УДК 512.532.2

Б. М. Верников, М. В. Волков

СТРОЕНИЕ РЕШЕТОК МНОГООБРАЗИЙ НИЛЬПОЛУГРУПП*

Введение

В работах [1] и [2] мы получили некоторую информацию о строении решеток нильпотентных многообразий полугрупп (см. также работу [3], в которой была приведена первоначальная версия результатов, впоследствии в усовершенствованном виде опубликованных в [2]). А именно, в этих работах было показано, что строение решетки подмногообразий произвольного нильпотентного многообразия в значительной степени определяется строением некоторых интервалов этой решетки, каждый из которых антиизоморфен решетке конгруэнций некоторого G-множества (напомним, что G-*множеством* называется множество, на котором действует группа G, рассматриваемое как унарная алгебра). Если нильпотентное многообразие принадлежит к достаточно широкому классу так называемых наследственно однородных многообразий (определение см. в разделе 2), то решетка его подмногообразий попросту разлагается в подпрямое произведение упомянутых интервалов. В общем же случае эта решетка может быть «собрана» из этих интервалов с помощью некоторой конструкции, которую мы называем *вставкой* одного упорядоченного множества в другое (эта конструкция впервые была введена в [4] и воспроизводилась в [2] и [5]).

Конструкция вставки, вообще говоря, не сохраняет никаких естественных решеточных свойств. Это затрудняет ее применение при решении конкретных задач о решетках многообразий полугрупп, а в тех случаях, когда ее все-таки удается применить, доказательства становятся весьма сложными и громоздкими. Это относится, например, к «ниль-части» первоначальных доказательств результатов, анонсированных в [6] и [7] (см. также [5] и [8]). И наоборот, в тех случаях, когда при применении результатов работ [1] и [2] удается избежать использования вставки, доказательства становятся намного более компактными и прозрачными (см. [9–11]).

*Работа выполнена при поддержке межвузовской научной программы «Университеты России — фундаментальные исследования» Министерства образования Российской Федерации (проект № 617).

Цель данной работы — «элиминировать» конструкцию вставки, т.е. привести такое описание решеток нильпотентных многообразий, которое не использует этой конструкции. Оказывается, это можно сделать не только для нильпотентных многообразий, но и для произвольных многообразий нильполугрупп. Мы покажем, что решетка подмногообразий всякого многообразия нильполугрупп антиизоморфно вкладывается в прямое произведение решеток конгруэнций некоторых G-множеств (при этом в явном виде будет указан способ соответствующего вложения). Упомянутый выше результат о наследственно однородных многообразиях (причем теперь уже не обязательно нильпотентных) будет получен как следствие из этой основной теоремы.

Структурный результат, полученный в данной работе, позволяет получить целый ряд приложений. В частности, с его помощью можно существенно сократить и упростить доказательство результатов, анонсированных в [6] и [7], в той части, которая относится к многообразиям нильполугрупп. Отметим еще, что именно на результате данной работы полностью основано доказательство результатов, недавно анонсированных в [12].

Работа состоит из трех разделов. В первом доказывается основной результат работы, а во втором — следствие о наследственно однородных многообразиях. В третьем разделе на примере одного конкретного многообразия нильполугрупп показано, как наши результаты позволяют выяснить, какие решеточные тождества выполняются в решетке подмногообразий данного многообразия нильполугрупп. Другим приложениям результатов данной работы будут посвящены отдельные статьи.

1. Основной результат

Под словом «полугруппа» в данной работе понимается полугруппа с сигнатурным нулем. Тем не менее все ее результаты применимы и к обычным полугрупповым многообразиям, поскольку, как показано в работе [13], решетка многообразий нильполугрупп с сигнатурным нулем изоморфна решетке многообразий нильполугрупп в обычной полугрупповой сигнатуре.

Всюду далее F — абсолютно свободная полугруппа над алфавитом $\{x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots\}$, элементы которого мы называем *буквами*, в то время как элементы F — *словами*. Символ $\equiv$ обозначает равенство в F. Если $u \in F \setminus \{0\}$, то $\ell(u)$ — длина слова u, $c(u)$ — множество всех букв, входящих в запись u, а $n(u) = |c(u)|$.

Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, а m — натуральное число. Положим $X_m = \{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ и

$$F_m(\mathcal{V}) = \{u \in F \mid c(u) = X_m \text{ и } u \text{ не равно } 0 \text{ в } \mathcal{V}\}.$$

Обозначим через $W_m(\mathcal{V})$ подмножество в $F_m(\mathcal{V})$ такое, что для всякого слова $u \in F_m(\mathcal{V})$ существует, и притом единственное, слово $u^* \in W_m(\mathcal{V})$ со свойством: в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = u^*$. Положим

$$W_m^0(\mathcal{V}) = W_m(\mathcal{V}) \cup \{0\}.$$

В дальнейшем мы будем без специальных оговорок использовать следующие два очевидных факта: если $u \in W_m(\mathcal{V})$, то $u^* \equiv u$; если $u, v \in W_m^0(\mathcal{V})$ и в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = v$, то $u \equiv v$. Через $\mathbf{S}_m$ будем обозначать группу перестановок на множестве $\{1, 2, \ldots, m\}$. Если $u \in F$ и $\sigma \in \mathbf{S}_m$, то через σu будем обозначать образ слова u при автоморфизме полугруппы F, индуцированном σ, т.е. продолжающем отображение $x_i \longmapsto x_{i\sigma}$ (мы считаем, что $i\sigma = i$ при $i > m$). Ясно, что если $u \in W_m(\mathcal{V})$, а $\sigma \in \mathbf{S}_m$, то $\sigma u \in F_m(\mathcal{V})$ и потому существует слово $(\sigma u)^*$. Для всякой перестановки σ из группы $\mathbf{S}_m$ определим унарную операцию σ^* на $W_m^0(\mathcal{V})$ правилом:

$$\sigma^*(u) \equiv (\sigma u)^* \text{ для всякого } u \in W_m(\mathcal{V}) \text{ и } \sigma^*(0) \equiv 0.$$

Тем самым множество $W_m^0(\mathcal{V})$ превращается в унарную алгебру.

Выше уже упоминалось понятие G-множества. Более точно оно определяется следующим образом. Пусть A — непустое множество, G — группа, а φ — гомоморфизм из G в группу всех перестановок множества A. Каждому элементу $g \in G$ поставим в соответствие унарную операцию g^* на множестве A, задаваемую правилом: $g^*(a) = (\varphi(g))(a)$ для всякого $a \in A$. Унарная алгебра с носителем A и множеством операций $\{g^* \mid g \in G\}$ и называется *G-множеством.*

Следующая лемма и по формулировке, и по доказательству аналогична лемме 1.1 работы [2].

Лемма 1. *Множество $W_m^0(\mathcal{V})$ с набором операций $\{\sigma^* \mid \sigma \in \mathbf{S}_m\}$ является $\mathbf{S}_m$-множеством.*

Доказательство. Нужно проверить, что каждая операция σ^* является перестановкой множества $W_m^0(\mathcal{V})$ и что отображение $\sigma \longmapsto \sigma^*$ является гомоморфизмом из группы $\mathbf{S}_m$ в группу всех перестановок этого множества.

Пусть $\sigma, \rho \in \mathbf{S}_m$ и $u \in W_m^0(\mathcal{V})$. Проверим, что

$$\sigma^*(\rho^*(u)) \equiv (\sigma\rho)^*(u). \tag{1}$$

Если $u \equiv 0$, то, очевидно,

$$\sigma^*(\rho^*(u)) \equiv \sigma^*(0) \equiv 0 \equiv (\sigma\rho)^*(u).$$

Пусть теперь $u \in W_m(\mathcal{V})$. Обозначим через ν вполне инвариантную конгруэнцию на F, отвечающую $\mathcal{V}$. Тогда

$$\sigma^*(\rho^*(u)) \equiv (\sigma(\rho^*(u)))^* \ \nu\ \sigma(\rho^*(u)) \equiv \sigma((\rho u)^*) \ \nu\ \sigma(\rho u) \equiv \\ \equiv (\sigma\rho)u \ \nu\ ((\sigma\rho)u)^* \equiv (\sigma\rho)^*(u).$$

Итак, $(\sigma^*(\rho^*(u)), (\sigma\rho)^*(u)) \in \nu$. Учитывая, что слова $\sigma^*(\rho^*(u))$ и $(\sigma\rho)^*(u)$ лежат в $W_m^0(\mathcal{V})$, имеем $\sigma^*(\rho^*(u)) \equiv (\sigma\rho)^*(u)$.

