ГОСУДАРСТВЕННЫЙ КОМИТЕТ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ПО ВЫСШЕМУ ОБРАЗОВАНИЮ

УРАЛЬСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
им. А.М. ГОРЬКОГО

Ю.М.Важенин, В.Ю.Попов

МНОЖЕСТВА, ЛОГИКА, АЛГОРИТМЫ В ЗАДАЧАХ

Учебное пособие

Екатеринбург
1997

510.51+412.1 В129

Печатается по постановлению
редакционно-издательского совета
Уральского государственного
университета им. А.М.Горького

Важенин Ю.М., Попов В.Ю. Множества, логика, алгоритмы в задачах: Учеб. пособие.
Екатеринбург: УрГУ, 1997. с.

Научный редактор

Предисловие

ОГЛАВЛЕНИЕ

ЧАСТЬ 1. Теория множеств

1. Понятие множества

N1. Верно ли, что:
1. $1 \in \{1\}; \{1\} \in 1$?
2. $\{1\} \subseteq \{\{1\}, 1\}; \{1\} \notin \{\{1\}, 1\}$?
3. $\{1, 2, 3\} = \{2, 1, 3\}; \{1, 2, 3\} \neq \{2, 1, 2, 3\}$?
4. $\{1\} \in \{1, 2\}; \{1\} \not\subseteq \{1, 2\}$?

N2. Справедливы ли утверждения:
1. $\{1, 2, 3\} = \{1, 3\}$;
2. $\{1, 2\} = \{2, 1\}$;
3. $\{1, 1\} = \{1\}$;
4. $\{1, 2, \{3\}\} = \{1, 2, 3\}$;
5. $\{1\} \in \{1, 2, 3\}$;
6. $1 \in \{1, 2, 3\}$;
7. $\{1, 2\} \in \{1, 2, 3\}$;
8. $\{1, 2\} \subseteq \{1, 2, 3\}$?

N3. Доказать, что $\{\{1\}, \{1, 2\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} \Leftrightarrow a = 1 \wedge b = 2$.

N4. Доказать, что $\{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{a\}, \{a, b\}\} = \{\{c\}, \{c, d\}\} \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$ для любых a, b, c, d.

N5. Доказать, что если $A_1 \subseteq A_2, A_2 \subseteq A_3$ и $A_3 \subseteq A_1$, то
$A_1 = A_2 = A_3$.

N6. Существуют ли множества A, B и C со свойствами:
1. $A \in B, B \in C$ и $A \in C$;
2. $A \subseteq B$ и $A \in B$;
3. $A \subseteq B$, $B \in C$ и $A \in C$;
4. $A \subseteq B$, $B \in C$ и $A \subseteq C$;
5. $A \in B$, $B \in C$ и $A \notin C$;
6. $A \subseteq B$, $B \subseteq C$ и $A \not\subseteq C$;
7. $A \in B$, $B \subseteq C$ и $A \notin C$?

N7. Верно ли, что для любых A, B, C:

1. $A \in B \wedge B \in C \Rightarrow A \in C$;
2. $A \in B \wedge B \subseteq C \Rightarrow A \in C$;
3. $A \neq B \wedge B \neq C \Rightarrow A \neq C$?

N8. Приведите пример множеств A, B, C, таких, чтобы выполнялись условия:

1. $A \in B, B \notin C, A \subseteq C$;
2. $A \in B, A \notin C, C \subseteq B$;
3. $B \in C, A \notin C, A \subseteq B$.

N9. Существует ли такое множество A, что $\forall xy(x \in y \wedge y \in A \Rightarrow x \in A)$?

N10. Верно ли, что для любых множеств $A_1, A_2, ..., A_n$

$$A_1 \subseteq A_2 \subseteq ... \subseteq A_n \subseteq A_1 \Rightarrow A_1 = A_2 = ... = A_n?$$

N11. Существует ли такое семейство множеств $A_n, n \in \mathbb{N}$, что $|A_n| = n$ и $x \in A_n \wedge\ y \in A_{n+1} \Rightarrow x \in y$?

