УДК 512.532.2

Б. М. Верников, М. В. Волков

РЕШЕТКИ НИЛЬПОТЕНТНЫХ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП. II*

Введение

Хорошо известно, что решетка всех многообразий полугрупп распадается в дизъюнктное объединение идеала **P**, состоящего из всех периодических многообразий, и главного фильтра **OC**, состоящего из всех надкоммутативных многообразий. Строение решетки **OC** описано в работе [1]. В решетке **P** можно выделить два обширных идеала, пересекающихся только по тривиальному многообразию: идеал **CR** всех вполне регулярных (в другой терминологии — клиффордовых) многообразий и идеал **Nil** всех нильмногообразий. Глубокие результаты о строении решетки **CR** получены в работе [2]. Известно, что эта решетка модулярна (см., напр., [3]), а ряд ее фрагментов полностью описан. В то же время о строении решетки **Nil** известно намного меньше. Некоторые частные результаты о "нижних этажах" этой решетки получены в [4]–[6]. В работе [7] показано, что в **Nil** имеется интервал, дуальный к решетке эквивалентностей на счетном множестве. Отсюда следует, что в **Nil** вкладывается произвольная не более чем счетная решетка (см., напр., [8, §IV.4]). По-видимому, именно из-за этого на протяжении длительного времени бытовало представление, что получить сколь-нибудь удовлетворительное описание решетки **Nil** в принципе невозможно.

Легко видеть, что нильпотентные многообразия образуют идеал в **Nil**. Свойства этого идеала во многом определяют свойства всей решетки **Nil**. (Можно показать, например, что решеточное тождество выполнено в решетке подмногообразий некоторого нильмногообразия тогда и только тогда, когда это тождество выполняется в идеале его нильпотентных подмногообразий.) Естественно поэтому начать изучение решетки **Nil** с рассмотрения идеала нильпотентных многообразий. Такое рассмотрение бы-

---

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 97-01-00090) и межвузовской научной программы "Университеты России — фундаментальные исследования" (проект №617). Второй автор был также поддержан фондом Александра фон Гумбольдта (ФРГ).

ло начато в работе авторов [9]. В ней показано, что если $\mathcal{V}$ — нильпотентное многообразие полугрупп, то строение решетки его подмногообразий в существенной части определяется строением некоторых ее интервалов $I_1(\mathcal{V})$, $I_2(\mathcal{V})$, …, $I_{s-1}(\mathcal{V})$, где s — индекс нильпотентности многообразия $\mathcal{V}$ (см. теорему 1.1 и предложение 1.1 в разделе 1). Данная работа является продолжением статьи [9]. Ее основными результатами являются теоремы 1.2 и 1.3. Теорема 1.2 устанавливает, что каждый из интервалов $I_n(\mathcal{V})$, где $1 \leq n \leq s-1$, разлагается в подпрямое произведение некоторых интервалов $I_{n,1}(\mathcal{V})$, $I_{n,2}(\mathcal{V})$,…, $I_{n,n}(\mathcal{V})$, а теорема 1.3 утверждает, что каждый из последних интервалов антиизоморфен решетке конгруэнций некоторой специфической унарной алгебры — так называемого G-множества. Отметим, что упоминавшееся выше описание решетки **OC**, полученное в [1], формулируется в аналогичных терминах: эта решетка разлагается в подпрямое произведение счетного семейства своих интервалов, каждый из которых антиизоморфен решетке конгруэнций некоторого G-множества.

Теоремы 1.2 и 1.3 анонсированы нами в [10] и [11] соответственно. В [10] анонсирован также результат, дающий описание интервалов вида $I_{n,m}(\mathcal{V})$, близкое по духу к теореме 1.3, но формулируемое в более сложных терминах. Этот результат легко следует из теоремы 1.3.

Работа состоит из четырех разделов. В разделе 1 собраны определения и обозначения и сформулированы основные результаты. В разделах 2 и 3 доказываются теоремы 1.2 и 1.3 соответственно. В разделе 4 мы иллюстрируем возможности применения развитой техники к задачам представимости абстрактных решеток интервалами и подрешетками решетки полугрупповых многообразий. Недостаток места не позволил включить в данную работу целый ряд других важных приложений теорем 1.2 и 1.3. Отметим здесь только, что их использование позволяет существенно сократить и упростить доказательства основных результатов работ [12]–[14]; кроме того, с их помощью авторами полностью описаны многообразия полугрупп с полумодулярной (вверх или вниз) решеткой подмногообразий [15]. Отметим еще, что доказательства теорем 1.1–1.3 по существу не используют полугрупповой специфики и носят универсально-алгебраический характер. Это дает возможность распространить изложенный в работе подход на многообразия алгебр других типов, где имеет смысл сходное с полугрупповым понятие нильпотентности (см. [16], [17]). Такому распространению авторы планируют посвятить отдельную работу.

1. Определения, обозначения и формулировки результатов

Как и в [9], в данной работе (за исключением раздела 4) под словом “полугруппа” понимается полугруппа с сигнатурным нулем. Тем не менее все ее результаты применимы и к обычным полугрупповым многообразиям, поскольку, как показано в работе [18], решетка нильмногообразий полугрупп изоморфна решетке нильмногообразий полугрупп с сигнатурным нулем.

Всюду далее F — абсолютно свободная полугруппа над алфавитом $\{x_1, \ldots, x_n, \ldots\}$, элементы которого мы называем *буквами*, в то время как элементы F — *словами*. Символ $\equiv$ обозначает равенство в F. Если $u \in F \setminus \{0\}$, то $\ell(u)$ — длина слова u, $c(u)$ — множество всех букв, входящих в запись u, и $n(u) = |c(u)|$ — число различных букв слова u. Длину нуля полугруппы F будем считать бесконечной.

Пары слов мы называем *тождествами* и, как правило, записываем с помощью знака равенства. Говорят, что тождество $u = v$ *выполняется в полугруппе* S, если $\varphi(u) = \varphi(v)$ для любого гомоморфизма $\varphi : F \longrightarrow S$. Если Σ — некоторое множество тождеств, то класс всех полугрупп, в которых выполняются все тождества из Σ, называется *многообразием, заданным* Σ, и обозначается через $\operatorname{var}\Sigma$. Если $\mathcal{C}$ — некоторый класс полугрупп, то через $\operatorname{id}\mathcal{C}$ обозначается множество всех тождеств, выполняющихся в $\mathcal{C}$ (т.е. в каждой полугруппе из $\mathcal{C}$). Известно, что $\operatorname{id}\mathcal{C}$ — *вполне инвариантная* (т.е. устойчивая относительно всех эндоморфизмов) конгруэнция полугруппы F и что пара отображений $\Sigma \mapsto \operatorname{var}\Sigma$ и $\mathcal{C} \mapsto \operatorname{id}\mathcal{C}$ задает соответствие Галуа между многообразиями полугрупп и вполне инвариантными конгруэнциями на F.

Многообразия, содержащиеся в некотором многообразии $\mathcal{V}$, образуют решетку по включению, которая называется *решеткой подмногообразий многообразия* $\mathcal{V}$ и обозначается через $L(\mathcal{V})$. Решеточные операции в $L(\mathcal{V})$ мы будем обозначать символами $\wedge$ и $\vee$; при этом для произвольных подмногообразий $\mathcal{X}, \mathcal{Y}$ в $\mathcal{V}$ многообразие $\mathcal{X} \wedge \mathcal{Y}$ есть просто пересечение $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ как классов, оно может быть задано множеством тождеств $\operatorname{id}\mathcal{X} \cup \operatorname{id}\mathcal{Y}$, а многообразие $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y}$ есть наименьшее многообразие, содержащее и $\mathcal{X}$, и $\mathcal{Y}$, его можно задать множеством тождеств $\operatorname{id}\mathcal{X} \cap \operatorname{id}\mathcal{Y}$.

Пусть n — натуральное число. Многообразие полугрупп назовем *однородным* (*n-расщепляемым*), если вместе со всяким выполненным в нем тождеством $u = v$ таким, что $\ell(u) \neq \ell(v)$ (соответственно таким, что $\ell(u) \leq n$ и $\ell(v) > n$), в нем выполняется и тождество $u = 0$. Многообразие, не являющееся n-расщепляемым, будем называть *n-нерасщепляемым*. Отметим, что класс однородных многообразий достаточно широк. Легко понять, в частности, что однородным будет всякое многообразие, заданное только уравновешенными и/или 0-приведенными тождествами[1], и, более того, всякое многообразие, заданное такими тождествами внутри некоторого однородного многообразия. В частности, отсюда вытекает, что каждое нильпотентное многообразие полугрупп содержится в некотором однородном нильпотентном многообразии, причем можно считать, что последнее имеет тот же индекс нильпотентности.

Для многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ положим

$$\mathcal{V}_n = \mathcal{V} \wedge \mathrm{var}\{x_1 \cdots x_n = 0\}.$$

Множество всех n-расщепляемых (n-нерасщепляемых) многообразий из интервала $[\mathcal{V}_n, \mathcal{V}]$ обозначим через $L_n(\mathcal{V})$ (соответственно $P_n(\mathcal{V})$). Легко проверяется, что $L_n(\mathcal{V})$ — подрешетка интервала $[\mathcal{V}_n, \mathcal{V}]$ [9, предложение 1]. Интервал $[\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_{n+1}]$ решетки $L(\mathcal{V})$ обозначим через $I_n(\mathcal{V})$.

Теорема 1.1. (См. [9, с.58].) *Пусть $\mathcal{V}$ — однородное многообразие полугрупп, а n — натуральное число. Тогда решетка $L_n(\mathcal{V})$ разлагается в подпрямое произведение интервалов $I_n(\mathcal{V})$ и $[\mathcal{V}_{n+1}, \mathcal{V}]$.*

Отметим, что этот результат будет передоказан в разделе 2 данной работы попутно с доказательством теоремы 1.2.