Далее, пусть $u, v \in W_m(\mathcal{V})$ и $\sigma^*(u) \equiv \sigma^*(v)$. Тогда

$$\sigma u \ \nu\ \sigma^*(u) \equiv \sigma^*(v) \ \nu\ \sigma v,$$

откуда $(\sigma u, \sigma v) \in \nu$. Ввиду полной инвариантности ν, применяя к словам σu и σv автоморфизм, обратный к автоморфизму, индуцированному σ, получаем, что $u \nu v$. По определению множества $W_m(\mathcal{V})$ это равносильно тому, что $u \equiv v$. Итак, отображение σ^* взаимно однозначно на множестве $W_m(\mathcal{V})$, а значит, и на множестве $W_m^0(\mathcal{V})$.

Проверим, что σ^* отображает $W_m^0(\mathcal{V})$ на себя. Пусть $u \in W_m(\mathcal{V})$. Ясно, что $\sigma^{-1}u \in F_m(\mathcal{V})$. Это позволяет рассматривать слово $(\sigma^{-1}u)^*$. Обозначим тождественную перестановку из $\mathbf{S}_m$ через ε. Используя равенство (1), имеем

$$\sigma^*((\sigma^{-1}u)^*) \equiv \sigma^*((\sigma^{-1})^*(u)) \equiv (\sigma\sigma^{-1})^*(u) \equiv \varepsilon^*(u) \equiv (\varepsilon u)^* \equiv u^* \equiv u.$$

Итак, отображение σ^* сюръективно на множестве $W_m(\mathcal{V})$, а значит, и на множестве $W_m^0(\mathcal{V})$.

Мы доказали, что σ^* — перестановка на множестве $W_m^0(\mathcal{V})$. С учетом (1) это завершает доказательство леммы.

Зафиксируем многообразие нильполугрупп $\mathcal{V}$ и обозначим через ν вполне инвариантную конгруэнцию на полугруппе F, отвечающую многообразию $\mathcal{V}$. Как известно, решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$ антиизоморфна главному фильтру $[\nu)$ решетки всех вполне инвариантных конгруэнций на F, который мы будем далее обозначать через $F(\nu)$. Для всякой вполне инвариантной конгруэнции $\alpha \in F(\nu)$ и всякого натурального m обозначим через α_m ограничение α на $W_m^0(\mathcal{V})$.

Лемма 2. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие нильполугрупп, а m — натуральное число, то отношение α_m является конгруэнцией $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$.*

Доказательство. Очевидно, что α_m — отношение эквивалентности. Докажем, что оно стабильно. Пусть $\sigma \in \mathbf{S}_m$ и $u \alpha_m v$ (т.е. $u \alpha v$ и $u, v \in W_m^0(\mathcal{V})$). Требуется показать, что $(\sigma^*(u), \sigma^*(v)) \in \alpha_m$. Поскольку $\sigma^*(u), \sigma^*(v) \in W_m^0(\mathcal{V})$, достаточно убедиться в том, что $(\sigma^*(u), \sigma^*(v)) \in \alpha$. Если $u, v \in W_m(\mathcal{V})$, то

$$\sigma^*(u) \equiv (\sigma u)^* \ \nu\ \sigma u \ \alpha\ \sigma v \ \nu\ (\sigma v)^* \equiv \sigma^*(v),$$

откуда $(\sigma^*(u), \sigma^*(v)) \in \alpha$. Поэтому далее без ограничения общности можно считать, что $u \equiv 0$. Предположим, что $v \in W_m(\mathcal{V})$. Поскольку $u\alpha v$, получаем, что

$$\sigma^*(u) \equiv 0 \equiv \sigma u \ \alpha \ \sigma v \ \nu \ (\sigma v)^* \equiv \sigma^*(v),$$

откуда $(\sigma^*(u), \sigma^*(v)) \in \alpha$. Наконец, если $v \equiv 0$, то $u \equiv v$, откуда $\sigma^*(u) \equiv \sigma^*(v)$ и, в частности, $(\sigma^*(u), \sigma^*(v)) \in \alpha$. Лемма доказана.

Для всякого натурального m положим

$$C_m(\mathcal{V}) = \{\alpha_m \mid \alpha \in F(\nu)\}.$$

Лемма 3. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие нильполугрупп, а m — натуральное число, то множество $C_m(\mathcal{V})$ является подрешеткой решетки конгруэнций $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$.*

Доказательство. Определим отображение ω_m из $F(\nu)$ во множество всех бинарных отношений на множестве $W_m^0(\mathcal{V})$ правилом: если $\alpha \in F(\nu)$, то $\omega_m(\alpha) = \alpha_m$. В силу леммы 2 ω_m отображает $F(\nu)$ в $\mathrm{Con}(W_m^0(\mathcal{V}))$. Пусть $\alpha, \beta \in F(\nu)$. Равенство $\omega_m(\alpha \wedge \beta) = \omega_m(\alpha) \wedge \omega_m(\beta)$ и включение $\omega_m(\alpha) \vee \omega_m(\beta) \subseteq \omega_m(\alpha \vee \beta)$ очевидны. Осталось проверить, что

$$\omega_m(\alpha \vee \beta) \subseteq \omega_m(\alpha) \vee \omega_m(\beta). \tag{2}$$

Пусть $(u, v) \in \omega_m(\alpha \vee \beta)$. Это означает, что $(u, v) \in \alpha \vee \beta$ и $u, v \in W_m^0(\mathcal{V})$. Если $u \equiv v \equiv 0$, то, очевидно, $(u, v) \in \omega_m(\alpha) \vee \omega_m(\beta)$. Поэтому далее без ограничения общности можно считать, что $u \not\equiv 0$. Поскольку $(u, v) \in \alpha \vee \beta$, существует последовательность слов $u_0, u_1, \ldots, u_k$, в которой

$$\left.\begin{array}{l}\text{первое слово совпадает с } u, \text{ последнее — с } v, \text{ а любая пара}\\ \text{соседних слов принадлежит либо } \alpha, \text{ либо } \beta.\end{array}\right\} \tag{3}$$

Обозначим через ξ эндоморфизм полугруппы F, определяемый правилом: $\xi(x_i) \equiv x_i$ для $i = 1, 2, \ldots, m$ и $\xi(x_j) \equiv 0$ для всех $j > m$. Для всякого $i = 0, 1, \ldots, k$ положим $v_i \equiv \xi(u_i)$. Ясно, что $v_0 \equiv u_0 \equiv u$ и $v_k \equiv u_k \equiv v$. Поскольку конгруэнции α и β вполне инвариантны, последовательность $v_0, v_1, \ldots, v_k$ обладает свойством (3). Кроме того, для всех $i = 0, 1, \ldots, k$ либо $v_i \equiv 0$, либо $c(v_i) \subseteq X_m$.