N12. Каждое из следующих множеств задайте в виде некоторого интервала числовой прямой:

1. $\{x \in \mathbb{R} | \exists y \in \mathbb{R}\ \ x^2 + y^2 = 1\}$;
2. $\{x \in \mathbb{R} | \exists y\ \ x = \frac{y+1}{y^2+1}\}$;
3. $\{a \in \mathbb{R} | \exists x \in \mathbb{R}\ \ 3x^2 + 2ax + a < 0\}$;
4. $\{x \in \mathbb{R} | x > 0 \wedge \forall n \in \mathbb{N}\ \ x < \frac{1}{n}\}$.

N13. Равны ли множества:

1. $\{2, 4, 5\}$ и $\{2, 4, 2, 5\}$;
2. $\{1, 2\}$ и $\{\{1, 2\}\}$;
3. $\{1, 2, 3\}$ и $\{3, 1, 2, 1\}$;
4. $\{1, 2, 3\}$ и $\{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$;
5. $\{\{1, 2\}, 3\}$ и $\{\{1\}, \{2, 3\}\}$?

N14. Вставьте вместо ? между множествами символ $\in$ или $\subseteq$ так, чтобы получилось истинное высказывание:

1. $\{1\}?\{1, \{1, 2\}\}$;
2. $\{1, 2\}?\{1, 2, \{1\}, \{2\}\}$;
3. $\{1, 2\}?\{1, 2, \{1, 2\}\}$;

4. $\emptyset ? \{1, 2, \{1\}, \{\emptyset\}\}$;
5. $\emptyset ? \{\{\emptyset\}\}$;
6. $\emptyset ? \{\emptyset\}$.

2. Операции над множествами

N1. Пусть A - множество всех прямоугольных треугольников на плоскости, B - множество всех равносторонних, универсальное множество - множество любых треугольников на плоскости. Какие треугольники содержатся в множествах: $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $A \cup \overline{B}$?

N2. Пусть A - множество целых чисел, кратных 2, B - множество целых чисел, кратных 3, универсальное множество - множество всех целых чисел. Найти $A \cup B$, $A \cap B$, $\overline{A} \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cup B$, $A \cup \overline{B}$.

N3. Пусть A и B - подмножества множества $\{0, 1, 2, ..., 9\}$, $A = \{1, 2, 3\}, B = \{2, 3, 5, 4\}$. Найдите $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A, \overline{A}, \overline{B}$.

N4. Пусть A и B - подмножества множества $\mathbb{N}$, $A = \{x | x \text{ делится на } 2\}, B = \{x | x \text{ делится на } 3\}$. Найдите $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A, \overline{A}, \overline{B}$.

N5. Пусть U - множество точек плоскости, на которой задана декартова система координат, $A = \{< x, y > | 0 \leq x \leq 1\}$, $B = \{ < x,\ y > | 0 \leq y \leq 1\}$. Найдите множества $A \cup B, A \cap B, A \backslash B, B \backslash A, \overline{A}, \overline{B}$, изобразите их на плоскости.

N6. Верно ли, что для любых множеств A, B, C:

1. $(A \cup B) \cap A = (A \cap B) \cup A = A$?
2. $A \backslash B = A \backslash (A \cap B), A \cup B = A \cup (B \backslash A)$?
3. $A \cap (B \backslash C) = (A \cap B) \backslash (A \cap C)$?
4. $A \backslash (B \backslash C) = (A \backslash B) \backslash (A \backslash C), (A \backslash B) \backslash C = (A \backslash C) \backslash (B \backslash C)$?

N7. Введем операцию *взятия симметрической разности*: $A \dot{-} B \rightleftharpoons (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$. Можно ли операции $\cup, \cap, \backslash$ определить через операции:

1. $\dot{-}, \cap$?

2. $\dot{-}, \cup$?

3. $\dot{-}, \setminus$?

N8. Можно ли $\setminus$ определить через $\cap$ и $\cup$?

N9. Можно ли $\cup$ определить через $\cap$ и $\setminus$?

N10. Можно ли $\cap$ определить через $\cup$ и $\setminus$?

N11. Обозначим через $P(A)$ *множество всех подмножеств множества* A. Найти множество $P(A)$ всех подмножеств множества A.