Возникает естественный вопрос, как восстановить весь интервал $[\mathcal{V}_n, \mathcal{V}]$ по его “хорошей части” $L_n(\mathcal{V})$. Чтобы описать ответ на него, предложенный в [9], нам понадобится следующая конструкция из [19]. Пусть $\langle L;\ \leq\rangle$ и $\langle P;\ \preceq\rangle$ — непересекающиеся упорядоченные множества, а α и β — изотонные отображения из P в L такие, что $\beta(x) < \alpha(x)$ для всех $x \in P$. Распространим отношение $\leq$ с L на $L \cup P$ следующим образом:

а) если $x, y \in P$, то $x \leq y$ тогда и только тогда, когда либо $x \preceq y$, либо $\alpha(x) \leq \beta(y)$;

б) если $x \in L$, а $y \in P$, то $x \leq y$ тогда и только тогда, когда $x \leq \beta(y)$, и $y \leq x$ тогда и только тогда, когда $\alpha(y) \leq x$.

Легко проверяется, что $\langle L \cup P;\ \leq\rangle$ — упорядоченное множество (см. [19, предложение 1]). Будем говорить, что оно (и любое упорядоченное множество, ему изоморфное) получено *вставкой* $\langle P;\ \preceq\rangle$ *в* $\langle L;\ \leq\rangle$ *с помощью отображений* α *и* β. Для удобства будем считать возможным

[1] Напомним, что тождество называется *уравновешенным*, если каждая буква входит в его правую и левую части одинаковое число раз, а 0-*приведенными* принято называть тождества вида $u = 0$.

случай, когда “вставляемое” множество P пусто; это соглашение позволяет рассматривать произвольное упорядоченное множество как результат вставки.

Для всякого многообразия $\mathcal{X} \in P_n(\mathcal{V})$ положим

$$\alpha_n(\mathcal{X}) = \bigwedge\{\mathcal{Y} \in L_n(\mathcal{V}) \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{Y}\} \quad \text{и} \quad \beta_n(\mathcal{X}) = \bigvee\{\mathcal{Z} \in L_n(\mathcal{V}) \mid \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}\}.$$

Тогда α_n и β_n — изотонные отображения из $\langle P_n(\mathcal{V});\ \subseteq\rangle$ в $\langle L_n(\mathcal{V});\ \subseteq\rangle$ и $\beta_n(\mathcal{X}) \subset \alpha_n(\mathcal{X})$ для всякого $\mathcal{X} \in P_n(\mathcal{V})$ [9, предложение 2].

Предложение 1.1. (См. [9, следствие 1].) *Пусть $\mathcal{V}$ — однородное многообразие полугрупп, а n — натуральное число. Тогда интервал $[\mathcal{V}_n, \mathcal{V}]$ может быть получен вставкой упорядоченного множества $\langle P_n(\mathcal{V});\ \subseteq\rangle$ в упорядоченное множество $\langle L_n(\mathcal{V});\ \subseteq\rangle$ с помощью отображений α_n и β_n.*

Перейдем к описанию строения интервалов вида $I_n(\mathcal{V})$. Пусть m — натуральное число и $m \leq n$. Положим

$$\mathcal{V}_{n,m} = \mathcal{V}_{n+1} \wedge \operatorname{var}\{u = 0 \mid \ell(u) = n \text{ и } n(u) \leq m\}.$$

Кроме того, пусть $\mathcal{V}_{n,0} = \mathcal{V}_{n+1}$. Ясно, что $\mathcal{V}_{n,m} \subseteq \mathcal{V}_{n,m-1}$ и $\mathcal{V}_{n,n} = \mathcal{V}_n$. Интервал $[\mathcal{V}_{n,m}, \mathcal{V}_{n,m-1}]$ решетки $I_n(\mathcal{V})$ обозначим через $I_{n,m}(\mathcal{V})$. Первым основным результатом данной работы является

Теорема 1.2. *Пусть $\mathcal{V}$ — однородное многообразие полугрупп, а n — натуральное число. Тогда интервал $I_n(\mathcal{V})$ разлагается в подпрямое произведение интервалов вида $I_{n,m}(\mathcal{V})$, где m пробегает множество $\{1, \ldots, n\}$.*

Для того чтобы описать строение интервалов вида $I_{n,m}(\mathcal{V})$, нам понадобится понятие G-множества. Пусть A — непустое множество, G — группа, а φ — гомоморфизм G в группу всех перестановок множества A. Каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие унарную операцию g^* на множестве A, задаваемую правилом $g^*(a) = (\varphi(g))(a)$ для всякого $a \in A$. Следуя [20], унарную алгебру с носителем A и множеством операций $\{g^* \mid g \in G\}$ будем называть *G-множеством.*

Обозначим через $F_{n,m}(\mathcal{V})$ множество всех слов длины n, зависящих в точности от букв $x_1, \ldots, x_m$ и отличных от нуля в многообразии $\mathcal{V}$. *Трансверсалью* в $F_{n,m}(\mathcal{V})$ будем называть произвольное подмножество $W_{n,m}(\mathcal{V}) \subseteq F_{n,m}(\mathcal{V})$ со следующим свойством: для каждого слова $u \in F_{n,m}(\mathcal{V})$ существует, и притом только одно, слово $u^* \in W_{n,m}(\mathcal{V})$ такое, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = u^*$. Отметим тот очевидный факт, что если $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, то $u^* \equiv u$. Положим

$$W^0_{n,m}(\mathcal{V}) = W_{n,m}(\mathcal{V}) \ \cup \ \{0\}.$$

Подчеркнем, что если $u, v \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ и в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = v$, то $u \equiv v$.

Пусть $\mathbb{S}_m$ — группа всех перестановок множества $\{1, \ldots, m\}$. Если $u \in F$ и $\sigma \in \mathbb{S}_m$, то через σu будем обозначать образ слова u при автоморфизме полугруппы F, индуцированном σ, т.е. продолжающем отображение $x_i \mapsto x_{\sigma(i)}$ (мы считаем, что $\sigma(i) = i$ при $i > m$). Ясно, что если $u \in F_{n,m}(\mathcal{V})$ и $\sigma \in \mathbb{S}_m$, то и $\sigma u \in F_{n,m}(\mathcal{V})$, и потому мы можем рассматривать слово $(\sigma u)^*$. Зафиксируем произвольную трансверсаль $W_{n,m}(\mathcal{V})$ в $F_{n,m}(\mathcal{V})$ и для каждой перестановки $\sigma \in \mathbb{S}_m$ зададим унарную операцию σ^* на множестве $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ следующим правилом:

$$\sigma^*(u) \equiv (\sigma u)^* \text{ для всякого слова } u \in W_{n,m}(\mathcal{V}) \text{ и } \sigma^*(0) \equiv 0.$$

Лемма 1.1. *Множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ с набором операций $\{\sigma^* \mid \sigma \in \mathbb{S}_m\}$ является $\mathbb{S}_m$-множеством.*

Доказательство. Нужно проверить, что каждая операция σ^* является перестановкой множества $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ и что отображение $\sigma \longmapsto \sigma^*$ является гомоморфизмом группы $\mathbb{S}_m$ в группу всех перестановок этого множества. Пусть $u, v \in W_{n,m}(\mathcal{V})$ и $\sigma^*(u) \equiv \sigma^*(v)$. Обозначим через ν вполне инвариантную конгруэнцию $\mathrm{id}\,\mathcal{V}$. Тогда $\sigma u \ \nu \ \sigma^*(u)$ и $\sigma v \ \nu \ \sigma^*(v)$, откуда $\sigma u \ \nu \ \sigma v$. Ввиду полной инвариантности ν, применяя к словам σu и σv автоморфизм, обратный к автоморфизму, индуцированному σ, получаем, что $u \ \nu \ v$. По определению множества $W_{n,m}(\mathcal{V})$ это равносильно тому, что $u \equiv v$. Итак, отображение σ^* взаимно однозначно на множестве $W_{n,m}(\mathcal{V})$, а значит, и на множестве $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Поскольку последнее множество конечно, этого достаточно, чтобы утверждать, что σ^* является его перестановкой.

Пусть теперь $\sigma, \tau \in \mathbb{S}_m$ и $u \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Нужно убедиться в том, что $\sigma^*(\tau^*(u)) \equiv (\sigma\tau)^*(u)$. Если $u \equiv 0$, то, очевидно, $\sigma^*(\tau^*(u)) \equiv \sigma^*(0) \equiv 0 \equiv (\sigma\tau)^*(u)$. Пусть теперь $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$. Тогда

$$\begin{aligned}\sigma^*(\tau^*(u)) \equiv (\sigma(\tau^*(u)))^* \ \nu \ \sigma(\tau^*(u)) \equiv \sigma((\tau u)^*) \ \nu \ \sigma(\tau u) \equiv \\ \equiv (\sigma\tau)u \ \nu \ ((\sigma\tau)u)^* \equiv (\sigma\tau)^*(u).\end{aligned}$$

Итак, $\sigma^*(\tau^*(u)) \ \nu \ (\sigma\tau)^*(u)$. Учитывая, что слова $\sigma^*(\tau^*(u))$ и $(\sigma\tau)^*(u)$ лежат в $W_{n,m}(\mathcal{V})$, имеем $\sigma^*(\tau^*(u)) \equiv (\sigma\tau)^*(u)$.