Покажем, что существует последовательность слов $w_0, w_1, \ldots, w_\ell$, удовлетворяющая условию (3) и такая, что для всякого $i = 0, 1, \ldots, \ell$ либо $w_i \equiv 0$, либо $c(w_i) = X_m$. Если $v_0, v_1, \ldots, v_k$ — ненулевые слова и $c(v_0) = c(v_1) = \cdots = c(v_k) = X_m$, то в качестве искомой последовательности можно взять уже последовательность $v_0, v_1, \ldots, v_k$. Предположим поэтому, что существует i такое, что либо $v_i \equiv 0$, либо $c(v_i) \subset X_m$. Пусть i — наименьший индекс с таким свойством. Напомним, что $u \not\equiv 0$. Следовательно, $v_0 \equiv u \in W_m(\mathcal{V})$ и, в частности, $c(v_0) = X_m$. Отсюда вытекает, что $i > 0$. Ясно, что $c(v_0) = c(v_1) = \cdots = c(v_{i-1}) = X_m$. Покажем, что пара $(v_{i-1}, 0)$ принадлежит одной из конгруэнций α и β. Если $v_i \equiv 0$, то это очевидно. Пусть теперь $v_i \not\equiv 0$. В силу выбора i это означает, что $c(v_i) \subset X_m$. Следовательно, существует буква $x_n \in c(v_{i-1}) \setminus c(v_i)$. Рассмотрим эндоморфизм μ полугруппы F, определяемый правилом: $\mu(x_n) \equiv 0$ и $\mu(x_s) \equiv x_s$ для всех $s \neq n$. Ясно, что $\mu(v_{i-1}) \equiv 0$ и $\mu(v_i) \equiv v_i$. Поскольку последовательность $v_0, v_1, \ldots, v_k$ удовлетворяет условию (3), пара (v_{i-1}, v_i) принадлежит одной из конгруэнций α и β. Эта конгруэнция вполне инвариантна. Следовательно, она содержит пару $(\mu(v_{i-1}), \mu(v_i))$, т.е. пару $(0, v_i)$. Но тогда она содержит и пару $(v_{i-1}, 0)$. Мы видим, что в последовательности слов $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, 0$ любая пара соседних слов принадлежит либо α, либо β. Если $v_k \equiv 0$, то в качестве последовательности, о которой говорилось в начале данного абзаца, можно взять последовательность $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, 0$. Предположим теперь, что $v_k \not\equiv 0$. Следовательно, $v_k \equiv v \in W_m(\mathcal{V})$ и, в частности, $c(v_k) = X_m$. Пусть теперь j — наибольший индекс с тем свойством, что либо $v_j \equiv 0$, либо $c(v_j) \subset X_m$. Ясно, что $i \leq j < k$ и $c(v_{j+1}) = \cdots = c(v_k) = X_m$. Рассуждения, полностью аналогичные приведенным выше, показывают, что в последовательности слов $0, v_{j+1}, \ldots, v_k$ любая пара соседних слов принадлежит либо α, либо β. Поэтому в качестве последовательности, о которой говорилось в начале данного абзаца, можно взять последовательность слов $v_0, v_1, \ldots, v_{i-1}, 0, v_{j+1}, \ldots, v_k$.

Итак, существует последовательность слов $w_0, w_1, \ldots, w_\ell$, удовлетворяющая условию (3) и такая, что для всякого $i = 0, 1, \ldots, \ell$ либо $w_i \equiv 0$, либо $c(w_i) = X_m$. В силу выбора конгруэнций α и β имеют место включения $\nu \subseteq \alpha$ и $\nu \subseteq \beta$. Поэтому если в последовательности $w_0, w_1, \ldots, w_\ell$ любое слово $w \in \{w_1, \ldots, w_{\ell-1}\}$ заменить на слово, равное w в $\mathcal{V}$, то полученная последовательность по-прежнему будет обладать свойством (3). Отметим, что если для некоторого $i \in \{0, 1, \ldots, \ell\}$ слово w_i не равно 0 в $\mathcal{V}$, то $w_i \in F_m(\mathcal{V})$ и мы можем рассматривать слово w_i^*. Для всякого $i = 0, 1, \ldots, \ell$ положим $z_i \equiv 0$, если $w_i = 0$ в $\mathcal{V}$ (в частности, если $w_i \equiv 0$), и $z_i \equiv w_i^*$ в противном случае. Ясно, что $z_i = w_i$ в $\mathcal{V}$ для всех $i = 0, 1, \ldots, \ell$, причем если $w_i \in W_m^0(\mathcal{V})$, то $z_i \equiv w_i$. В частности, $z_0 \equiv w_0 \equiv u$ и $z_\ell \equiv w_\ell \equiv v$. Следовательно, последовательность слов $z_0, z_1, \ldots, z_\ell$ обладает свойством (3). Кроме того, ясно, что $z_0, z_1, \ldots, z_\ell \in W_m^0(\mathcal{V})$. Это значит, что в последовательности слов $z_0, z_1, \ldots, z_\ell$ каждая пара соседних слов принадлежит либо $\omega_m(\alpha)$, либо $\omega_m(\beta)$. Следовательно, $(u, v) \in \omega_m(\alpha) \vee \omega_m(\beta)$. Лемма доказана.

Как обычно, через $L(\mathcal{V})$ будем обозначать решетку подмногообразий многообразия $\mathcal{V}$, а через $\mathrm{Con}(A)$ — решетку конгруэнций G-множества A.

Основным результатом работы является следующая

Теорема. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие нильполугрупп, то решетка его подмногообразий антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $C_m(\mathcal{V})$, где m пробегает множество всех натуральных чисел.*

Доказательство. Как уже отмечалось, решетка $L(\mathcal{V})$ антиизоморфна решетке $F(\nu)$. Поэтому достаточно доказать, что решетка $F(\nu)$ изоморфна подпрямому произведению решеток вида $C_m(\mathcal{V})$ по всем натуральным m.

Пусть ω_m имеет тот же смысл, что и в доказательстве леммы 3. Из доказательства этой леммы видно, что отображение ω_m является гомоморфизмом из $F(\nu)$ в $\mathrm{Con}(W_m^0(\mathcal{V}))$. Осталось проверить, что пересечение ядер гомоморфизмов ω_m по всем натуральным m есть отношение равенства.

Пусть $\alpha, \beta \in F(\nu)$ и $\omega_m(\alpha) = \omega_m(\beta)$ для всякого натурального m. Требуется установить, что $\alpha = \beta$. Предположим противное. Тогда без ограничения общности можно считать, что существуют слова $u, v \in F$ такие, что $(u, v) \in \alpha \setminus \beta$. Обозначим многообразия, отвечающие конгруэнциям α и β, через $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ соответственно. Ясно, что $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \mathcal{V}$ (в частности, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — многообразия нильполугрупп) и что тождество $u = v$ выполнено в $\mathcal{A}$, но не выполнено в $\mathcal{B}$. Последнее означает, в частности, что тождество $u = v$ не выполнено в $\mathcal{V}$. Следовательно, $\mathcal{V}$ не может одновременно удовлетворять тождествам $u = 0$ и $v = 0$. Это позволяет далее считать, что u не равно 0 в $\mathcal{V}$. В частности, $u \not\equiv 0$. Положим $m = n(u)$. Переименовав при необходимости буквы, входящие в запись слов u и v, мы можем добиться того, чтобы выполнялось равенство $c(u) = X_m$. Тогда $u \in F_m(\mathcal{V})$ и мы можем рассматривать слово u^*. Поскольку $u^* = u$ в $\mathcal{V}$, мы получаем, что $u^* = u = v$ в $\mathcal{A}$. С другой стороны, если $u^* = v$ в $\mathcal{B}$, то $u = u^* = v$ в $\mathcal{B}$, что невозможно. Это позволяет считать, что $u \equiv u^* \in W_m(\mathcal{V})$. Если $v = 0$ в $\mathcal{V}$, то $u = v = 0$ в $\mathcal{A}$. Но тогда $(u, 0) \in \omega_m(\alpha) = \omega_m(\beta) \subseteq \beta$, откуда $u = 0 = v$ в $\mathcal{B}$ вопреки выбору слов u и v. Поэтому далее можно считать, что v не равно 0 в $\mathcal{V}$. В частности, $v \not\equiv 0$. Предположим, что $c(v) = c(u) = X_m$. Тогда $v \in F_m(\mathcal{V})$ и мы можем рассматривать слово v^*. Учитывая, что $v = v^*$ в $\mathcal{V}$, получаем, что $u = v = v^*$ в $\mathcal{A}$. Следовательно, $(u, v^*) \in \omega_m(\alpha) = \omega_m(\beta) \subseteq \beta$, откуда $u = v^* = v$ в $\mathcal{B}$. Это вновь противоречит выбору слов u и v. Осталось рассмотреть случай, когда $c(u) \neq c(v)$. Учитывая, что $u = v$ в многообразии нильполугрупп $\mathcal{A}$, получаем, что в $\mathcal{A}$ выполнены тождества $u = 0$ и $v = 0$. Из того, что $u = 0$ в $\mathcal{A}$, вытекает, что $(u, 0) \in \omega_m(\alpha) = \omega_m(\beta) \subseteq \beta$, т.е. $u = 0$ в $\mathcal{B}$. Пусть $k = n(v)$. Тогда $v \in F_k(\mathcal{V})$ и мы вновь можем рассматривать слово v^*. Из того, что $v = 0$ в $\mathcal{A}$ и $v = v^*$ в $\mathcal{V}$, вытекает, что $v^* = 0$ в $\mathcal{A}$. Но тогда

$(v^*, 0) \in \omega_k(\alpha) = \omega_k(\beta) \subseteq \beta$, откуда $v = v^* = 0$ в $\mathcal{B}$. Следовательно, $u = 0 = v$ в $\mathcal{B}$ вопреки выбору слов u и v. Теорема доказана.

