А.Г.Гейн

Практические занятия по алгебре

1 курс

2 семестр

Приведены планы занятий в классе и домашние задания по курсу «Линейная алгебра и геометрия». Номера задач приведены по «Сборнику задач по алгебре и геометрии для студентов первого курса»

Занятие 1. Линейное пространство

1. Является ли линейным пространством следующее множество векторов над полем действительных чисел

а) все векторы n-мерного арифметического пространства, компоненты которых целые числа;

б) все векторы n-мерного арифметического пространства, компоненты которых неотрицательные числа;

в) все векторы плоскости, концы которых лежат на данной прямой (начало любого вектора совпадает с началом координат);

г) все векторы пространства, концы которых не лежат на данной прямой (начало любого вектора совпадает с началом координат);

д) все векторы n-мерного арифметического пространства, сумма компонентов которых равна фиксированному числу a?

2. Доказать, что для выполнения равенства $\alpha \boldsymbol{x} + \beta \boldsymbol{y} = \beta \boldsymbol{x} + \alpha \boldsymbol{y}$, где $\boldsymbol{x}$ и $\boldsymbol{y}$ – векторы линейного пространства, α и β – элементы поля, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$ или $\alpha = \beta$.

3. Доказать, что следующее множество векторов образуют линейное пространство над полем действительных чисел. Найти его базис и размерность.

а) Все векторы n-мерного арифметического пространства, сумма компонентов которых равна 0.

б) Все многочлены от одной переменной с действительными коэффициентами степени не выше n.

в) Все однородные многочлены степени n от k переменных вместе с нулевым многочленом.

4. 8.2.8 а), в).

Домашнее задание

1. Является ли линейным пространством следующее множество векторов над полем действительных чисел

а) все векторы n-мерного арифметического пространства, все компоненты которых одного знака;

б) все многочлены от одной переменной с действительными коэффициентами степени n вместе с нулевым многочленом.

в) все векторы плоскости, концы которых лежат в первой четверти (начало любого вектора совпадает с началом координат)?

2. Доказать, что следующее множество векторов образуют линейное пространство над полем действительных чисел. Найти его базис и размерность.

а) Все векторы n-мерного арифметического пространства, у которых первая и последняя компоненты равны.

б) Все векторы n-мерного арифметического пространства, у которых компоненты с четными номерами равны 0.

в) Все векторы n-мерного арифметического пространства, у которых компоненты с нечетными номерами равны между собой.

г) Все многочлены от одной переменной с действительными коэффициентами степени не выше n, у которых имеется фиксированный корень c.

3. 8.2.8. б), д), е).

Занятие 2. Линейные подпространства

1. 8.4.3.

2. Пусть L_1 и L_2 – подпространства пространства L

а) Укажите необходимое и достаточное условие на подпространства L_1 и L_2, чтобы их объединение было бы подпространством.

б) Докажите, что сумма подпространства L_1 и L_2 является наименьшим подпространством, содержащим каждое из подпространств L_1 и L_2.

3. 8.4.8 б)

4. 8.4.18.

5. 8.4.17.

Домашнее задание

1. 8.4.4

2. 8.4.6

3. Пусть в предыдущем задании $\alpha = 0$ и $\vec{b} = \vec{0}$. При каких значениях $\vec{a}$ получающиеся подпространства образуют прямую сумму?

4. 8.4.8 в), г).

5. Выполните задание 8.4.17, если в качестве исходного пространства взято пространство не всех функций, определенных на отрезке [a, b], а пространство всех непрерывных функций, определенных на этом же отрезке.

Занятие 3. Линейные операторы (Самостоятельная работа)

1. Дать определение линейного оператора.

2. Что такое матрица линейного оператора?

3. Для каждого из указанных ниже отображений трехмерного векторного пространства в себя установить, является ли оно линейным преобразованием. Если “Да”, то найти матрицу в стандартном базисе $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

а) $A(x) = a$, где a — фиксированный вектор.

б) $A(x) = x + a$, где a — фиксированный вектор.

в) $A(x) = \alpha x$, где α — фиксированное число.

г) $A(x) = (a, x)\, b$, где a и b — фиксированные векторы, а (a, x) — скалярное произведение.

д) $A(x) = (x, a)\, x$, где a — фиксированный вектор, (a, x) — скалярное произведение.

е) $A(x) = [a, x]$, где a — фиксированный вектор, $[a, x]$ — векторное произведение.