Как обычно, через $Con(A)$ обозначается решетка конгруэнций алгебры A. Вторым основным результатом работы является

Теорема 1.3. *Пусть $\mathcal{V}$ — однородное многообразие полугрупп, а m и n — натуральные числа такие, что $m \leq n$. Тогда интервал $I_{n,m}(\mathcal{V})$ антиизоморфен решетке $Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$, где $W_{n,m}(\mathcal{V})$ — произвольная трансверсаль в $F_{n,m}(\mathcal{V})$.*

Кратко обсудим схему применения теорем 1.1–1.3. Пусть $\mathcal{V}$ — нильпотентное индекса s многообразие полугрупп. Ясно, что $\mathcal{V}_1$ — тривиальное многообразие и $\mathcal{V}_s = \mathcal{V}$. Легко понять, что если многообразие $\mathcal{V}$ *наследственно однородно*, т.е. если все его подмногообразия однородны, то $P_n(\mathcal{V}) = \emptyset$ и $[\mathcal{V}_n, \mathcal{V}] = L_n(\mathcal{V})$ для всех $n = 1, \ldots, s-1$. Из теорем 1.1–1.3 немедленно вытекает

Следствие 1.1. *Если $\mathcal{V}$ — наследственно однородное нильпотентное индекса s многообразие полугрупп, то решетка $L(\mathcal{V})$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ по всем n и m таким, что $1 \leq m \leq n \leq s-1$.*

Пусть теперь многообразие $\mathcal{V}$ однородно, но не наследственно однородно. Тогда сначала с помощью теорем 1.2 и 1.3 описываем интервалы $I_n(\mathcal{V})$ для всех $n = 1, \ldots, s-1$. Предположим, что мы знаем еще строение упорядоченных множеств $\langle P_n(\mathcal{V}); \subseteq \rangle$ для всех $n = 1, \ldots, s-2$. Тогда, используя поочередно предложение 1.1 и теорему 1.1, можно последовательно восстановить решетки $L_{s-2}(\mathcal{V})$, $[\mathcal{V}_{s-2}, \mathcal{V}]$, $L_{s-3}(\mathcal{V})$, $[\mathcal{V}_{s-3}, \mathcal{V}]$, …, $L_1(\mathcal{V})$ и $[\mathcal{V}_1, \mathcal{V}] = L(\mathcal{V})$.

Пусть, наконец, многообразие $\mathcal{V}$ не однородно. Как отмечалось выше, $\mathcal{V}$ содержится в некотором однородном нильпотентном многообразии $\mathcal{V}'$. Описав по изложенной выше методике решетку $L(\mathcal{V}')$, мы тем самым выясним и строение решетки $L(\mathcal{V})$, являющейся главным идеалом в $L(\mathcal{V}')$.

2. Редукция к интервалам вида $I_{n,m}(\mathcal{V})$

Напомним, что элемент x решетки $\langle L; \vee, \wedge \rangle$ называется:

дистрибутивным, если $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ для всех $y, z \in L$;

кодистрибутивным, если $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ для всех $y, z \in L$;

модулярным, если $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y$ для всех $y, z \in L$ таких, что $y \leq z$;

нейтральным, если $(x \vee y) \wedge (y \vee z) \wedge (z \vee x) = (x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (z \wedge x)$ для всех $y, z \in L$.

Хорошо известно, что если x — нейтральный элемент решетки L, то L разлагается в подпрямое произведение главного идеала и главного фильтра, порожденных x (см., напр., теорему III.2.4 в [8]). Мы покажем ниже, что если $\mathcal{V}$ — однородное многообразие полугрупп, n — натуральное число и $m \in \{0, 1, \dots, n\}$, то многообразие $\mathcal{V}_{n,m}$ является нейтральным элементом решетки $L_n(\mathcal{V})$. В силу сказанного отсюда будет вытекать, что при $m \geq 1$ решетка $[\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_{n,m-1}]$ разлагается в подпрямое произведение интервалов $[\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_{n,m}]$ и $[\mathcal{V}_{n,m}, \mathcal{V}_{n,m-1}] = I_{n,m}(\mathcal{V})$. Применяя это утверждение при $m = 1, 2, \dots, n$, мы получаем теорему 1.2. Поскольку $\mathcal{V}_{n,0} = \mathcal{V}_{n+1}$, одновременно получится новое доказательство теоремы 1.1.

Итак, зафиксируем (до конца раздела 3) однородное многообразие полугрупп $\mathcal{V}$, натуральное число n и число $m \in \{0, 1, \dots, n\}$. Вполне инвариантную конгруэнцию $\mathrm{id}\,\mathcal{V}$ обозначим через ν. Многообразие $\mathcal{V}_{n,m}$ задается внутри $\mathcal{V}$ только 0-приведенными тождествами. Отсюда и из результатов работы [21] (см. также [22, предложение 2.2]) вытекает, что $\mathcal{V}_{n,m}$ — модулярный элемент решетки $L(\mathcal{V})$ (а значит, и решетки $L_n(\mathcal{V})$). С другой стороны, можно проверить, что модулярный, дистрибутивный и кодистрибутивный элемент произвольной решетки нейтрален в ней[2]. Таким образом, для доказательства теорем 1.1 и 1.2 остается показать дистрибутивность и кодистрибутивность многообразия $\mathcal{V}_{n,m}$ в решетке $L_n(\mathcal{V})$.

Положим

$$A_{n,m} = \{u \in F \mid \text{длина слова } u \text{ больше } n\} \cup \{u \in F \mid \ell(u) = n \text{ и } n(u) \leq m\}.$$

Ясно, что $A_{n,m}$ — вполне инвариантный идеал полугруппы F. Соответствующую ему рисовскую конгруэнцию на F обозначим через $\alpha_{n,m}$ и положим $\nu_{n,m} = \nu \vee \alpha_{n,m}$. Отметим, что в силу известного свойства рисовских конгруэнций $\nu_{n,m} = \nu\alpha_{n,m}\nu$. (Объединение берется в решетке эквивалентностей, а произведение — в полугруппе бинарных отношений на F.) Ясно, что $\nu_{n,m} = \mathrm{id}\,\mathcal{V}_{n,m}$.

Предположим, что многообразие $\mathcal{V}_{n,m}$ удовлетворяет тождеству $u = v$. Тогда $u \;\nu\; w_1 \;\alpha_{n,m}\; w_2 \;\nu\; v$ для некоторых слов w_1 и w_2. Если $w_1 \equiv w_2$, то $u \;\nu\; v$, т.е. $u = v$ в $\mathcal{V}$. В противном случае $w_1, w_2 \in A_{n,m}$. Поскольку многообразие $\mathcal{V}$ однородно, получаем, что в этом случае каждое из слов u и v либо равно нулю в $\mathcal{V}$, либо лежит в $A_{n,m}$. При этом, очевидно, если u и v равны нулю в $\mathcal{V}$, то $u = v$ в $\mathcal{V}$. Мы доказали следующее

[2] Мы не смогли отыскать это утверждение в литературе в явном виде, но во всяком случае оно легко следует из леммы 1.3 работы [23].

Замечание 2.1. *Если многообразие $\mathcal{V}_{n,m}$ удовлетворяет тождеству $u = v$, то либо $u = v$ в $\mathcal{V}$, либо $u, v \in A_{n,m}$, либо одно из слов u и v равно нулю в $\mathcal{V}$, а другое лежит в $A_{n,m}$.*

Тот факт, что тождество $u = v$ не выполнено в многообразии $\mathcal{V}$, мы будем иногда записывать в виде "$u \neq v$ в $\mathcal{V}$". Легко понять, что если многообразие полугрупп с нулем удовлетворяет тождеству $u = v$ и не удовлетворяет тождеству $u = 0$, то $c(u) = c(v)$ и, в частности, $n(u) = n(v)$. Далее мы используем этот факт без специальных оговорок.

Лемма 2.1. *Многообразие $\mathcal{V}_{n,m}$ является дистрибутивным элементом решетки $L_n(\mathcal{V})$.*

Доказательство. Нам надо проверить, что для любых многообразий $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L_n(\mathcal{V})$ выполнено равенство

$$\mathcal{V}_{n,m} \vee (\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}) = (\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{B}).$$

Достаточно убедиться в том, что левая часть этого равенства содержит правую, т.е. что всякое тождество $u = v$, выполненное в левой части, выполнено и в правой. Можно считать, что $u \neq v$ в $\mathcal{V}$, так как в противном случае доказывать нечего. Ясно, что $u = v$ в $\mathcal{V}_{n,m}$. В силу замечания 2.1 далее можно без ограничения общности считать, что $u \in A_{n,m}$ и либо $v \in A_{n,m}$, либо $v = 0$ в $\mathcal{V}$. Далее, ясно, что тождество $u = v$ выполнено в многообразии $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$. Пусть

$$u \equiv u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_t \equiv v \qquad (*)$$

— вывод тождества $u = v$ из множества тождеств $\operatorname{id}\mathcal{A} \cup \operatorname{id}\mathcal{B}$. Предположим сначала, что $u_1, \ldots, u_t \in A_{n,m}$. Тогда $u_i = u_{i+1}$ в $\mathcal{V}_{n,m}$ для всякого $i = 0, 1, \ldots, t-1$, и потому $(*)$ является выводом тождества $u = v$ из множества тождеств $\operatorname{id}(\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{A}) \cup \operatorname{id}(\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{B})$. Следовательно, в этом случае $u = v$ в $(\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{B})$. Итак, далее можно считать, что $u_i \notin A_{n,m}$ для некоторого $i \in \{1, \ldots, t\}$. Пусть i — минимальное число с таким свойством. Поскольку $u_0, u_1, \ldots, u_{i-1} \in A_{n,m}$, получаем, что в многообразии $\mathcal{V}_{n,m}$ выполнены тождества $u_j = u_{j+1}$ для всех $j = 0, 1, \ldots, i-2$ и тождество $u_{i-1} = 0$. Кроме того, в одном из многообразий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ выполнено тождество $u_{i-1} = u_i$. Поскольку $u_{i-1} \in A_{n,m}$, $u_i \notin A_{n,m}$, а многообразия $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ n-расщепляемы, получаем, что в одном из них выполнено тождество $u_{i-1} = 0$. Таким образом, имеется вывод

$$u \equiv u_0 \longrightarrow u_1 \longrightarrow \ldots \longrightarrow u_{i-1} \longrightarrow 0$$

тождества $u = 0$ из множества тождеств $\mathrm{id}(\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{A}) \cup \mathrm{id}(\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{B})$ и, значит, $u = 0$ в многообразии $(\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{B})$. Аналогичным образом проверяется, что если $v \in A_{n,m}$, то $v = 0$ в этом многообразии. Если же $v = 0$ в $\mathcal{V}$, то последнее утверждение очевидно. Следовательно, $u = v$ в $(\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{A}) \wedge (\mathcal{V}_{n,m} \vee \mathcal{B})$.