2. Наследственно однородный случай

Доказанная в предыдущем разделе теорема делает актуальным вопрос о строении решеток вида $C_m(\mathcal{V})$. Сейчас мы дадим ответ на этот вопрос в одном важном частном случае. А именно, оказывается, что при некотором дополнительном ограничении на $\mathcal{V}$ решетка $C_m(\mathcal{V})$ изоморфна подпрямому произведению решеток конгруэнций некоторых $\mathbf{S}_m$-подмножеств $\mathbf{S}_m$-множества $W_m^0(\mathcal{V})$. Мы выведем соответствующее утверждение из некоторого результата о конгруэнциях на G-множествах. Чтобы сформулировать его, нам понадобится ряд определений.

Напомним, что G-множество A называется *транзитивным*, если для любых $x, y \in A$ найдется элемент $g \in G$ такой, что $y = g^*(x)$. Транзитивное G-подмножество G-множества A называется *орбитой* этого G-множества. Ясно, что всякое G-множество является дизъюнктным объединением всех своих орбит. Отметим также тот очевидный факт, что объединение произвольного набора орбит G-множества A является его G-подмножеством. Множество всех орбит G-множества A будем обозначать через $\mathrm{Orb}(A)$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Con}(A)$, а B и C — различные орбиты в A. Будем говорить, что:

α *связывает* B и C, если $x\alpha y$ для некоторых элементов $x \in B$ и $y \in C$;

α *склеивает* B и C, если $x\alpha y$ для любых элементов $x, y \in B \cup C$.

Лемма 4. *Пусть A — нетранзитивное G-множество, C — подрешетка в* $\mathrm{Con}(A)$*, A_0 — орбита в A, а Φ — разбиение множества* $\mathrm{Orb}(A) \setminus A_0$. *Для всякого блока φ разбиения Φ обозначим через A_φ объединение всех орбит, входящих в φ, и орбиты A_0. Предположим, что выполнены следующие условия:*

(i) *если φ — блок разбиения Φ, то всякая конгруэнция $\alpha \in \mathrm{Con}(A_\varphi)$ является ограничением на A_φ некоторой конгруэнции $\alpha' \in C$;*

(ii) *если конгруэнция $\alpha \in C$ связывает орбиты X и Y, принадлежащие различным блокам разбиения Φ, то α склеивает каждую из орбит X и Y с орбитой A_0;*

(iii) *если конгруэнция $\alpha \in C$ связывает орбиту A_0 с некоторой другой орбитой X, то α склеивает A_0 и X.*

Тогда решетка C изоморфна подпрямому произведению решеток $\mathrm{Con}(A_\varphi)$ *по всем блокам φ разбиения Φ.*

Доказательство. Для всякого блока φ разбиения Φ определим отображение ω_φ из C во множество всех бинарных отношений на множестве A_φ правилом: если $\alpha \in C$, то $\omega_\varphi(\alpha)$ — ограничение α на A_φ. Ясно, что ω_φ отображает C в $\mathrm{Con}(A_\varphi)$. В силу условия (i) отображение ω_φ является сюръекцией.

Проверим, что для всякого $\varphi \in \Phi$ отображение ω_φ является гомоморфизмом из C в $\mathrm{Con}(A_\varphi)$. Пусть $\alpha, \beta \in C$. Равенство $\omega_\varphi(\alpha \wedge \beta) = \omega_\varphi(\alpha) \wedge \omega_\varphi(\beta)$ и включение $\omega_\varphi(\alpha) \vee \omega_\varphi(\beta) \subseteq \omega_\varphi(\alpha \vee \beta)$ очевидны. Осталось проверить, что

$$\omega_\varphi(\alpha \vee \beta) \subseteq \omega_\varphi(\alpha) \vee \omega_\varphi(\beta). \tag{4}$$

Пусть $(x, y) \in \omega_\varphi(\alpha \vee \beta)$. Это означает, что $(x, y) \in \alpha \vee \beta$ и $x, y \in A_\varphi$. Требуется показать, что существует последовательность элементов из A, в которой

$$\left.\begin{array}{l}\text{все элементы лежат в } A_\varphi\text{, первый элемент совпадает с } x\text{,}\\ \text{последний — с } y\text{, а любая пара соседних элементов при-}\\ \text{надлежит либо } \alpha\text{, либо } \beta.\end{array}\right\} \tag{5}$$

Поскольку $(x, y) \in \alpha \vee \beta$, существует последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_k \in A$, в которой первый элемент совпадает с x, последний — с y, а любая пара соседних элементов принадлежит либо α, либо β. Если, кроме того, $x_0, x_1, \ldots, x_k \in A_\varphi$, то условию (5) удовлетворяет уже последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_k$. Поскольку $x_0 = x$, $x_k = y$ и $x, y \in A_\varphi$, можно считать, что существуют числа i и j такие, что

$$1 \le i \le j \le k - 1,\ x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k \in A_\varphi,\ \text{ а } x_i, x_j \notin A_\varphi.$$

Обозначим орбиты G-множества A, содержащие элементы x_{i-1} и x_i, через X и Y соответственно и зафиксируем элемент $a_0 \in A_0$.

Предположим сначала, что $x_{i-1}, x_{j+1} \notin A_0$. Ясно, что в этом случае орбиты X и Y принадлежат различным блокам разбиения Φ. Поскольку, кроме того, эти две орбиты связываются одной из конгруэнций α и β, из условия (ii) вытекает, что одна из конгруэнций α и β склеивает орбиты X и A_0. В частности, она содержит пару (x_{i-1}, a_0). Аналогично проверяется, что одна из конгруэнций α и β содержит пару (a_0, x_{j+1}). Следовательно, последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, a_0, x_{j+1}, \ldots, x_k$ удовлетворяет условию (5).

Пусть теперь $x_{i-1} \notin A_0$, а $x_{j+1} \in A_0$. Как и в предыдущем абзаце, проверяется, что одна из конгруэнций α и β склеивает орбиты X и A_0. В частности, она содержит пару (x_{i-1}, x_{j+1}). Следовательно, в данном случае условию (5) удовлетворяет последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k$.

Случай, когда $x_{i-1} \in A_0$, а $x_{j+1} \notin A_0$, разбирается вполне аналогично предыдущему.

Пусть, наконец, $x_{i-1}, x_{j+1} \in A_0$. На этот раз из условия (iii) вытекает, что одна из конгруэнций α и β склеивает орбиты A_0 и Y. В частности, она содержит пару (x_{i-1}, x_{j+1}). Мы вновь получаем, что последовательность $x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{j+1}, \ldots, x_k$ удовлетворяет условию (5).

