидов, в которых нейтральный элемент выделяется операцией* ω.

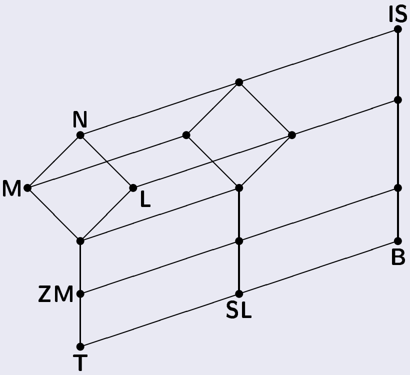
Решетка многообразий идемпотентных моноидов описана Ш.Висмат в 1986 г. Используя это описание, можно проверить, что решетка $L(\mathbf{B})$ есть 3-элементная цепь $\mathbf{T} \subset \mathbf{SL} \subset \mathbf{B}$, где $\mathbf{SL} = \mathrm{var}\{x^2 \approx x, xy \approx yx\}$.

Лемма

$\mathbf{IS} = \mathbf{N} \vee \mathbf{B}$.

Основной результат

Решетка $L(\mathbf{IS})$ имеет вид, изображенный на следующем рисунке:

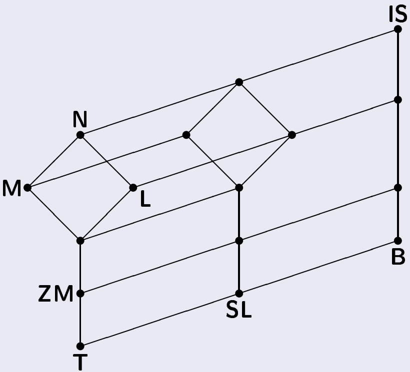


Следствие

Решетка $L(\mathbf{IS})$ не модулярна.

Основной результат

Решетка $L(\mathbf{IS})$ *имеет вид, изображенный на следующем рисунке:*



Следствие

Решетка $L(\mathbf{IS})$ *не модулярна.*

СПАСИБО ЗА ВНИМАНИЕ!