Лемма 2.2. *Многообразие $\mathcal{V}_{n,m}$ является кодистрибутивным элементом решетки $L_n(\mathcal{V})$.*

Доказательство. Теперь нам нужно проверить, что для любых многообразий $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in L_n(\mathcal{V})$ выполнено равенство

$$\mathcal{V}_{n,m} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) = (\mathcal{V}_{n,m} \wedge \mathcal{A}) \vee (\mathcal{V}_{n,m} \wedge \mathcal{B}).$$

Достаточно убедиться в том, что правая часть этого равенства содержит левую, т.е. что всякое тождество $u = v$, выполненное в правой части, выполнено и в левой. Можно считать, что $u \neq v$ в $\mathcal{V}_{n,m}$, так как в противном случае доказывать нечего. Ясно, что если $u, v \in A_{n,m}$, то $u = v$ в $\mathcal{V}_{n,m}$. Поэтому далее без ограничения общности можно считать, что $u \notin A_{n,m}$.

Покажем, что либо $u = v$ в $\mathcal{A}$, либо $u = 0$ в $\mathcal{A}$ и $v \in A_{n,m}$. Ясно, что тождество $u = v$ верно в многообразии $\mathcal{V}_{n,m} \wedge \mathcal{A}$. Пусть $(*)$ — *кратчайший* вывод тождества $u = v$ из множества тождеств $\mathrm{id}\,\mathcal{V}_{n,m} \cup \mathrm{id}\,\mathcal{A}$. Тогда применения тождеств из $\mathrm{id}\,\mathcal{V}_{n,m}$ и $\mathrm{id}\,\mathcal{A}$ в $(*)$ строго чередуются в том смысле, что либо $u_{2i} = u_{2i+1}$ и $u_{2i+1} \neq u_{2i+2}$ в $\mathcal{V}_{n,m}$, но $u_{2i} \neq u_{2i+1}$ и $u_{2i+1} = u_{2i+2}$ в $\mathcal{A}$, либо, наоборот, $u_{2i} = u_{2i+1}$ и $u_{2i+1} \neq u_{2i+2}$ в $\mathcal{A}$, но $u_{2i} \neq u_{2i+1}$ и $u_{2i+1} = u_{2i+2}$ в $\mathcal{V}_{n,m}$. Если в $(*)$ $t = 1$, то тождество $u = v$ выполнено либо в $\mathcal{V}_{n,m}$ (что мы исключили), либо в $\mathcal{A}$ (что нас устраивает). Поэтому далее можно считать, что $t > 1$.

Предположим сначала, что $u_0 = u_1$ в $\mathcal{V}_{n,m}$ и, значит, $u_1 = u_2$ в $\mathcal{A}$. Если $u_0 = u_1$ в $\mathcal{V}$, то $u_0 = u_1$ в $\mathcal{A}$, что невозможно. Учитывая замечание 2.1 и тот факт, что $u_0 \equiv u \notin A_{n,m}$, получаем, что $u_0 = 0$ в $\mathcal{V}$ (а значит, и в $\mathcal{A}$) и $u_1 \in A_{n,m}$. Если $u_2 \in A_{n,m}$, то $u_1 = u_2$ в $\mathcal{V}_{n,m}$, что опять-таки невозможно. Если же $u_2 \notin A_{n,m}$, то, в силу n-расщепляемости многообразия $\mathcal{A}$, получаем, что $u_2 = 0$ в $\mathcal{A}$, откуда $u_0 = u_2$ в $\mathcal{A}$ и вывод $(*)$ можно сократить.

Итак, случай, когда $u_0 = u_1$ в $\mathcal{V}_{n,m}$, невозможен. Следовательно, $u_0 = u_1$ в $\mathcal{A}$ и, значит, $u_1 = u_2$ в $\mathcal{V}_{n,m}$. Если $u_1 = u_2$ в $\mathcal{V}$, то $u_1 = u_2$ в $\mathcal{A}$, что невозможно. В силу замечания 2.1 либо $u_1 \in A_{n,m}$, либо $u_1 = 0$ в $\mathcal{V}$. В каждом из этих двух случаев $u_1 = 0$ в $\mathcal{A}$ (в первом случае это вытекает из n-расщепляемости многообразия $\mathcal{A}$ и того факта, что $u_0 \equiv u \notin A_{n,m}$, а во втором очевидно). Следовательно, $u = 0$ в $\mathcal{A}$. Кроме того, вновь учитывая замечание 2.1, получаем, что либо $u_2 = 0$ в $\mathcal{V}$, либо $u_2 \in A_{n,m}$. В первом случае $u_2 = 0$ в $\mathcal{A}$, откуда $u_1 = u_2$ в $\mathcal{A}$, что невозможно. Следовательно, $u_2 \in A_{n,m}$. Если $t = 2$, то $v \equiv u_2 \in A_{n,m}$, и мы приходим ко второй из устраивающих нас возможностей.

Пусть теперь $t > 2$. Тогда $u_2 = u_3$ в $\mathcal{A}$. Если $u_3 \in A_{n,m}$, то $u_2 = u_3$ в $\mathcal{V}_{n,m}$, что невозможно. Если же $u_3 \notin A_{n,m}$, то, в силу n-расщепляемости многообразия $\mathcal{A}$, получаем, что $u_2 = 0$ в $\mathcal{A}$. Но тогда $u_1 = u_2$ в $\mathcal{A}$, что опять-таки невозможно. Таким образом, случай, когда $t > 2$, невозможен.

Аналогично, анализируя вывод тождества $u = v$ из множества тождеств $\mathrm{id}\,\mathcal{V}_{n,m} \cup \mathrm{id}\,\mathcal{B}$, получаем, что либо $u = v$ в $\mathcal{B}$, либо $u = 0$ в $\mathcal{B}$ и $v \in A_{n,m}$. Таким образом, возможны следующие четыре случая:

1) $u = v$ в $\mathcal{A}$ и в $\mathcal{B}$;

2) $u = 0$ в $\mathcal{A}$, $u = v$ в $\mathcal{B}$, $u \notin A_{n,m}$ и $v \in A_{n,m}$;

3) $u = v$ в $\mathcal{A}$, $u = 0$ в $\mathcal{B}$, $u \notin A_{n,m}$ и $v \in A_{n,m}$;

4) $u = 0$ в $\mathcal{A}$ и в $\mathcal{B}$ и $v \in A_{n,m}$.

В случае 1 $u = v$ в $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$, а значит, и в $\mathcal{V}_{n,m} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$. Случаи 2 и 3 сводятся к 4 ввиду n-расщепляемости многообразий $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$. Наконец, в случае 4 $u = 0$ в $\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$ и $v = 0$ в $\mathcal{V}_{n,m}$, откуда $u = v$ в $\mathcal{V}_{n,m} \wedge (\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$.

3. Строение интервалов вида $I_{n,m}(\mathcal{V})$

На протяжении данного раздела $m \geq 1$. Обозначим через $I_{n,m}(\nu)$ интервал $[\nu_{n,m-1}, \nu_{n,m}]$ решетки всех вполне инвариантных конгруэнций полугруппы F. Ясно, что теорема 1.3 эквивалентна утверждению об изоморфности решеток $I_{n,m}(\nu)$ и $Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$. Его-то мы и будем доказывать. Нам будет удобно разбить доказательство на два этапа.

3.1. Построение отображения $Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V})) \to I_{n,m}(\nu)$

Обозначим через $Aut(F)$ группу всех автоморфизмов полугруппы F. Ниже нам часто придется иметь дело с ситуацией, когда эндоморфизм ξ полугруппы F (не обязательно являющийся автоморфизмом) биективно отображает некоторое подмножество X алфавита $\{x_1, \ldots, x_k, \ldots\}$ на некоторое другое подмножество Y этого алфавита. Ради краткости в такой ситуации будем именовать ξ *биекцией из X на Y*.

Для произвольной конгруэнции α на $\mathbb{S}_m$-множестве $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ обозначим α-класс, содержащий 0, через Z_α. Положим

$$\tilde{Z}_\alpha = \{\varphi(u) \mid u \in Z_\alpha \setminus \{0\} \text{ и } \varphi \in Aut(F)\} \quad \text{и } A_\alpha = A_{n,m-1} \cup \tilde{Z}_\alpha.$$

Очевидно, что A_α — идеал полугруппы F. Соответствующую ему рисовскую конгруэнцию на F обозначим через $\tilde{\alpha}$ и положим $\alpha_1 = \nu \vee \tilde{\alpha}$. Поскольку конгруэнция $\tilde{\alpha}$ рисовская, имеем $\alpha_1 = \nu\tilde{\alpha}\nu$.