Включение (4) доказано. Осталось проверить, что пересечение ядер гомоморфизмов ω_φ по всем блокам φ разбиения Φ есть отношение равенства. Пусть $\alpha, \beta \in C$ и $\omega_\varphi(\alpha) = \omega_\varphi(\beta)$ для всякого $\varphi \in \Phi$. Требуется доказать, что $\alpha = \beta$. Предположим противное. Без ограничения общности можно считать, что существует пара $(x, y) \in \alpha \setminus \beta$. Если $x, y \in A_0$, то $(x, y) \in \omega_\varphi(\alpha) = \omega_\varphi(\beta) \subseteq \beta$ для произвольного блока φ разбиения Φ. Но это невозможно, так как $(x, y) \notin \beta$. Поэтому без ограничения общности можно считать, что $x \notin A_0$. Обозначим орбиты, содержащие x и y, через X и Y соответственно, а блок разбиения Φ, содержащий X, — через φ. Если $y \in A_\varphi$, то вновь $(x, y) \in \omega_{\boldsymbol{\psi}}(\alpha) = \omega_\varphi(\beta) \subseteq \beta$ вопреки выбору x и y. Следовательно, $Y \notin \varphi$ и $Y \neq A_0$. Обозначим блок разбиения Φ, содержащий Y, через ψ и зафиксируем элемент $a_0 \in A_0$. Конгруэнция α связывает орбиты X и Y. По условию (ii) α склеивает каждую из орбит X и Y с A_0. В частности, $(x, a_0) \in \omega_\varphi(\alpha) = \omega_\varphi(\beta) \subseteq \beta$ и $(a_0, y) \in \omega_\psi(\alpha) = \omega_{\boldsymbol{\psi}}(\beta) \subseteq \beta$. Следовательно, $x\,\beta\,a_0\,\beta\,y$, т.е. $x\beta y$ вопреки выбору элементов x и y. Лемма доказана.

Вернемся к многообразиям полугрупп и введем ряд определений и обозначений.

Пусть m и n — натуральные числа и $m \leq n$. Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ назовем (n, m)-*расщепляемым*, если из выполнимости в $\mathcal{V}$ тождества $u = v$ такого, что $n(u) = m$, $\ell(u) = n$ и $\ell(v) > n$, вытекает, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u = 0$. Многообразие, являющееся (n, m)-расщепляемым для всех $n \geq m$, назовем m-*однородным*. Если $\mathcal{V}$ m-однородно для всех m, то $\mathcal{V}$ называется *однородным*. Иными словами, многообразие однородно, если вместе со всяким выполненным в нем тождеством $u = v$ таким, что $\ell(u) \neq \ell(v)$, в нем выполняется и тождество $u = 0$. *Наследственно однородным* (*наследственно* m-*однородным*) будем называть многообразие, все подмногообразия которого однородны (соответственно m-однородны). Используя хорошо известное описание атомов решетки всех многообразий полугрупп (см., например, [14]), легко понять, что всякое наследственно однородное многообразие полугрупп состоит из нильполугрупп.

Для всякого $n \geq m$ обозначим через $W_{n,m}(\mathcal{V})$ множество всех слов длины n из $W_m(\mathcal{V})$ и положим

$$W^0_{n,m}(\mathcal{V}) = W_{n,m}(\mathcal{V}) \ \cup \ \{0\}.$$

Легко проверить, что если многообразие $\mathcal{V}$ (n, m)-расщепляемо (в частности, если оно m-однородно), то $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ является $\mathbf{S}_m$-подмножеством в $W^0_m(\mathcal{V})$ (это вытекает, например, из доказательства леммы 1.1 в [2]).

Основным результатом данного раздела является

Предложение 1. *Пусть m — натуральное число. Если многообразие нильполугрупп $\mathcal{V}$ наследственно m-однородно, то решетка $C_m(\mathcal{V})$ изоморфна подпрямому произведению решеток вида* $\mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ *по всем $n \geq m$.*

Доказательство. Для краткости положим $C_m = C_m(\mathcal{V})$, $W_m = W^0_m(\mathcal{V})$ и $W_{n,m} = W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ для всякого $n \geq m$. Ясно, что $\{0\}$ — орбита в W_m. Можно считать, что $W_m \neq \{0\}$, так как в противном случае как решетка C_m, так и решетки вида $\mathrm{Con}(W_{n,m})$ для всех $n \geq m$ одноэлементны. В частности, $\mathbf{S}_m$-множество W_m нетранзитивно. Орбиты этого $\mathbf{S}_m$-множества, отличные от $\{0\}$, будем называть *ненулевыми*. Если U — ненулевая орбита в W_m, то без ограничения общности можно считать, что U состоит из слов одной и той же длины. Это позволяет определить *длину* ненулевой орбиты U как длину любого слова из U. Длину ненулевой орбиты U будем обозначать через $\ell(U)$. Ясно, что если $U \neq \{0\}$, то $\ell(U) \geq m$. Определим разбиение Φ на множестве $\mathrm{Orb}(W_m) \setminus \{0\}$ правилом: ненулевые орбиты U и V попадают в один и тот же блок разбиения Φ тогда и только тогда, когда $\ell(U) = \ell(V)$.

Ясно, что если φ — блок разбиения Φ, то W_φ (в обозначениях леммы 4) есть не что иное, как $W_{n,m}$ для некоторого $n \geq m$. Для доказательства предложения достаточно показать, что мы находимся в условиях леммы 4 (при $A = W_m$, $C = C_m$, $A_0 = \{0\}$ и разбиении Φ, определенном в предыдущем абзаце).

Проверим сначала выполнение условия (i) леммы 4. Пусть α — конгруэнция на $W_{n,m}$. В процессе доказательства теоремы 1.3 в работе [2] показано, что α является ограничением на $W_{n,m}$ некоторой вполне инвариантной конгруэнции $\overline{\alpha}$ на F, содержащей вполне инвариантную конгруэнцию на F, отвечающую $\mathcal{V}$ (при этом используется лишь (n,m)-расщепляемость $\mathcal{V}$, которая имеет место в условиях доказываемого предложения). Обозначим через α' ограничение $\overline{\alpha}$ на W_m. Из определения решетки $C_m(\mathcal{V})$ вытекает, что $\alpha' \in C_m$. Очевидно, что ограничение α' на $W_{n,m}$ равно α.

Из доказательства теоремы видно, что всякая конгруэнция $\alpha \in C_m$ является ограничением на W_m некоторой вполне инвариантной конгруэнции $\overline{\alpha}$ на F, содержащей вполне инвариантную конгруэнцию на F, отвечающую $\mathcal{V}$. Многообразие, отвечающее α, обозначим через $\mathcal{V}_\alpha$. Ясно, что $\mathcal{V}_\alpha \subseteq \mathcal{V}$ и что если $u\alpha v$, то в $\mathcal{V}_\alpha$ выполнено тождество $u = v$. Если при этом $\ell(u) \neq \ell(v)$, то, в силу наследственной m-однородности многообразия $\mathcal{V}$, в $\mathcal{V}_\alpha$ выполнены тождества $u = 0$ и $v = 0$. Иными словами, если α связывает орбиты U и V, принадлежащие различным блокам разбиения Φ, то α склеивает каждую из орбит U и V с орбитой $\{0\}$. Таким образом, условие (ii) леммы 4 также выполнено.

Наконец, условие (iii) с очевидностью вытекает из того, что орбита $\{0\}$ одноэлементна. Предложение доказано.

Из теоремы и предложения 1 непосредственно вытекает

Следствие 1. *Если $\mathcal{V}$ — наследственно однородное многообразие полугрупп, то решетка $L(\mathcal{V})$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток вида $\mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{V}))$ по всем m и n таким, что $n \geq m$.*

Отметим, что это следствие было ранее получено авторами другим способом в [2] (см. там следствие 1.1) для случая, когда многообразие $\mathcal{V}$ нильпотентно.

3. Пример

На протяжении данного раздела через $\mathcal{N}$ обозначается многообразие полугрупп, заданное тождествами

$$xyzt = tzyx,\ x^2y = (xy)^2,\ xy^2 = yx^2,\ xyzx = yxzy,\ x^4 = 0.$$

Как показано в [8], $\mathcal{N}$ — одно из максимальных многообразий нильполугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. Модулярность решетки $L(\mathcal{N})$ доказана в [8] на основе результатов работ [1] и [3] с помощью весьма сложных и громоздких рассуждений. Результаты разделов 1 и 2 в сочетании с информацией о G-множествах, полученной в [15], позволяют с помощью простых и относительно коротких выкладок установить значительно более сильный факт. Чтобы сформулировать его, нам понадобятся некоторые обозначения.

