А.Г.Гейн

Практические занятия по алгебре

1 курс

1 семестр

Приведены планы занятий в классе и домашние задания по курсу «Алгебра». Номера задач приведены по «Сборнику задач по алгебре и геометрии для студентов первого курса»

Занятие 1. Множества

1. (Устно) 1.3.1 (а, в, г, д, е, з)
2. 1.3.2 (б, в, д)
3. 1.3.3 (а, б, е)

а) $A \in B$, $B \in C$ и $A \in C$; б) $A \in B$ и $A \subseteq B$; в) $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ и $A \not\subset C$?

4. Существует ли такое трехэлементное множество, каждый элемент которого является подмножеством этого множества?

5. Пусть A — множество всех прямоугольных треугольников, B — множество всех равнобедренных треугольников, универсальное множество — множество всех треугольников на заданной плоскости. Используя операции пересечения, объединения и дополнения, можно составить различные выражения, в которых A и B встречаются по одному разу.

а) Выпишите все неравные между собой такие выражения.

б) Для каждого из полученных выражений укажите свойство, определяющее множество составляющих его треугольников.

6. 1.3.7 (а, в)
7. 1.3.10 (б, е)
8. 1.3.8 (а, б, д, е).

Домашнее задание

1. Найти множество $B(A)$ всех подмножеств множества A.

а) $A = \{\{1; 2\}; \{3\}\}$; б) $A = \{\varnothing\}$; в) $A = \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$.

2. Существуют ли множества A, B и C со свойствами

а) $A \subseteq B$, $B \in C$ и $A \in C$; в) $A \in B$, $B \in C$ и $A \notin C$;

б) $A \subseteq B$, $B \in C$ и $A \subseteq C$; г) $A \in B$, $B \subseteq C$ и $A \notin C$?

3. 1.3.13.
4. 1.3.12.
5. Доказать, что

а) если $A \subseteq B$, то для любого C справедливо $A \cap C \subseteq B \cap C$;

б) если $A \cap B \subseteq \overline{C}$ и $A \cup C \subseteq B$, то $A \cap C = \varnothing$.

6. Доказать, что если $A \subseteq B$, то для любого C справедливо $A \times C \subseteq B \times C$. Верно ли обратное утверждение?

7. Доказать, что $\overline{(A \times B)} \cap (A \times C) = A \times (\overline{B} \cap C)$.

8. 1.3.10 (л)
9. 1.3.11 (а, д)
10. Исследовать уравнение относительно неизвестного X:

а) $A \cup X = A$; б) $A \cup X = B$; в) $A \times X = A \times B$; г) $(A \times X) \cap (X \times A) = B \times B$.

11. Исследовать систему уравнений относительно неизвестного X:

а) $\begin{cases} A \cap X = A \\ A \cup X = A \end{cases}$; б) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = B \end{cases}$; в) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = \overline{B} \end{cases}$.

Занятие 2. Бинарные отношения на множестве

1. Пусть $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$. Исследовать отношение ρ на M, если

а) $x \rho y \Leftrightarrow x / y$ — целое число;

б) $x \rho y \Leftrightarrow (x - y) / 3$ — целое число;

в) $x \rho y \Leftrightarrow x + y = 8$;

г) $x \rho y \Leftrightarrow x + y \in M$;

д) $x \rho y \Leftrightarrow |x - y| < 3$;

е) $x \rho y \Leftrightarrow (x - y) / 3 \in M \cup \{0\}$.

Изобразить каждое из этих отношений соответствующим множеством точек на координатной плоскости.

2. Из свойств рефлексивность, симметричность и транзитивность, а также их отрицаний можно составить 8 комбинаций (объясните, почему именно столько). Ниже приведены 3 из них.

а) Рефлексивность, симметричность, нетранзитивность.

б) Нерефлексивность, симметричность, транзитивность.

в) Нерефлексивность, несимметричность, транзитивность.

Приведите примеры отношений, обладающих каждым из указанных наборов свойств.

3. 1.4.3

4. Указать, какие из отношений в задании 1 являются отношением эквивалентности, а какие отношением порядка. Для каждого отношения эквивалентности построить разбиение множества M, а для каждого отношения порядка — диаграмму множества M.