Лемма 3.1. *Если $\alpha \in Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$, то конгруэнции $\tilde{\alpha}$ и α_1 вполне инвариантны.*

Доказательство. Так как конгруэнция ν вполне инвариантна, достаточно убедиться, что этим свойством обладает конгруэнция $\tilde{\alpha}$. Пусть $u \; \tilde{\alpha} \; v$, а ξ — эндоморфизм полугруппы F. Разумеется, можно считать, что $u, v \in A_\alpha = A_{n,m-1} \cup \tilde{Z}_\alpha$. Покажем, что $\xi(u) \in A_\alpha$. Если $u \in A_{n,m-1}$, то, очевидно, $\xi(u) \in A_{n,m-1} \subseteq A_\alpha$. Пусть теперь $u \in \tilde{Z}_\alpha$, т.е. $u \equiv \varphi(w)$, где $w \in Z_\alpha \setminus \{0\}$, а $\varphi \in Aut(F)$. Ясно, что $\ell(w) = \ell(u) = n$ и $n(w) = n(u) = m$. Если $\ell(\xi(x)) > 1$ для некоторой буквы $x \in c(u)$ или $\xi(x) \equiv \xi(y)$ для некоторых различных букв $x, y \in c(u)$, то, очевидно, $\xi(u) \in A_{n,m-1} \subseteq A_\alpha$. Поэтому далее можно считать, что ξ есть биекция из $c(u)$ на $c(\xi(u))$. Но тогда $\xi(u) \equiv \xi_0(u)$ для некоторого автоморфизма $\xi_0 \in Aut(F)$. Следовательно, $\xi(u) \equiv \xi_0(u) \equiv \xi_0(\varphi(w)) \equiv (\xi_0\varphi)(w) \in \tilde{Z}_\alpha \subseteq A_\alpha$. Мы доказали, что в любом случае $\xi(u) \in A_\alpha$. Аналогично проверяется, что $\xi(v) \in A_\alpha$. Следовательно, $\xi(u) \; \tilde{\alpha} \; \xi(v)$.

В дальнейшем полная инвариантность конгруэнций $\tilde{\alpha}$ и α_1 используется, как правило, без специальных оговорок.

Положим

$$B_{n,m}(\mathcal{V}) = \{u \in F \mid \ell(u) = n, \; n(u) = m \text{ и } u \neq 0 \text{ в } \mathcal{V}\}.$$

Для всякой конгруэнции $\alpha \in Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ определим бинарное отношение α_2 на полугруппе F следующим образом: если $u, v \in F$, то $u \; \alpha_2 \; v$ тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия:

а) $u, v \in B_{n,m}(\mathcal{V})$;

б) $c(u) = c(v)$;

в) для произвольной биекции ρ из $c(u)$ на $X_m = \{x_1, \ldots, x_m\}$ слова $(\rho(u))^*$ и $(\rho(v))^*$ лежат в одном и том же α-классе, отличном от Z_α (мы имеем право говорить здесь о словах $(\rho(u))^*$ и $(\rho(v))^*$, так как из условий "а" и "б" непосредственно вытекает, что $\rho(u), \rho(v) \in F_{n,m}(\mathcal{V})$).

Определим отображение θ из $Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ во множество всех бинарных отношений на полугруппе F правилом: если $\alpha \in Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$, то $\theta(\alpha) = \alpha_1 \cup \alpha_2$ (объединение — теоретико-множественное!). Как мы покажем, в действительности θ отображает $Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ в $I_{n,m}(\nu)$ и является искомым изоморфизмом между этими решетками.

Зафиксируем до конца подраздела 3.1 конгруэнцию $\alpha \in Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ и положим $\chi = \theta(\alpha)$. Докажем, что χ — отношение эквивалентности. Из определения отображения θ видно, что отношение χ рефлексивно и симметрично. Убедимся в его транзитивности. Пусть $u \ \chi \ v \ \chi \ w$. Очевидно, что отношения α_1 и α_2 транзитивны. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $u \ \alpha_1 \ v \ \alpha_2 \ w$. В частности, $v, w \in B_{n,m}(\mathcal{V})$ и $c(v) = c(w)$. Поскольку $u \ \alpha_1 \ v$, имеем $u \ \nu \ w_1 \ \tilde{\alpha} \ w_2 \ \nu \ v$ для некоторых слов w_1 и w_2. Предположим сначала, что $w_1 \equiv w_2$. Тогда $u \ \nu \ v$. Из однородности многообразия $\mathcal{V}$ вытекает, что $u \in B_{n,m}(\mathcal{V})$ и $c(u) = c(v) = c(w)$. Кроме того, если ρ — произвольная биекция из $c(u)$ на X_m, то $\rho(u) \ \nu \ \rho(v)$, откуда $(\rho(u))^* \equiv (\rho(v))^*$. Учитывая, что $v \ \alpha_2 \ w$, получаем, что слова $(\rho(u))^*$ и $(\rho(w))^*$ лежат в одном и том же α-классе, отличном от Z_α. Следовательно, $u \ \alpha_2 \ w$ и $u \ \chi \ w$. Осталось рассмотреть случай, когда $w_1, w_2 \in A_\alpha$. Покажем, что в действительности он невозможен. Поскольку $w_2 \ \nu \ v$, а многообразие $\mathcal{V}$ однородно, имеем $w_2 \in B_{n,m}(\mathcal{V})$ и $c(w_2) = c(v)$. В частности, $w_2 \notin A_{n,m-1}$. Вспоминая, что $A_\alpha = A_{n,m-1} \cup \tilde{Z}_\alpha$, получаем, что $w_2 \in \tilde{Z}_\alpha$, т.е. $w_2 \equiv \varphi(a)$, где $a \in Z_\alpha \setminus \{0\}$, а $\varphi \in Aut(F)$. Отметим, что $a \equiv a^*$ и $c(a) = X_m$ (поскольку $a \in W_{n,m}(\mathcal{V})$). В частности, имеем $c(v) = c(w_2) = c(\varphi(a)) = \varphi(c(a)) = \varphi(X_m)$. Следовательно, φ^{-1} — биекция из $c(v)$ на $\varphi^{-1}(c(v)) = \varphi^{-1}(\varphi(X_m)) = X_m$ и $\varphi^{-1}(v) \ \nu \ \varphi^{-1}(w_2) \equiv \varphi^{-1}(\varphi(a)) \equiv a$, откуда $(\varphi^{-1}(v))^* \equiv a^* \equiv a \in Z_\alpha$. Это, однако, противоречит тому факту, что $v \ \alpha_2 \ w$.

Итак, χ — отношение эквивалентности. Проверим, что оно стабильно. Пусть $u \ \chi \ v$ и $w \in F$. Если $u \ \alpha_1 \ v$, то $uw \ \alpha_1 \ vw$ и $wu \ \alpha_1 \ wv$, так как α_1 — конгруэнция. Пусть теперь $u \ \alpha_2 \ v$. Тогда u и v — слова длины n, и потому uw, vw, wu и wv — слова длины, большей n. В частности, все они лежат в $A_{n,m-1}$, а значит, и в A_α. Следовательно, и в этом случае $uw \ \alpha_1 \ vw$ и $wu \ \alpha_1 \ wv$. Итак, в любом случае $uw \ \chi \ vw$ и $wu \ \chi \ wv$. Таким образом, χ — конгруэнция.

Проверим, что эта конгруэнция вполне инвариантна. Пусть $u \ \chi \ v$, а ξ — эндоморфизм полугруппы F. В силу леммы 3.1 можно считать, что $u \ \alpha_2 \ v$. В частности, $u, v \in B_{n,m}(\mathcal{V})$ и $c(u) = c(v)$. Если $\ell(\xi(x)) > 1$ для некоторой буквы $x \in c(u)$ или $\xi(x) \equiv \xi(y)$ для некоторых различных букв $x, y \in c(u)$, то, очевидно, $\xi(u), \xi(v) \in A_{n,m-1} \subseteq A_\alpha$, откуда $\xi(u) \ \alpha_1 \ \xi(v)$ и $\xi(u) \ \chi \ \xi(v)$. Поэтому далее можно считать, что ξ — биекция из $c(u)$ на $\xi(c(u)) = c(\xi(u))$. Следовательно, $\xi(u), \xi(v) \in B_{n,m}(\mathcal{V})$ и $c(\xi(u)) = \xi(c(u)) = \xi(c(v)) = c(\xi(v))$. Пусть ρ — произвольная биекция из $c(\xi(u))$ на X_m. Тогда $\rho\xi$ — биекция из $c(u)$ на X_m. Учитывая, что $u \ \alpha_2 \ v$, получаем, что слова $((\rho\xi)(u))^* \equiv (\rho(\xi(u)))^*$ и $((\rho\xi)(v))^* \equiv (\rho(\xi(v)))^*$ лежат в одном и том же α-классе, отличном от Z_α. Суммируя сказанное, имеем $\xi(u)\ \alpha_2\ \xi(v)$ и $\xi(u)\ \chi\ \xi(v)$.

Итак, конгруэнция χ вполне инвариантна. Далее, очевидно, что

$$\nu_{n,m-1} = \nu \vee \alpha_{n,m-1} \leq \nu \vee \tilde{\alpha} \leq \nu \vee \alpha_{n,m} = \nu_{n,m},$$

т.е. $\nu_{n,m-1} \leq \alpha_1 \leq \nu_{n,m}$, и, кроме того, $\alpha_2 \leq \nu_{n,m}$. Следовательно, $\chi = \alpha_1 \cup \alpha_2 \in I_{n,m}(\nu)$.

Мы доказали, что θ отображает $Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ в интервал $I_{n,m}(\nu)$.

3.2. Свойства отображения θ

Для дальнейшего нам понадобится

Замечание 3.1. *Пусть $u, v \in B_{n,m}(\mathcal{V})$ и $c(u) = c(v)$, а α — конгруэнция $\mathbb{S}_m$-множества $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Если $(\rho(u))^*\ \alpha\ (\rho(v))^*$ для всякой биекции ρ из $c(u)$ на X_m, то и $\theta(\alpha)\ v$.*

Доказательство. Так как Z_α является α-классом, имеет место альтернатива: или $(\rho(u))^*, (\rho(v))^* \notin Z_\alpha$ для любой биекции ρ из $c(u)$ на X_m, или есть такая биекция ρ_0 из $c(u)$ на X_m, что $(\rho_0(u))^*, (\rho_0(v))^* \in Z_\alpha$. В первом случае $u\ \alpha_2\ v$, а во втором

$$u \equiv \rho_0^{-1}(\rho_0(u))\ \nu\ \rho_0^{-1}((\rho_0(u))^*)\ \tilde{\alpha}\ \rho_0^{-1}((\rho_0(v))^*)\ \nu\ \rho_0^{-1}(\rho_0(v)) \equiv v,$$

откуда $u\ \alpha_1\ v$. В обоих случаях $u\ \theta(\alpha)\ v$.