Обозначим через M_k решетку, изображенную на рис. 1, а через $M_{k,n}$ — решетку, изображенную на рис. 2. Многообразия, порожденные решетками M_k и $M_{k,n}$, обозначим через $\mathbf{M}_k$ и $\mathbf{M}_{k,n}$ соответственно.

Основным результатом данного раздела является

Предложение 2. *Решетка $L(\mathcal{N})$ принадлежит многообразию $\mathbf{M}_{4,3}$.*

Более того, из доказательства предложения 2 будет видно, что $\mathbf{M}_{4,3}$ — наименьшее многообразие решеток, содержащее $L(\mathcal{N})$. Отметим, что принадлежность многообразию $\mathbf{M}_{4,3}$ является значительно более сильным свойством, чем модулярность. В самом деле, хорошо известно, что многообразие всех модулярных решеток имеет континуум подмногообразий (см., например, теорему V.2.5 в [16]), в то время как многообразие $\mathbf{M}_{4,3}$ — всего семь подмногообразий (решетка его подмногообразий изображена на рис. 3, на котором через $\mathbf{T}$ обозначено тривиальное многообразие, а через $\mathbf{DIS}$ — многообразие всех дистрибутивных решеток). В частности, из предложения 2 вытекает дезарговость решетки $L(\mathcal{N})$, поскольку решетка $M_{4,3}$ дезаргова.

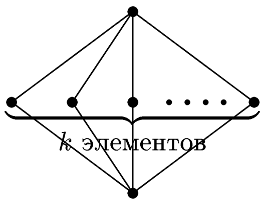

Рис. 1

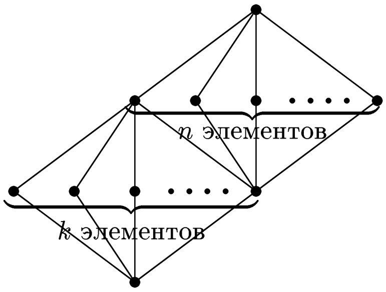

Рис. 2

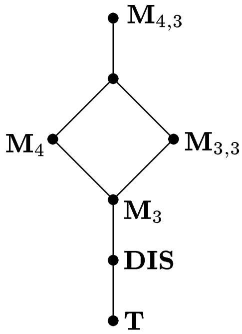

Рис. 3

Прежде чем приступать к доказательству предложения 2, приведем необходимую для этого вспомогательную информацию. Начнем с информации о решетках конгруэнций G-множеств. Пусть A — G-множество и $a \in A$. Положим

$$\mathrm{Stab}_A(a) = \{g \in G \mid g^*(a) = a\}.$$

Ясно, что $\mathrm{Stab}_A(a)$ — подгруппа в G. Как обычно, через $\mathrm{Sub}(G)$ будем обозначать решетку подгрупп группы G. Нам понадобится следующее хорошо известное утверждение (см., например, лемму 4.20 в [17]).

Лемма 5. *Решетка конгруэнций транзитивного G-множества A изоморфна интервалу* $[\mathrm{Stab}_A(a), G]$ *решетки* $\mathrm{Sub}(G)$, *где a — произвольный элемент из A.*

Хорошо известно, что $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_3) \cong M_4$. Поэтому из леммы 5 вытекает

Следствие 2. *Решетка конгруэнций транзитивного* $\mathbf{S}_3$*-множества лежит в* $\mathbf{M}_4$.

Конгруэнцию α будем называть *жадной*, если она склеивает любые две орбиты, которые она связывает. Совокупность всех жадных конгруэнций G-множества A будем обозначать через $\mathrm{GCon}(A)$. Легко проверяется (см. лемму 1.1 в [15]), что $\mathrm{GCon}(A)$ — подрешетка в $\mathrm{Con}(A)$. Нам понадобится следующий результат.

Лемма 6 ([15], предложение 1.2). *Решетка жадных конгруэнций произвольного G-множества A изоморфна подпрямому произведению решеток конгруэнций всех орбит этого G-множества и решетки эквивалентностей на множестве всех его орбит.*

Пусть $\mathrm{Orb}(A) = \{A_i \,|\, i \in I\}$ и $\alpha \in \mathrm{GCon}(A)$. Обозначим через α_i ограничение конгруэнции α на орбиту A_i, а через α^* — отношение эквивалентности на множестве $\mathrm{Orb}(A)$, определяемое следующим образом: если $B, C \in \mathrm{Orb}(A)$, то $B\alpha C$ тогда и только тогда, когда либо $B = C$, либо α связывает B и C. Как обычно, решетку эквивалентностей на множестве X будем обозначать через $\mathrm{Eq}(X)$. Изоморфное вложение решетки $\mathrm{GCon}(A)$ в $\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(A)) \times \prod\limits_{i \in I} \mathrm{Con}(A_i)$, найденное в [15], выглядит следующим образом: образом конгруэнции α является кортеж $(\alpha^*; \ldots, \alpha_i, \ldots)$.

G-множество, все конгруэнции которого являются жадными, назовем *сегрегированным.* Следующее предложение непосредственно вытекает из теоремы 2.2 работы [15].

Лемма 7. *Пусть $\mathbf{L}$ — произвольное многообразие модулярных решеток, содержащее многообразие $\mathbf{M}_3$. Решетка конгруэнций G-множества A принадлежит $\mathbf{L}$ тогда и только тогда, когда решетки конгруэнций всех орбит этого G-множества лежат в $\mathbf{L}$, а A содержит ≤ 3 орбит и сегрегировано.*

Нам будет полезно следующее очевидное достаточное условие сегрегированности G-множества.

Лемма 8. *Если G-множество содержит не более одной неодноэлементной орбиты, то оно сегрегировано.*

Нам понадобятся также некоторые известные факты о следствиях полугрупповых тождеств. Приведем необходимые для их формулировки определения и обозначения. Если u и v — полугрупповые слова, то мы будем писать $u \lhd v$, если $v \equiv a\xi(u)b$ для некоторых (возможно, пустых) слов a и b и некоторого эндоморфизма ξ полугруппы F. Напомним, что многообразие полугрупп называется *перестановочным*, если оно удовлетворяет тождеству вида

$$x_1 x_2 \cdots x_n = x_{1\pi} x_{2\pi} \cdots x_{n\pi}, \tag{6}$$

где π — нетривиальная перестановка из $\mathbf{S}_n$. В дальнейшем нам будут полезны следующие три технических замечания о тождествах нильполугрупп. Первые два из них очевидны, доказательство третьего см. в [11], лемма 1.3.

Лемма 9. *Пусть $\mathcal{V}$ — многообразие нильполугрупп.*

(i) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $c(u) \neq c(v)$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также тождеству $u = 0$.*

(ii) *Если $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству вида $x^r = x^s$, где $r < s$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также тождеству $x^r = 0$.*

(iii) *Если $\mathcal{V}$ перестановочно и удовлетворяет тождеству $u = v$ такому, что $\ell(u) < \ell(v)$ и $u \lhd v$, то $\mathcal{V}$ удовлетворяет также тождеству $u = 0$.*

Если $\mathcal{V}$ — многообразие полугрупп, а n — натуральное число, то через $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ обозначается множество всех перестановок π из $\mathbf{S}_n$ таких, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество (6). Ясно, что $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V})$ — подгруппа в $\mathbf{S}_n$. Следующая лемма является частным случаем результатов работы [18].