4. Для каждого из указанных ниже отображений пространства многочленов степени не выше n в себя установить, является ли оно линейным преобразованием. Если “Да”, то найти матрицу в стандартном базисе $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

а) $A\,(f(x)) = f(x + 2)$.

б) $A\,(f(x)) = f'(x)$.

в) $A\,(f(x)) = f(x^2)$.

г) $A\,(f(x)) = \int\limits_0^x f(x)dx$.

5. 9.1.8 а), в).

Домашнее задание

1. 9.1.8 б), г).

2. 9.1.9.

Занятие 4. Действия над матрицами

1. 3.2.1 б).
2. 3.2.2.
3. 3.2.4 д), б).
4. 3.2.5 е), з).
5. 3.2.6 а).
6. 3.2.9 а).
7. Пусть A – квадратная матрица порядка n с элементами из поля P. Через $C(A)$ обозначим множество всех матриц, перестановочных с матрицей A. Доказать, что

   а) $C(A)$ – линейное пространство над полем P.

   б) $C(A)$ – кольцо относительно операций сложения и умножения матриц.
8. 3.2.11 а).
9. 3.2.8 б).

Домашнее задание

1. 3.2.1 в).
2. 3.2.4 а), з).
3. 3.2.5 д), ж).
4. 3.2.6 д).
5. 3.2.7.
6. 3.2.9 д).
7. 3.11 в).
8. Какой (в зависимости от n) может быть максимальная размерность пространства $C(A)$, о котором говорится в задании 7 классной работы? Какой может быть минимальная размерность этого пространства?
9. 3.2.8 а).

Занятие 5. Перестановки и подстановки. Определители

1. 4.1.1 (а, в, д).

2. Известно, что число инверсий в перестановке a_1, a_2, ... , a_n равно k. Сколько инверсий в перестановке a_n, a_{n-1}, ... , a_1?

2. На лекции доказано, что от любой n-элементной перестановки к любой другой перестановке тех же элементов можно перейти не более чем за $n! - 1$ транспозиций. Можно ли улучшить эту оценку?

3. 4.1.9.

4. Определить четность подстановки $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 1 & 5 \\ 4 & 1 & 5 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

5. 4.2.1 (б, в).

6. 4.2.2 (б, г).

7. 4.2.3 (а).

8. 4.2.6 (а, б).

9. а) Какое наибольшее значение может иметь определитель матрицы третьего порядка, элементами которой являются только 1 и –1?

б) Какое наибольшее значение может иметь определитель матрицы третьего порядка, элементами которой являются только 0 и 1?

10. 4.2.10 (а, в, е).

Домашнее задание

1. 4.1.1 (б, г, е).

2. 4.1.5; 4.1.6.

2. 4.4.9 (б, в, г. д).

3. 4.2.1 (а, г).

4. 4.2.2 (а, в. д).

5. 4.2.3 (б).

6. Выполните задание 9 из классной работы для матриц четвертого порядка.

7. 4.2.10 (б, г, д).

Занятие 12. Действия над линейными операторами

1. Пусть P – произвольное поле, L – пространство всех многочленов над P. Отображения A и B из L в L определены следующим образом:

$$A(f(x)) = f'(x) \text{ и } B(f(x)) = x\,f(x).$$

а) Проверить, что оба отображения являются линейными преобразованиями пространства L.

б) Найти $AB - BA$, $AB^2 - B^2A$ и $A^2B - BA^2$.

2. Отображение трехмерного векторного пространства в себя задано формулой:

$$A(x) = (a, x)\,b + (x, b)\,a - (a, b)\,x,$$

где a и b — фиксированные векторы, а через (a, x) обозначено скалярное произведение.

а) Проверить, что это отображение является линейным преобразованием.

б) При каком условии на векторы a и b это преобразование является обратимым?

3. Матрица некоторого линейного преобразования записывается в некотором базисе как матрица из задания 4.5.1 (д).

а) Проверить, что это преобразование является обратимым.

б) Найти матрицу обратного преобразования в том же базисе.

4. Матрица некоторого линейного преобразования записывается в некотором базисе как матрица из задания 4.5.1 (з).

а) Проверить, что это преобразование является обратимым.

б) Найти матрицу обратного преобразования в том же базисе.

Домашнее задание

1. а) Для линейных преобразований, описанных в задании 1 из классной работы проверить равенство $A^2B^2 - B^2A^2 = 2(AB + BA)$.