Теперь мы можем проверить, что отображение θ изотонно. Пусть $\alpha, \beta \in Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ и $\alpha \leq \beta$. Очевидно, что $\alpha_1 \leq \beta_1 \leq \theta(\beta)$. Пусть теперь $u\ \alpha_2\ v$. Тогда $u, v \in B_{n,m}(\mathcal{V})$, $c(u) = c(v)$, и если ρ — биекция из $c(u)$ на X_m, то $(\rho(u))^*\ \alpha\ (\rho(v))^*$, а значит, и $(\rho(u))^*\ \beta\ (\rho(v))^*$. В силу замечания 3.1, $u\ \theta(\beta)\ v$. Таким образом, $\alpha_2 \leq \theta(\beta)$ и $\theta(\alpha) = \alpha_1 \cup \alpha_2 \leq \theta(\beta)$. Изотонность отображения θ доказана.

Определим отображение ω из $I_{n,m}(\nu)$ во множество всех бинарных отношений на множестве $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ правилом: если $\chi \in I_{n,m}(\nu)$, то $\omega(\chi)$ — ограничение χ на $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Очевидно, что отображение ω изотонно. Проверим, что оно отображает $I_{n,m}(\nu)$ в $Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$.

Зафиксируем (до конца раздела 3) вполне инвариантную конгруэнцию $\chi \in I_{n,m}(\nu)$ и положим $\alpha = \omega(\chi)$.

Ясно, что если $u\ \alpha\ v$, то $u\ \chi\ v$. Кроме того, в силу выбора χ имеем $\nu \leq \nu_{n,m-1} \leq \chi \leq \nu_{n,m}$. Напомним также, что если γ — произвольная конгруэнция на $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$, то $\nu \leq \nu_{n,m-1} \leq \gamma_1 \leq \theta(\gamma)$. Учитывая, что

$0 \in A_{n,m-1}$ (так как длина слова 0 больше n), получаем, что $u \ \nu_{n,m-1} \ 0$ для всякого слова $u \in A_{n,m-1}$ и $u \ \gamma_1 \ 0$ для всякого слова $u \in A_\gamma$. Далее все эти факты используются без специальных оговорок.

Очевидно, что α — отношение эквивалентности. Докажем, что оно стабильно. Пусть $u \ \alpha \ v$ (т.е. $u \ \chi \ v$ и $u, v \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$) и $\sigma \in \mathbb{S}_m$. Требуется показать, что $\sigma^*(u) \ \alpha \ \sigma^*(v)$. Поскольку $\sigma^*(u), \sigma^*(v) \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$, достаточно убедиться в том, что $\sigma^*(u) \ \chi \ \sigma^*(v)$. Если $u, v \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, то

$$\sigma^*(u) \equiv (\sigma u)^* \ \nu \ \sigma u \ \chi \ \sigma v \ \nu \ (\sigma v)^* \equiv \sigma^*(v),$$

откуда $\sigma^*(u) \ \chi \ \sigma^*(v)$. Поэтому далее без ограничения общности можно считать, что $u \equiv 0$. Предположим, что $v \in W_{n,m}(\mathcal{V})$. Поскольку $u \ \chi \ v$, получаем, что $\sigma^*(u) \equiv 0 \equiv \sigma u \ \chi \ \sigma v \ \nu \ (\sigma v)^* \equiv \sigma^*(v)$, откуда $\sigma^*(u) \ \chi \ \sigma^*(v)$. Наконец, если $v \equiv 0$, то $u \equiv v$, откуда $\sigma^*(u) \equiv \sigma^*(v)$ и, в частности, $\sigma^*(u) \ \chi \ \sigma^*(v)$. Итак, α — конгруэнция $\mathbb{S}_m$-множества $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Иными словами, ω отображает $I_{n,m}(\nu)$ в $Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$. Как мы покажем ниже, отображение ω обратно к θ.

Проверим, что отображение θ сюръективно. Для этого достаточно убедиться в том, что $\theta(\alpha) = \chi$. Проверим сначала, что $\theta(\alpha) \leq \chi$. Пусть $u \ \theta(\alpha) \ v$, т.е. либо $u \ \alpha_1 \ v$, либо $u \ \alpha_2 \ v$. Предположим, что $u \ \alpha_1 \ v$, т.е. $u \ \nu \ w_1 \ \tilde{\alpha} \ w_2 \ \nu \ v$ для некоторых слов w_1 и w_2. Достаточно доказать, что $w_1 \ \chi \ w_2$, так как в этом случае $u \ \nu \ w_1 \ \chi \ w_2 \ \nu \ v$, откуда $u \ \chi \ v$. Если $w_1 \equiv w_2$, то, разумеется, $w_1 \ \chi \ w_2$. Поэтому далее можно считать, что $w_1, w_2 \in A_\alpha = A_{n,m-1} \cup \tilde{Z}_\alpha$. Покажем, что $w_1 \ \chi \ 0$. Если $w_1 \in A_{n,m-1}$, то $w_1 \ \nu_{n,m-1} \ 0$, а значит, и $w_1 \ \chi \ 0$. Пусть теперь $w_1 \in \tilde{Z}_\alpha$, т.е. $w_1 \equiv \varphi(w)$, где $w \in Z_\alpha \setminus \{0\}$, а $\varphi \in Aut(F)$. В частности, $w \ \alpha \ 0$, откуда $w \ \chi \ 0$. Следовательно, $w_1 \equiv \varphi(w) \ \chi \ \varphi(0) \equiv 0$, т.е. $w_1 \ \chi \ 0$. Аналогично проверяется, что $w_2 \ \chi \ 0$, и потому $w_1 \ \chi \ w_2$. Пусть, наконец, $u \ \alpha_2 \ v$. Если ρ — произвольная биекция из $c(u)$ на X_m, то $(\rho(u))^* \ \alpha \ (\rho(v))^*$, откуда $(\rho(u))^* \ \chi \ (\rho(v))^*$ и

$$u \equiv \rho^{-1}(\rho(u)) \ \nu \ \rho^{-1}((\rho(u))^*) \ \chi \ \rho^{-1}((\rho(v))^*) \ \nu \ \rho^{-1}(\rho(v)) \equiv v.$$

Следовательно, и в этом случае $u \ \chi \ v$. Итак, $\theta(\alpha) \leq \chi$.

Проверим теперь, что $\chi \leq \theta(\alpha)$. Пусть $u \ \chi \ v$. Тогда $u \ \nu_{n,m} \ v$, т.е. $u \ \nu \ w_1 \ \alpha_{n,m} \ w_2 \ \nu \ v$ для некоторых слов w_1 и w_2. Поскольку $w_1 \ \nu \ u \ \chi \ v \ \nu \ w_2$, получаем, что $w_1 \ \chi \ w_2$. Достаточно доказать, что $w_1 \ \theta(\alpha) \ w_2$, так как в этом случае $u \ \nu \ w_1 \ \theta(\alpha) \ w_2 \ \nu \ v$, откуда $u \ \theta(\alpha) \ v$. Если $w_1 \equiv w_2$, то, разумеется, $w_1 \ \theta(\alpha) \ w_2$. Поэтому далее можно считать, что $w_1, w_2 \in A_{n,m}$. Положим

$$C_{n,m}(\mathcal{V}) = A_{n,m-1} \cup \{w \in F \mid \ell(w) = n, \ n(w) = m \text{ и } w = 0 \text{ в } \mathcal{V}\}.$$

Ясно, что $A_{n,m} = B_{n,m}(\mathcal{V}) \cup C_{n,m}(\mathcal{V})$. Очевидно, что $w\ \nu_{n,m-1}\ 0$ для всякого слова $w \in C_{n,m}(\mathcal{V})$. Поэтому если $w_1, w_2 \in C_{n,m}(\mathcal{V})$, то $w_1\ \nu_{n,m-1}\ w_2$, откуда $w_1\ \theta(\alpha)\ w_2$.

Таким образом, далее без ограничения общности можно считать, что $w_1 \in B_{n,m}(\mathcal{V})$. В частности, $n(w_1) = m$. Пусть ρ — произвольная биекция из $c(w_1)$ на X_m. Тогда, очевидно, $\rho(w_1) \in F_{n,m}(\mathcal{V})$, и потому можно рассматривать слово $(\rho(w_1))^*$. Поскольку $w_1\ \chi\ w_2$, имеем $(\rho(w_1))^*\ \nu\ \rho(w_1)\ \chi\ \rho(w_2)$, и потому $(\rho(w_1))^*\ \chi\ \rho(w_2)$.

Предположим, что $w_2 \in C_{n,m}(\mathcal{V})$. Тогда $w_2\ \nu_{n,m-1}\ 0$, а значит, $w_2\ \chi\ 0$ и $w_2\ \alpha_1\ 0$. Следовательно, $(\rho(w_1))^*\ \chi\ \rho(w_2)\ \chi\ \rho(0) \equiv 0$, и потому $(\rho(w_1))^*\ \chi\ 0$. Поскольку, кроме того, $(\rho(w_1))^* \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, получаем, что $(\rho(w_1))^*\ \alpha\ 0$, т.е. $(\rho(w_1))^* \in Z_\alpha \setminus \{0\} \subseteq A_\alpha$. Отсюда вытекает, что $(\rho(w_1))^*\ \alpha_1\ 0$. Поскольку

$$w_1 \equiv \rho^{-1}(\rho(w_1))\ \nu\ \rho^{-1}((\rho(w_1))^*)\ \alpha_1\ \rho^{-1}(0) \equiv 0\ \alpha_1\ w_2,$$

имеем $w_1\ \alpha_1\ w_2$ и $w_1\ \theta(\alpha)\ w_2$. Отметим, что в данном абзаце мы доказали факт, который пригодится нам и в дальнейшем: *если* $(\rho(w_1))^*\ \chi\ 0$, *то* $w_1\ \alpha_1\ 0$.