Лемма 10. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ удовлетворяет тождеству $xyzt = tzyx$, то $\mathrm{Perm}_n(\mathcal{V}) = \mathbf{S}_n$ для всякого $n \geq 5$.*

Сделаем теперь несколько замечаний о тождествах, выполненных в $\mathcal{N}$. Используя сначала тождество $x^2y = (xy)^2$, а затем дважды тождество $xyzt = tzyx$, имеем

$$x^2yz = (xy)^2z \equiv x(yx)yz = zy^2x^2 = x^2y^2z.$$

Таким образом, $x^2yz = x^2y^2z$ в $\mathcal{N}$. В силу леммы 9(iii) это означает, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество $x^2yz = 0$, а значит, и тождества

$$x^2yzt = 0, \tag{7}$$

$$x^2y^2 = 0. \tag{8}$$

Используя тождество $xyzt = tzyx$, получаем, что $xyz^2 = z^2yx = 0$ в $\mathcal{N}$. Напомним, что слово называется *линейным*, если всякая буква входит в него ≤ 1 раза. Учитывая лемму 10 и тождество (7), получаем, что все нелинейные слова длины ≥ 5 равны 0 в $\mathcal{N}$. В частности, отсюда вытекает, что $xy^2z = x(yz)^2 = 0$ в $\mathcal{N}$. Будем говорить, что слова u и v *подобны в многообразии* $\mathcal{N}$, если существует слово w такое, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество $u = w$ и v может быть получено из w переименованием переменных. Из сказанного выше и того факта, что $xyzy = yzyx$ в $\mathcal{N}$, легко вытекает, что каждое слово, не равное 0 в $\mathcal{N}$, подобно в $\mathcal{N}$ некоторому слову из множества

$$W = \{x_1x_2\cdots x_m, x^2, x^3, xyx, xy^2, (xy)^2, xyxz, xyzx\}.$$

Приступим к непосредственному доказательству предложения 2. В силу теоремы достаточно проверить, что $C_m(\mathcal{N}) \in \mathbf{M}_{3,4}$ для всякого натурального m.

Если $m = 1$, то нужный нам факт вытекает из следующего общего утверждения.

Лемма 11. *Если $\mathcal{V}$ — многообразие нильполугрупп, то решетка $C_1(\mathcal{V})$ дистрибутивна.*

Доказательство. В силу первых двух утверждений леммы 9 всякое многообразие нильполугрупп наследственно 1-однородно. Учитывая предложение 1, получаем, что решетка $C_1(\mathcal{V})$ является подпрямым произведением решеток вида $\mathrm{Con}(W_{n,1}^0(\mathcal{V}))$ по всем натуральным n. Осталось заметить, что $W_{n,1}^0(\mathcal{V}) \subseteq \{x_1^n, 0\}$, и потому решетка $\mathrm{Con}(W_{n,1}^0(\mathcal{V}))$ содержит ≤ 2 элементов. Лемма доказана.

Пусть теперь $m = 2$. Положим $W_2 = W_2^0(\mathcal{N})$ и $C_2 = C_2(\mathcal{N})$. Из вида множества W и тождеств, задающих $\mathcal{N}$, ясно, что W_2 состоит из следующих пяти орбит:

$$U_0 = \{0\},\ U_1 = \{xy, yx\},\ U_2 = \{xy^2\},\ U_3 = \{xyx, yxy\},\ U_4 = \{(xy)^2\}.$$

Пусть $\alpha \in C_2$. Из доказательства теоремы видно, что α — ограничение на W_2 некоторой вполне инвариантной конгруэнции $\overline{\alpha}$ на полугруппе F, содержащей вполне инвариантную конгруэнцию на F, отвечающую многообразию $\mathcal{N}$. Обозначим подмногообразие многообразия $\mathcal{N}$, отвечающее $\overline{\alpha}$, через $\mathcal{N}_\alpha$. Предположим, что α связывает две различные орбиты $\mathbf{S}_2$-множества W_2, т.е. что $u\alpha v$, где $u \in U_i$, $v \in U_j$ и $0 \leq i < j \leq 4$. Тогда $u\overline{\alpha}v$, т.е. $u = v$ в $\mathcal{N}_\alpha$. Из вида орбит ясно, что либо одна из орбит U_i и U_j одноэлементна, либо $\ell(u) < \ell(v)$ и $u \lhd v$. Ясно, что в первом случае α склеивает U_i и U_j. Во втором случае из леммы 9(iii) вытекает, что α склеивает каждую из орбит U_i и U_j с U_0, а значит, и склеивает U_i и U_j между собой. Мы показали, что C_2 состоит только из жадных конгруэнций $\mathbf{S}_2$-множества W_2, т.е. является подрешеткой в $\mathrm{GCon}(W_2)$. В силу леммы 6, C_2 вкладывается в $\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(W_2)) \times \prod\limits_{i=0}^{4} \mathrm{Con}(U_i)$. Обозначим через E_2 проекцию на $\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(W_2))$ образа решетки C_2 при соответствующем изоморфном вложении. Все орбиты $\mathbf{S}_2$-множества W_2 содержат ≤ 2 элементов. Следовательно, решетки конгруэнций всех этих орбит дистрибутивны. Осталось убедиться в том, что $E_2 \in \mathbf{M}_{3,4}$.

Пусть α^* — эквивалентность из E_2, соответствующая α при вложении C_2 в $\mathrm{Eq}(\mathrm{Orb}(W_2)) \times \prod\limits_{i=0}^{4} \mathrm{Con}(U_i)$. Если U и V — различные орбиты в W_2, то, согласно комментарию к лемме 6, $U\alpha^*V$ тогда и только тогда, когда α связывает U и V, т.е. когда $u\alpha v$ для некоторых слов $u \in U$ и $v \in V$. Но тогда $u\overline{\alpha}v$, т.е. $u = v$ в $\mathcal{N}_\alpha$. Обратно, если в $\mathcal{N}_\alpha$ выполнено тождество $u = v$, где

$u, v \in W_2$, то $u\alpha v$ и потому $U\alpha^* V$, где U — орбита, содержащая u, а V — орбита, содержащая v. Учитывая лемму 9(iii), легко понять, что если $U_1\alpha^* U_i$ для некоторого $i > 1$, то $U_j\alpha^* U_0$ для всех $j \geq 1$, а если $U_3\alpha^* U_4$, то $U_3\alpha^* U_0$. Предположим, что $U_2\alpha^* U_3$. Тогда в $\mathcal{N}_\alpha$ выполнено тождество $xy^2 = yxy$. Умножая это тождество слева на x и учитывая, что в $\mathcal{N}$ выполнено тождество (8), получаем, что в этом случае $U_4\alpha^* U_0$. Из сказанного легко вытекает, что E_2 имеет вид, изображенный на рис. 4. На этом рисунке через ε обозначено отношение равенства на $\mathrm{Orb}(W_2)$, через Δ — универсальное отношение на этом множестве, через $\rho_{i_1 i_2 \ldots i_r}$ (где $r \geq 2$ и $0 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq 4$) — эквивалентность на $\mathrm{Orb}(W_2)$, единственным неодноэлементным классом которой является $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \ldots, U_{i_r}\}$, наконец, через $\rho_{04,23}$ — эквивалентность на $\mathrm{Orb}(W_2)$, классами которой являются $\{U_0, U_4\}$, $\{U_2, U_3\}$ и $\{U_1\}$. Из рис. 4 видно, что $E_2 \in \mathbf{M}_{3,4}$.

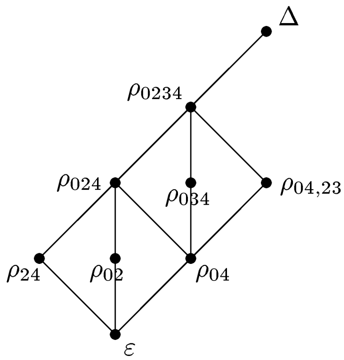

Рис. 4

Пусть, наконец, $m > 2$. Из вида множества W видно, что если слова u и v зависят от > 2 букв, не равны 0 в $\mathcal{N}$ и $\ell(u) < \ell(v)$, то либо $c(u) \neq c(v)$, либо $u \lhd v$. В силу леммы 9 отсюда вытекает, что в рассматриваемом случае многообразие $\mathcal{N}$ наследственно m-однородно. В силу предложения 1 достаточно показать, что $\mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{N})) \in \mathbf{M}_{3,4}$ для всех $n \geq m$.