5. = 1.4.5 (а)

6. = 1.4.6 (а)

Домашнее задание

1. Выполнить задание, аналогичное заданию 1 классной работы, для множества $M = \{-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3, 4\}$.

2. Для каждого из оставшихся 5 комбинаций свойств, о которых говорится в задании 2 классной работы, приведите соответствующие примеры отношений.

3. 1.4.12

4. Указать, какие из отношений в домашнем задании 1 являются отношением эквивалентности, а какие отношением порядка. Для каждого отношения эквивалентности построить разбиение множества M, а для каждого отношения порядка — диаграмму множества M.

5. 1.4.5 (б)

6. 1.4.13.

Занятие 3. Операции на множестве

1. 1.6.3 (б, в).

2. Пусть $M = \{a, b, c\}$. Будет ли M полугруппой, если операция на M задается следующей таблицей Кэли:

а)

	a	b	c
a	a	a	a
b	a	a	a
c	a	a	a

б)

	a	b	c
a	c	c	c
b	a	a	a
c	b	b	b

3. (Устно) Будут ли указанные ниже множества группой относительно обычного сложения чисел:

а) множество действительных чисел;
б) множество рациональных чисел;
в) множество четных целых чисел;
г) множество нечетных целых чисел;
д) множество неотрицательных рациональных чисел;
е) множество иррациональных чисел;
ж) множество натуральных чисел;
з) множество простых чисел?

4. 1.6.2 (б).

5. 1.6.6 (а, б, е)

6. Пусть $M = \{x \mid x$ —действительное число и $0 \le x < 1\}$. Исследовать свойства указанных операций на множестве M.

а) $a * b = ab$; б) $a * b = \min(a, b)$; в) $a * b = (a + b)/2$;

г) $a * b = \{a + b\}$, где через $\{x\}$ обозначена дробная часть числа x.

7. 1.6.8.

8. 1.6.15 (а, в, д, з).

Домашнее задание

1. 1.6.3 (а).
2. 1.6.1 (б).
3. 1.6.11.
4. 1.6.2 (а, в).
5. Исследовать свойства указанных операций на множестве целых чисел:

а) $a * b = a - b$; б) $a * b = \text{НОК}(|a|, |b|)$; в) $a * b = ab(a + b)/2$.

6. 1.6.7 (а, в, д, г)
7. 1.6.15 (б, г, е,ж)

а) множество рациональных чисел;
б) множество натуральных чисел;
в) множество чисел вида $a + b\sqrt{5}$, где a, b — любые целые числа;
г) множество целых чисел, кратных шести.

Занятие 4. Комплексные числа

1. 2.1.3(а), 2.1.1
2. Вычислить i^n.
3. 2.1.4(а), 2.1.6(в), 2.1.8(в)
4. 2.3.1.
5. 2.2.1(г, д, м), 2.3.6(а), 2.2.2(а), 2.2.3(а), 2.2.6
6. Точка z против часовой стрелки обходит единичную окружность с центром в начале координат. Описать траекторию движения точки w, если
   а) $w = 2z^2$; б) $w = \dfrac{1}{2z}$; в) $w = z + \bar{z}$.
7. 2.3.14 (а, б)

Домашнее задание

1. 2.1.3(а), 2.1.2
2. 2.1.6(а, г), 2.1.8(з)
3. 2.2.1(е, ж), 2.3.6(б, в, г), 2.3.11, 2.2.3(г), 2.2.5(а, г)
4. 2.3.13 (г, д)
5. 2.3.14 (в – з)

Занятие 5. Комплексные числа

1. 2.5.1 (а), 2.5.5 (а)
2. Решить уравнение: а) $z^5 = \bar{z}$; б) $z^3 + |z| = 0$.
3. Решить уравнение: а) $z^3 = i$; б) $z^3 = 2 - 2i$; в) $z^6 = \dfrac{1-i}{\sqrt{3}+i}$.
4. 2.4.4 (а, б, в)
5. Найти сумму всех корней n-й степени из 1.
6. 2.4.9 (б), 2.4.7

Домашнее задание

1. 2.5.1 (б), 2.5.5 (б)
2. Решить уравнение: а) $z^5 + \bar{z}^2 = 0$; б) $z^5 + \bar{z}\,|z|^4 = 0$.
3. Решить уравнение: а) $z^4 = -4i$; б) $z^6 = -27$; в) $z^8 = \dfrac{1-i}{1+i\sqrt{3}}$.
4. 2.4.4 (г, д)
5. 2.4.6, 2.4.9 (в)

Занятие 6. Комплексные числа

1. Доказать, что произведение корня из 1 степени a на корень из 1 степени b есть корень из 1 степени ab.