Осталось рассмотреть случай, когда $w_2 \in B_{n,m}(\mathcal{V})$. Предположим, что, кроме того, $c(w_1) = c(w_2)$. Тогда $\rho(w_2) \in F_{n,m}(\mathcal{V})$, и потому мы можем рассматривать слово $(\rho(w_2))^*$. Имеем $(\rho(w_1))^*\ \chi\ \rho(w_2)\ \nu\ (\rho(w_2))^*$, и потому $(\rho(w_1))^*\ \chi\ (\rho(w_2))^*$. Поскольку, кроме того, слова $(\rho(w_1))^*$ и $(\rho(w_2))^*$ лежат в $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$, получаем, что $(\rho(w_1))^*\ \alpha\ (\rho(w_2))^*$. В силу замечания 3.1, $w_1\ \theta(\alpha)\ w_2$.

Пусть, наконец, $c(w_1) \neq c(w_2)$. Поскольку $n(w_1) = m = n(w_2)$, в этом случае существует буква $x \in c(w_2) \setminus c(w_1)$. Рассмотрим эндоморфизм ξ полугруппы F, определяемый правилом: $\xi(x) \equiv 0$ и $\xi(y) \equiv y$ для всякой буквы $y \not\equiv x$. Ясно, что $\xi(w_1) \equiv w_1$ и $\xi(w_2) \equiv 0$. Поскольку $w_1\ \chi\ w_2$, имеем

$$(\rho(w_1))^*\ \nu\ \rho(w_1) \equiv \rho(\xi(w_1))\ \chi\ \rho(\xi(w_2)) \equiv \rho(0) \equiv 0.$$

Следовательно, $(\rho(w_1))^*\ \chi\ 0$. Как показано выше, отсюда вытекает, что $w_1\ \alpha_1\ 0$. Аналогично проверяется, что $w_2\ \alpha_1\ 0$. Следовательно, $w_1\ \alpha_1\ w_2$ и $w_1\ \theta(\alpha)\ w_2$.

Итак, $\chi \leq \theta(\alpha)$, а с учетом доказанного выше обратного неравенства $\theta(\alpha) = \chi$. Следовательно, отображение θ сюръективно.

Проверим, что оно инъективно. Пусть $\beta \in Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ и $\theta(\beta) = \chi$. Поскольку, как показано выше, $\theta(\alpha) = \chi$, достаточно установить, что $\beta = \alpha = \omega(\chi)$. Убедимся сначала в том, что $\beta \leq \omega(\chi)$, для чего достаточно доказать, что $\beta \leq \chi$. Пусть $u\ \beta\ v$. Если $u \equiv 0 \equiv v$, то, очевидно, $u\ \chi\ v$. Поэтому далее без ограничения общности можно считать, что $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$. Предположим, что $v \equiv 0$. Поскольку $u \ \beta \ v$, имеем $u \in Z_\beta \setminus \{0\} \subseteq A_\beta$. Следовательно, $u \ \beta_1 \ 0$. Учитывая, что $\beta_1 \leq \theta(\beta) = \chi$, получаем, что $u \ \chi \ 0$, т.е. $u \ \chi \ v$. Пусть, наконец, $v \in W_{n,m}(\mathcal{V})$. Тогда $u, v \in B_{n,m}(\mathcal{V})$ и $c(u) = X_m = c(v)$. Пусть ρ — произвольная биекция из $c(u) = X_m$ на X_m. Тогда, очевидно, $\rho(u) \equiv \sigma u$ и $\rho(v) \equiv \sigma v$ для некоторой перестановки $\sigma \in \mathbb{S}_m$. Следовательно, $(\rho(u))^* \equiv (\sigma u)^* \equiv \sigma^*(u)$ и аналогично $(\rho(v))^* \equiv \sigma^*(v)$. Учитывая, что $u \ \beta \ v$, а β — конгруэнция $\mathbb{S}_m$-множества $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$, получаем, что $\sigma^*(u) \ \beta \ \sigma^*(v)$, т.е. $(\rho(u))^* \ \beta \ (\rho(v))^*$. В силу замечания 3.1, $u \ \theta(\beta) \ v$, т.е. $u \ \chi \ v$. Мы доказали, что $\beta \leq \omega(\chi)$.

Осталось проверить, что $\omega(\chi) \leq \beta$. Пусть $u \ \omega(\chi) \ v$, т.е. $u \ \chi \ v$ и $u, v \in W^0_{n,m}(\mathcal{V})$. Если $u \equiv 0 \equiv v$, то, разумеется, $u \ \beta \ v$. Поэтому далее без ограничения общности можно считать, что $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$. Предположим сначала, что $v \equiv 0$. В этом случае $u \ \chi \ 0$. Следовательно, $ux \ \chi \ 0$ и $u \ \chi \ ux$ для произвольной буквы $x \notin c(u)$. Напомним, что $\chi = \theta(\beta) = \beta_1 \cup \beta_2$. Случай, когда $u \ \beta_2 \ ux$, невозможен, так как $\ell(ux) > n$, и потому $ux \notin B_{n,m}(\mathcal{V})$. Следовательно, $u \ \beta_1 \ ux$, т.е. $u \ \nu \ w_1 \ \tilde{\beta} \ w_2 \ \nu \ ux$ для некоторых слов w_1 и w_2. Если $w_1 \equiv w_2$, то $u \ \nu \ ux$, т.е. $u = ux$ в $\mathcal{V}$. Подставляя в это тождество 0 вместо x и учитывая, что $x \notin c(u)$, получаем, что $u = 0$ в $\mathcal{V}$. Последнее, однако, невозможно, так как $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$. Следовательно, $w_1 \in A_\beta = A_{n,m-1} \cup \tilde{Z}_\beta$. Учитывая, что $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, $u \ \nu \ w_1$, а многообразие $\mathcal{V}$ однородно, получаем, что $w_1 \in B_{n,m}(\mathcal{V})$ и $c(w_1) = c(u) = X_m$. В частности, $w_1 \notin A_{n,m-1}$, и потому $w_1 \in \tilde{Z}_\beta$, т.е. $w_1 \equiv \varphi(w)$, где $w \in Z_\beta \setminus \{0\}$, а $\varphi \in Aut(F)$. Учитывая, что $Z_\beta \setminus \{0\} \subseteq W_{n,m}(\mathcal{V})$, имеем $c(w) = X_m = c(w_1) = c(\varphi(w)) = \varphi(c(w))$. Это означает, что $\varphi(w) \equiv \sigma w$ для некоторой перестановки $\sigma \in \mathbb{S}_m$. Учитывая, что $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, $u \ \nu \ w_1$, $w \in Z_\beta$, а $\beta \in Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$, имеем

$$u \equiv u^* \equiv w_1^* \equiv (\varphi(w))^* \equiv (\sigma w)^* \equiv \sigma^*(w) \ \beta \ \sigma^*(0) \equiv 0 \equiv v,$$

откуда $u \ \beta \ v$. Отметим, что в данном абзаце мы доказали следующий факт: *если $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$ и $u \ \chi \ 0$, то $u \ \beta \ 0$.*

Пусть, наконец, $v \in W_{n,m}(\mathcal{V})$. Учитывая, что $u \ \chi \ v$ и $\chi = \theta(\beta) = \beta_1 \cup \beta_2$, получаем, что либо $u \ \beta_1 \ v$, либо $u \ \beta_2 \ v$. Предположим сначала, что $u \ \beta_1 \ v$, т.е. $u \ \nu \ w_1 \ \tilde{\beta} \ w_2 \ \nu \ v$ для некоторых слов w_1 и w_2. Если $w_1 \equiv w_2$, то $u \ \nu \ v$. Поскольку $u, v \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, имеем $u \equiv v$ и $u \ \beta \ v$. Поэтому далее можно считать, что $w_1 \in A_\beta = A_{n,m-1} \cup \tilde{Z}_\beta$. Учитывая, что $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, $u \ \nu \ w_1$, а многообразие $\mathcal{V}$ однородно, получаем, что $w_1 \in B_{n,m}(\mathcal{V})$, и потому $w_1 \notin A_{n,m-1}$. Следовательно, $w_1 \in \tilde{Z}_\beta$ и, значит, $w_1 \ \beta_1 \ 0$. Учитывая, что $\beta_1 \leq \chi$, а $u \ \nu \ w_1 \ \beta_1 \ 0$, получаем, что $u \ \chi \ 0$. Поскольку $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, отсюда, как показано в предыдущем абзаце, следует, что $u \ \beta \ 0$. Аналогично проверяется, что $v \ \beta \ 0$. Следовательно, $u \ \beta \ v$. Осталось рассмотреть случай, когда $u \ \beta_2 \ v$. Поскольку $u, v \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, имеем $c(u) = X_m = c(v)$. Пусть ε — тождественная биекция из $c(u)$ на X_m. Учитывая, что $u, v \in W_{n,m}(\mathcal{V})$ и $u \ \beta_2 \ v$, имеем $u \equiv u^* \equiv (\varepsilon(u))^* \ \beta \ (\varepsilon(v))^* \equiv v^* \equiv v$, т.е. $u \ \beta \ v$.

Итак, $\omega(\chi) \leq \beta$, а с учетом доказанного выше обратного неравенства $\beta = \omega(\chi)$. Таким образом, отображение θ инъективно. Из инъективности θ и доказанного выше равенства $\theta(\omega(\chi)) = \chi$ вытекает, что отображение ω обратно к θ.

Итак, θ — изотонная биекция $Con(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ на $I_{n,m}(\nu)$, и обратная к ней биекция ω также изотонна. Следовательно, θ — изоморфизм решеток. Теорема 1.3 доказана.