Рассмотрим сначала случай, когда $n = m$. Для краткости положим $W_n = W_{n,n}(\mathcal{N})$ и $W^0_n = W^0_{n,n}(\mathcal{N})$. Ясно, что W_n — транзитивное $\mathbf{S}_n$-множество. Следовательно, W^0_n состоит из двух орбит: $\{0\}$ и W_n. Из леммы 8 вытекает, что $\mathbf{S}_n$-множество W^0_n сегрегировано. В силу леммы 7 осталось убедиться в том, что $\mathrm{Con}(W_n) \in \mathbf{M}_{3,4}$. Следствие 2 позволяет считать, что $n \geq 4$. Без ограничения общности можно считать, что $x_1x_2\cdots x_n \in W_n$. В силу леммы 5, $\mathrm{Con}(W_n) \cong [\mathrm{Stab}_{W_n}(x_1x_2\cdots x_n), \mathbf{S}_n]$. Легко понять, что $\mathrm{Stab}_{W_n}(x_1x_2\cdots x_n) = \mathrm{Perm}_n(\mathcal{N})$ (см., например, доказательство следствия 1.7 в [11]). Таким образом, $\mathrm{Con}(W_n) \cong [\mathrm{Perm}_n(\mathcal{N}), \mathbf{S}_n]$. Если $n \geq 5$, то, в силу леммы 10, интервал $[\mathrm{Perm}_n(\mathcal{N}),\ \mathbf{S}_n]$ одноэлементен. Пусть, наконец, $n = 4$. Если $\pi \in \mathbf{S}_4$, то через $\mathrm{gr}\{\pi\}$ будем обозначать подгруппу в $\mathbf{S}_4$, порожденную π. Положим $P_{14,23} = \mathrm{gr}\{(14)(23)\}$. По условию $\mathrm{Perm}_4(\mathcal{N}) \supseteq P_{14,23}$. Следовательно, $\mathrm{Con}(W_4)$ — интервал в решетке $[P_{14,23},\ \mathbf{S}_4]$. Как обычно, будем обозначать через $\mathbf{A}_4$ знакопеременную подгруппу в $\mathbf{S}_4$, а через $\mathbf{V}_4$ — четверную группу Клейна. Кроме того, положим $C_{1243} = \mathrm{gr}\{(1243)\}$ и $T_{ij} = \mathrm{gr}\{(ij)\}$, где $1 \le i < j \le 4$. На рис. 5 изображен интервал $[P_{14,23},\ \mathbf{S}_4]$ решетки $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_4)$ (через $\vee$ на этом рисунке обозначается объединение в решетке $\mathrm{Sub}(\mathbf{S}_4)$). Мы видим, что $[P_{14,23},\ \mathbf{S}_4] \cong M_{3,4}$. Следовательно, $\mathrm{Con}(W_4) \in \mathbf{M}_{3,4}$.

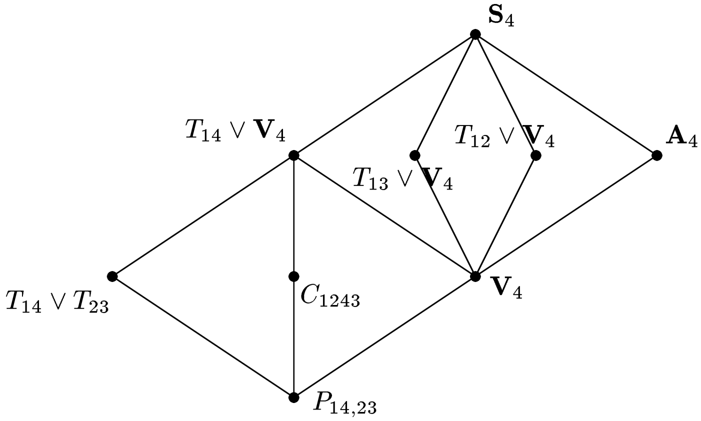

Рис. 5

Пусть теперь $n > m$. Как отмечалось выше, любое нелинейное слово длины ≥ 5 равно 0 в $\mathcal{N}$. Следовательно, если $n \ge 5$ (в частности, если $m \ge 4$), то $W^0_{n,m}(\mathcal{N}) = \{0\}$ и решетка $\mathrm{Con}(W^0_{n,m}(\mathcal{N}))$ одноэлементна. Остается рассмотреть случай, когда $n = 4$, а $m = 3$. Из вида множества W вытекает, что если $u \in W_{4,3}(\mathcal{N})$, то u подобно в $\mathcal{N}$ одному из слов $xyxz$ и $xyzx$. Используя тождества $xyzt = tzyx$ и $xyzx = yxzy$, легко понять, что если u подобно в $\mathcal{N}$ слову $xyzx$, то $u = xyzx$ в $\mathcal{N}$. Следовательно,

$$W^0_{4,3}(\mathcal{N}) = \{xyxz, xzxy, yxyz, yzyx, zxzy, zyzx, xyzx, 0\}.$$

Ясно, что $W^0_{4,3}(\mathcal{N})$ содержит три орбиты:

$$U_0 = \{0\},\ U_1 = \{xyxz, xzxy, yxyz, yzyx, zxzy, zyzx\} \text{ и } U_2 = \{xyzx\}.$$

В силу леммы 8, $\mathbf{S}_3$-множество $W^0_{4,3}(\mathcal{N})$ сегрегировано, а из следствия 2 вытекает, что решетки конгруэнций всех его орбит лежат в $\mathbf{M}_{3,4}$. Учитывая лемму 7, получаем, что и $\mathrm{Con}(W^0_{4,3}(\mathcal{N})) \in \mathbf{M}_{3,4}$.

Предложение 2 доказано.

Литература

1. Верников Б. М., Волков М. В. Решетки нильпотентных многообразий полугрупп // Алгебраические системы и их многообразия. Свердловск: УрГУ, 1988. С.53–65.
2. Верников Б. М., Волков М. В. Решетки нильпотентных многообразий полугрупп. II // Изв. Урал. гос. ун-та. 1998. № 10. (Математика и механика. Вып.1.) С. 13–33.
3. Vernikov B. M., Volkov M. V. Structure of lattices of nilpotent semigroup varieties // Semigroups. Algebraic Theory and Applications to Formal Languages and Codes. Singapore: World Scientific, 1993. P. 297–299.
4. Волков М. В. Структуры многообразий нильпотентных колец // Исследования по современной алгебре. Свердловск: УрГУ, 1981. С.19–34.
5. Vernikov B. M., Volkov M. V. Commutative semigroup varieties with modular subvariety lattices // Monoids and Semigroups with Applications. Singapore: World Scientific, 1991. P.233–253.
6. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий // Докл. РАН. 1992. Т.326, №3. С.409–413.
7. Vernikov B. M., Volkov M. V. Semimodular semigroup varieties revisited // Int. Conf. «Semigroups and their Applications, including Semigroup Rings»: Abstracts. St Petersburg, 1995. P.78–79.
8. Волков М. В. Тождества в решетках многообразий полугрупп: Дисс. ... д-ра физ.-мат. наук. СПб., 1994.
9. Volkov M. V. Commutative semigroup varieties with distributive subvariety lattices // Contrib. General Algebra. 1991. Vol.7. P.351–359.
10. Волков М. В. Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий. II // Изв. вузов. Математика. 1992. №7. С. 3–8.
11. Vernikov B. M., Volkov M. V. Commuting fully invariant congruences on free semigroups // Contrib. General Algebra. 2000. Vol.12. P.391–417.
12. Vernikov B. M. A classification of lattice quasiidentities implying the modular law in lattices of nilsemigroup varieties // II Международ. конф. «Полугруппы: теория и приложения»: Тез. докл. СПб., 1999. С.58–59.
13. Nelson E. The lattice of equational classes of semigroups with zero // Canad. Math. Bull. 1971. Vol.14, №4. P.531–534.
14. Evans T. The lattice of semigroup varieties // Semigroup Forum. 1971. Vol.2, №1. P.1–43.
15. Vernikov B. M. On congruences of G-sets // Comment. Math. Univ. Carol. 1997. Vol.38, №3. P.603–613.
16. Гретцер Г. Общая теория решеток. М.: Мир, 1982.
17. McKenzie R. N., McNulty G. F., Taylor W. F. Algebras. Lattices. Varieties. Vol. I. Monterey: Wadsworth&Brooks/Cole, 1987.
18. Pollák Gy. On the consequences of permutation identities // Acta Sci. Math. (Szeged). 1973. Vol.34. P.323–333.

Статья поступила 29.08.2000 г.