Как звучит аналогичное утверждение для первообразных корней? Верно ли оно?

Сформулировать достаточное условие на числа a и b, чтобы произведение первообразного корня из 1 степени a на первообразный корень из 1 степени b было первообразным корнем из 1 степени ab. Доказать его.

Будет ли найденное условие существенным?

Будет ли оно необходимым?

Можно ли указать необходимое и достаточное условие на числа a и b, чтобы произведение первообразного корня из 1 степени a на первообразный корень из 1 степени b было первообразным корнем из 1 степени ab?

4. Пусть $\varphi(n)$ – количество первообразных корней степени n из 1; $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ – разложение числа n на различные простые множители $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Цель: найти формулу для $\varphi(n)$ через $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Получите требуемую формулу, выполнив последовательно следующие задания:

а) Чему равно $\varphi(n)$, если $n = 2; 3; 5; \ldots; p$, где p – простое число?

б) Чему равно $\varphi(n)$, если $n = 4; 8; 9; 81; \ldots; p^\alpha$, где p – простое число?

в) Пусть $n = ab$, где a и b – взаимно простые числа. Как связано значение $\varphi(n)$ со значениями $\varphi(a)$ и $\varphi(b)$?

г) Получите формулу для $\varphi(n)$ через $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Домашнее задание

1. Пусть $\mu(n)$ – сумма первообразных корней степени n из 1; $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ – разложение числа n на различные простые множители $p_1, p_2, \ldots, p_k$. Цель: найти формулу для $\mu(n)$ через $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

Получите требуемую формулу, выполнив последовательно следующие задания:

а) Чему равно $\mu(n)$, если $n = 2; 3; 5; \ldots; p$, где p – простое число?

б) Чему равно $\mu(n)$, если $n = 4; 8; 9; 81; \ldots; p^\alpha$, где p – простое число, а $\alpha > 1$?

в) Пусть $n = ab$, где a и b – взаимно простые числа. Как связано значение $\mu(n)$ со значениями $\mu(a)$ и $\mu(b)$?

г) Получите формулу для $\mu(n)$ через $p_1, p_2, \ldots, p_k$.

2. Через G_k обозначим группу корней из 1 степени k и положим $G = \cup\, G_k$. Докажите, что:

а) G является группой относительно операции умножения.

б) любое подмножество множества G, само являющееся группой по умножению, совпадает с одним из G_k.

Занятие 7. Евклидовы кольца. Делимость многочленов

1. 2.6.1 (а, б, в):
2. 2.6.2 (е, ж, з, и, к, л)
3. 2.6.5
4. 5.1.1 (б), 5.1.2 (а)
5. 5.1.3 (б)

Домашнее задание

1. 2.6.1 (г, д, е)
2. 2.6.2 (а, б, в, г, д)
3. 2.6.3
4. 2.6.4
5. 5.1.1 (а), 5.1.2 (б)
6. 5.1.3 (а, в, г)

Занятие 8. НОД элементов евклидова кольца

1. 2.6.6 (а, б)
2. 5.1.6 (е)

Домашнее задание

1. 2.6.6 (а, б)
2. 5.1.6 (в, г, д).

Занятие 11. Многочлены над $\boldsymbol{Q}$

1. 5.4.1, 5.4.2 (а)
2. 5.4.5 (б)
3. а) Заполните клетки таблицы, записав в каждой из них либо разложение указанного многочлена на неприводимые множители над данным полем, либо слово “неприводим”.

Многочлен	над $\boldsymbol{C}$	над $\boldsymbol{R}$	над $\boldsymbol{Q}$
$x+1$			
$x^2 + x + 1$			
$x^3 + x^2 + x + 1$			
$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$			

б) Указать все n, при которых многочлен $x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1$ неприводим над $\boldsymbol{Q}$.

Домашнее задание

1. Найти рациональные корни многочлена $4x^4 - 7x^2 - 5x - 1$.
2. 5.4.4
3. 5.4.11