Занятие 1. Множества

1. Существуют ли множества A, B и C со свойствами

а) $A \subseteq B$, $B \in C$ и $A \in C$; б) $A \in B$, $B \in C$ и $A \notin C$.

2. Докажите, что для любых множеств A и B

а) $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $\overline{B} \subseteq \overline{A}$;

б) $A \subseteq B$ тогда и только тогда, когда $A \cap B = A$.

3. Через A, B и C обозначены произвольные множества. Среди ниже приведённых равенств укажите верные и докажите их. Для неверных равенств обоснуйте свою точку зрения, приводя подходящие примеры множеств.

а) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$; в) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;

б) $C \setminus (A \cup B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)$; г) $C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cap (C \setminus B)$.

4. Пользуясь свойствами операций, докажите, что

а) $\overline{\overline{A} \cup B} \cup B = A \cup B$; б) $\overline{\overline{A} \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup (A \cap B)$.

5. Пусть $A = [-1, 4) \times [0, 2)$, $B = (-1, 1) \times \boldsymbol{R}$, $C = \boldsymbol{R} \times [-1, 1]$. Изобразите на координатной плоскости множества $A \cup (B \cap \overline{C})$ и $(A \setminus B) \cap C$.

6. Докажите, что если $A \subseteq B$, то для любого C справедливо $A \times C \subseteq B \times C$. Верно ли обратное утверждение?

7. Исследуйте уравнение:

а) $A \cap X = A$; б) $A \cap X = B$; в) $A \times X = X \times A$; г) $A \times X = X \times B$;

д) $A \times X = A \times B$; е) $(A \times X) \cap (X \times A) = B \times B$.

Домашнее задание

1. Найти множество $B(A)$ всех подмножеств множества A.

а) $A = \{\{1; 2\}; \{3\}\}$; б) $A = \{\varnothing; \{\varnothing\}\}$.

2. Существуют ли множества A, B и C со свойствами

а) $A \subseteq B$, $B \in C$ и $A \subseteq C$; б) $A \in B$, $B \subseteq C$ и $A \notin C$?

3. Доказать, что

а) если $A \subseteq B$, то для любого C справедливо $A \cap C \subseteq B \cap C$;

б) если $A \cap B \subseteq \overline{C}$ и $A \cup C \subseteq B$, то $A \cap C = \varnothing$.

4. Пусть $A \neq \varnothing$. Доказать, что если $A \times B = A \times C$, то $B = C$.

5. Исследуйте уравнение:

а) $A \cup X = A$; б) $A \cup X = B$; в) $A \times X = A \times B$; г) $(A \times X) \cap (X \times A) = B \times B$.

6. Исследуйте систему уравнений относительно неизвестного X:

а) $\begin{cases} A \cap X = A \\ A \cup X = A \end{cases}$; б) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = B \end{cases}$; в) $\begin{cases} A \cap X = B \\ A \cup X = \overline{B} \end{cases}$.

7. Найдите $\left(\bigcap_{n>2}\left(-\frac{1}{n}; 1+\frac{1}{n}\right)\right) \setminus \left(\bigcup_{n>2}\left[\frac{1}{n}; 1-\frac{1}{n}\right]\right)$. Ответ запишите в виде интервала или полуинтервала, или, если множество оказалось конечным, перечислением его элементов.