б) Выполнив пункт б) задания 1 из классной работы, вы установили, что линейные преобразования A и B удовлетворяют равенству $AB - BA = E$. Можно ли на каком-либо конечномерном пространстве так определить линейные преобразования A и B, чтобы они тоже удовлетворяли этому равенству?

2. Выполнить задание 2 для отображения, заданного формулой

$$A(x) = (a, x)\,b - (x, b)\,a + (a, b)\,x.$$

3. Матрица некоторого линейного преобразования записывается в некотором базисе как матрица из задания 4.5.1 (е).

а) Проверить, что это преобразование является обратимым.

б) Найти матрицу обратного преобразования в том же базисе.

4. Матрица некоторого линейного преобразования записывается в некотором базисе как матрица из задания 4.5.1 (ж).

а) Проверить, что это преобразование является обратимым.

б) Найти матрицу обратного преобразования в том же базисе.

Занятие 27. Пространство со скалярным произведением

1. Пусть L — пространство многочленов степени не выше 2 над $\boldsymbol{C}$.

а) Для любых двух многочленов f и g определим

$$(f, g) = f(-1)\overline{g(-1)} + 2f(0)\overline{g(0)} + f(1)\overline{g(1)}.$$

Докажите, что указанная функция является скалярным произведением.

б) Найдите скалярное произведение многочленов $x^2 + ix - 1$ и $x^2 - ix + 1$.

в) Постройте ортонормированный базис пространства L.

2. 11.1.9 (а).

3. Пусть L – конечномерное линейное пространство со скалярным произведением, U и V – его подпространства. Докажите равенства:

а) $(U^{\perp})^{\perp} = U$; б) $(U + V)^{\perp} = U^{\perp} \cap V^{\perp}$; в) $(U \cap V)^{\perp} = U^{\perp} + V^{\perp}$; г) $L^{\perp} = 0$.

4. Пусть $L = R[x]$.

а) Для любых двух многочленов f и g определим $(f, g) = \int\limits_0^1 f(x)g(x)\,dx$. Докажите, что указанная функция является скалярным произведением.

б) Найдите такое подпространство $U \neq L$, для которого $U^{\perp} = 0$.

в) Какие из равенств задания 3 а) – г) справедливы для $R[x]$ с указанным скалярным произведением?

Пусть L – конечномерное линейное пространство со скалярным произведением, U – его подпространство. Как известно, $L = U \oplus U^{\perp}$. Тем самым, для любого $x \in L$ существуют единственные y и z такие, что $x = y + z$ и $y \in U$, $z \in U^{\perp}$. Вектор y называется **ортогональной проекцией** вектора x на U, а вектор z называется **ортогональной составляющей** вектора x.

5. 11.1.13 (а).

Домашнее задание

1. 11.1.9 (б).

2. Для пространства из задания 1 классной работы рассмотрим подпространство многочленов, для которых число является корнем.

а) Найти ортогональное дополнение к этому подпространству.

б) Найти ортогональную проекцию многочлена $x^2 + 2ix - 1$ на это подпространство и ортогональную составляющую.

3. 11.1.13 (б)

Занятие 30. Самосопряженные и кососимметрические преобразования

1. Пусть f – функция, всюду определенная на пространстве L со скалярным произведением и отображающая L в себя. Известно, что равенство $(f(x), y) = (x, f(y))$ выполняется при любых x и y из пространства L. Доказать, что f – линейное преобразование пространства L.

2. 11.4.3 а), б).

3. 11.4.9.

4. 11.4.12

5. Выяснить геометрический смысл кососимметрического преобразования евклидова пространства в случае а) прямой; б) плоскости; трехмерного пространства.

6. Доказать, что каждое линейное преобразование f линейного пространства L со скалярным произведением, однозначно представимо в виде $f_1 + f_2$, где f_1 самосопряженное преобразование, а f_2 – кососимметрическое.

Домашнее задание

1. 11.4.3 в), г).

2. Формула, приведенная в задании 11.4.9 б), показывает, что существует всюду определенная функция, отображающая множество самосопряженных преобразований унитарного пространства в множество унитарных преобразований. Является ли эта функция сюръективной? Является ли она инъективной?

3. Доказать, что линейное преобразование является кососимметрическим тогда и только тогда, когда оно нормально и все корни его характеристического многочлена – чисто мнимые числа.

4. 11.4.14.

5. Доказать, что в условиях задания 6 из классной работы преобразование нормально тогда и только тогда, когда f_1 и f_2 перестановочны.