4. Вложения в решетки многообразий

В качестве иллюстрации одного из возможных направлений применения теоремы 1.3 мы покажем, как из нее "одним ударом" выводятся результаты о представимости абстрактных решеток интервалами и подрешетками решетки полугрупповых многообразий.

Предложение 4.1. *Пусть $\mathcal{V}$ — одно из многообразий*

$$\mathcal{H} = \mathrm{var}\{x^2 = yxy\}$$

или

$$\mathcal{COM} = \mathrm{var}\{xy = yx\}.$$

Тогда всякая конечная решетка (антиизоморфная интервалу решетки подгрупп некоторой конечной группы) вложима в решетку $L(\mathcal{V})$ (соответственно в качестве интервала).

Доказательство. Пусть сначала $\mathcal{V} = \mathcal{H}$. Зафиксируем произвольное натуральное число m и рассмотрим множество $F_{m,m}(\mathcal{H})$ всех слов длины m, зависящих в точности от букв $x_1, \ldots, x_m$ и отличных от нуля в $\mathcal{H}$. Легко видеть, что $F_{m,m}(\mathcal{H})$ состоит из всех слов вида $x_{\pi(1)} \cdots x_{\pi(m)}$, где π пробегает группу $\mathbb{S}_m$, и что различные слова такого вида не равны в $\mathcal{H}$. Отсюда само множество $F_{m,m}(\mathcal{H})$ служит собственной трансверсалью, и по теореме 1.3 решетка $L(\mathcal{H})$ содержит интервал, дуальный решетке конгруэнций $\mathbb{S}_m$-множества $F^0_{m,m}(\mathcal{H})$. Последняя решетка содержит интервал, изоморфный решетке конгруэнций $\mathbb{S}_m$-множества $F_{m,m}(\mathcal{H})$. Ясно, что группа $\mathbb{S}_m$ действует на $F_{m,m}(\mathcal{H})$ транзитивно, т.е. для любых слов $u, v \in F_{m,m}(\mathcal{H})$ найдется перестановка $\sigma \in \mathbb{S}_m$ такая, что $\sigma^*(u) \equiv v$, и точно, т.е. $\sigma^*(u) \not\equiv u$ для каждой нетривиальной перестановки $\sigma \in \mathbb{S}_m$.

По лемме 4.20 из [20] решетка конгруэнций точного транзитивного G-множества изоморфна решетке подгрупп группы G; таким образом, решетка конгруэнций $\mathbb{S}_m$-множества $F_{m,m}(\mathcal{H})$ изоморфна решетке подгрупп группы $\mathbb{S}_m$. Так как каждая конечная группа вкладывается в группу $\mathbb{S}_m$ для подходящего m, решетка, изоморфная интервалу решетки подгрупп какой-либо конечной группы, изоморфна и интервалу решетки подгрупп группы $\mathbb{S}_m$; таким образом, мы получаем утверждение о вложимости в качестве интервала. Если еще учесть, что решетка EqM всех эквивалентностей на множестве M вкладывается в решетку подгрупп группы перестановок множества M [8, следствие IV.4.5], а всякая конечная решетка вложима в решетку EqM для некоторого конечного множества M [24], то получится и утверждение о вложимости в качестве подрешетки.

Пусть теперь $\mathcal{V} = \mathcal{COM}$. Возьмем произвольное натуральное m и зададим подмногообразие $\mathcal{K}$ в $\mathcal{COM}$ следующими тождествами:

$$x_1^{m+1} = x_1^m x_2^m = x_1^m x_2^{m-1} x_3^{m-1} = \ldots = x_1^m x_2^{m-1} x_3^{m-2} \cdots x_{m-1}^2 x_m^2 = 0.$$

Положим $n = m(m+1)/2$ и рассмотрим интервал $[\mathcal{K}_{n,m}, \mathcal{K}_{n,m-1}]$. По теореме 1.3 этот интервал дуален решетке конгруэнций $\mathbb{S}_m$-множества $W^0_{n,m}(\mathcal{K})$, где $W_{n,m}(\mathcal{K})$ — произвольная трансверсаль в $F_{n,m}(\mathcal{K})$. Тождества, наложенные на многообразие $\mathcal{K}$, таковы, что в $\mathcal{K}$ отличны от нуля те и только те слова длины n от m букв, в которых одна из букв входит ровно m раз, некоторая другая — ровно $m-1$ раз, ..., наконец, некоторая буква входит лишь однажды. Отсюда легко следует, что в качестве трансверсали $W_{n,m}(\mathcal{K})$ годится, например, множество всех слов вида $x^m_{\pi(1)} x^{m-1}_{\pi(2)} \cdots x^2_{\pi(m-1)} x_{\pi(m)}$, где π пробегает $\mathbb{S}_m$. Ясно, что $\mathbb{S}_m$ действует на $W_{n,m}(\mathcal{K})$ точно и транзитивно, и потому мы можем завершить доказательство применением тех же аргументов, что и в случае $\mathcal{V} = \mathcal{H}$.

Предложение 4.1 увязывает вопрос о представимости произвольной конечной решетки интервалом решетки многообразий, скажем, коммутативных полугрупп с хорошо известной в универсальной алгебре проблемой, всякая ли конечная решетка изоморфна интервалу решетки подгрупп некоторой группы. Заметим, что всякая алгебраическая решетка с не более чем счетным множеством компактных элементов дуальна некоторому интервалу решетки многообразий группоидов [7].

Утверждения предложения 4.1 о вложимости произвольной конечной решетки в решетки $L(\mathcal{COM})$ и $L(\mathcal{H})$ известны: для $L(\mathcal{COM})$ это вытекает из работ [25] и [24], а для $L(\mathcal{H})$ это — фольклорный результат. Однако утверждения об интервальной вложимости являются, по всей видимости, новыми. Отметим еще, что можно показать, что каждое из многообразий $\mathcal{H}$ и $\mathcal{COM}$ минимально по отношению к тому свойству, что его решетка подмногообразий содержит изоморфную копию любой конечной решетки.

Литература

1. Volkov M.V. Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties // Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. held at the Univ. Essex. Colchester: Univ. Essex, 1994. P.99–110.
2. Polák L. On varieties of completely regular semigroups. I,II,III // Semigroup Forum. 1985. Vol.32, №1. P.97–123; 1987. Vol.36, №3. P.253–284; 1988. Vol.37, №1. P.1–30.
3. Pastijn F. The lattice of completely regular semigroup varieties // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1990. Vol.49, №1. P.24–42.
4. Мельник И.И. Описание некоторых решеток многообразий полугрупп // Изв. вузов. Математика. 1971. №7. С.65–74.
5. Almeida J. Some order properties of the lattice of varieties of commutative semigroups // Canad. J. Math. 1986. Vol.38, №1. P.19–47.
6. Korjakov I.O. A sketch of the lattice of commutative nilpotent semigroup varieties // Semigroup Forum. 1982. Vol.24, №4. P.285–317.
7. Ježek J. Intervals in lattices of varieties // Algebra Universalis. 1976. Vol.6, №2. P.147–158.
8. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
9. Верников Б.М., Волков М.В. Решетки нильпотентных многообразий полугрупп // Алгебраич. системы и их многообразия. Свердловск: УрГУ, 1988. С.53–65.
10. Vernikov B.M., Volkov M.V. Structure of lattices of nilpotent semigroup varieties // Semigroups. Algebraic Theory and Applications to Formal Languages and Codes. Singapore: World Scientific, 1993. P.297–299.
11. Vernikov B.M., Volkov M.V. Lattices of nilpotent semigroup varieties and congruence lattices of unary algebras // Semigroups and their Applications, including Semigroup Rings: Int. Conf. in honour of E. S. Lyapin: Abstracts. St Petersburg, 1995. P.77–78.
12. Vernikov B.M., Volkov M.V. Commutative semigroup varieties with modular subvariety lattices // Monoids and Semigroups with Applications. Singapore: World Scientific, 1991. P.233–253.
13. Volkov M.V. Commutative semigroup varieties with distributive subvariety lattices // Contrib. to General Algebra. 1991. Vol.7. P.351–359.

14. Volkov M.V. Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects // Contemp. Math. 1992. Vol.131, pt.3. P.295–316.

15. Vernikov B.M., Volkov M.V. Semimodular semigroup varieties revisited // Semigroups and their Applications, including Semigroup Rings: Int. Conf. in honour of E. S. Lyapin: Abstracts. St Petersburg, 1995. P.78–79.

16. Волков М.В. Пронильпотентные многообразия универсальных алгебр // Исслед. по алгебраич. системам. Свердловск: УрГУ, 1984. С.39–41.

17. Volkov M.V. On the join of varieties // Simon Stevin. 1984. Vol.58, №4. P.311–317.

18. Nelson E. The lattice of equational classes of semigroups with zero // Canad. Math. Bull. 1971. Vol.14, №4. P.531–534.

19. Волков М.В. Структуры многообразий нильпотентных колец // Исслед. по соврем. алгебре. Свердловск: УрГУ, 1981. С.19–34.

20. McKenzie R.N., McNulty G.F., Taylor W.F. Algebras. Lattices. Varieties. Vol.I. Monterey: Wadsworth&Brooks/Cole, 1987.

21. Ore O. Theory of equivalence relations // Duke Math. J. 1942. Vol.9, №6. P.573–627.

22. Ježek J. The lattice of equational theories. Part I: modular elements // Czechosl. Math. J. 1981. Vol.31, №1. P.127–152.

23. Jones P.R. Distributive, modular, and separating elements in lattices // Rocky Mountain Math. J. 1983. Vol.13, №3. P.429–436.

24. Pudlák P., Tůma J. Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice // Algebra Universalis. 1980. Vol.10, №1. P.74–95.

25. Burris S., Nelson E. Embedding the dual of $\mathbf{\Pi}_m$ in the lattice of equational classes of commutative semigroups // Proc. Amer. Math. Soc. 1971. Vol.30, №1. P.37–39.

Статья поступила 01.12.1992 г.;
окончательный вариант 27.02.1996 г.