1. $A = \{1, 2, 3\}$;

2. $A = \{1, 2, \{3\}\}$;

3. $A = \{1, \{2, 3\}\}$;

4. $A = \{\emptyset\}$;

5. $A = \emptyset$;

6. $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

N12. Верно ли, что:

1. $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$?

2. $P(A \cup B) = P(A) \cup P(B)$?

3. Если ответ на вопрос 2 отрицателен, то можно ли, и если можно, то как, выразить $P(A \cup B)$ через $P(A)$ и $P(B)$?

N13. Верно ли, что для любых A, B, C:

1. $A \cap B \subseteq \overline{C} \wedge A \cup C \subseteq B \Rightarrow A \cap C = \emptyset$;

2. $A \subseteq \overline{B \cup C} \wedge B \subseteq \overline{A \cup C} \Rightarrow B = \emptyset$?

N14. Упростить:

1. $(\overline{A} \cup \overline{B}) \cap (\overline{A \cup B})$;

2. $\overline{(A \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$;

3. $((\overline{A} \cup B) \cup (A \cup B)) \cap B$;

4. $((\overline{A} \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)) \cap A$;

5. $\overline{(\overline{A} \cap B) \cap (\overline{A} \cup \overline{B})}$;

6. $\overline{(\overline{A} \cap B) \cap (\overline{B} \cup C)} \cup \overline{C \cap \overline{A})}$;

7. $(\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap C) \cup (B \cap C) \cup (\overline{A} \cup B \cup C)$.

N15. Верно ли, что

1. $A \cup (\overline{A} \cap B) = A \cup B$;
2. $A \cap (\overline{A} \cup B) = A \cap B$;
3. $\overline{\overline{A} \cup B} \cup B = A \cup B$;
4. $\overline{\overline{A} \cup B} \cup \overline{B} \cup A = A \cup \overline{B}$;
5. $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = A$;
6. $(A \cup B) \cap (A \cup \overline{B}) = A$;
7. $(A \cap B) \cup (\overline{A} \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) = \overline{A} \cup B$;
8. $\overline{A \cap \overline{B}} = \overline{A} \cup (A \cap B)$?

N16. Пусть $X \subseteq U, Y \subseteq U$. Выразите множество X через множества Y, U, если известно, что:
1. $Y \backslash X = Y, Y \cup X = U$;
2. $Y \cap X = \emptyset, Y \cup X = U$;
3. $Y \backslash (Y \backslash X) = \emptyset$;
4. $Y \backslash X = \emptyset, Y \cup X = Y$;
5. $Y \backslash (Y \backslash X) = \emptyset, \overline{Y} \cap \overline{X} = \emptyset$.

N17. Пусть A, B, C - такие множества, что $B \subseteq A \subseteq C$. Найдите множество X, удовлетворяющее следующим двум условиям $A \cap X = B, A \cup X = C$.

N18. Пусть A, B, C - такие множества, что $B \subseteq A, A \cap C = \emptyset$. Найдите множество X, удовлетворяющее следующим двум условиям $A \backslash X = B, X \backslash A = C$.

N19. Решить системы уравнений относительно X:
1. $A \cap X = A, A \cup X = A$;
2. $A \cap X = B, A \cup X = B$;
3. $A \cap X = B, A \cup X = C$;
4. $A \backslash X = B, A \cup X = C$ при условии $B \subseteq A \subseteq C$.

N20. Справедливы ли следующие утверждения:
1. $(A \cup B) \cap C = A \cup (B \cap C)$;
2. $(A \backslash B) \cup B = A$;
3. $(A \cup B) \backslash B = A$;
4. $(A \cap B) \backslash A = \emptyset$;
5. $(A \backslash B) \cup C = (A \cup C) \backslash (B \cup C)$;
6. $(A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \subseteq B$;

7. $B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) \Rightarrow A = \emptyset$?

N21. Пусть A и B - подмножества множества U. Докажите, что условие $A \subseteq B$ равносильно каждому из следующих условий:

1. $A \cap B = A$;
2. $A \cup B = B$;
3. $\overline{B} \subseteq \overline{A}$;
4. $\overline{A} \cup B = U$;
5. $A \cap \overline{B} = \emptyset$;
6. $(B \backslash A) \cup A = B$;
7. $\exists X \;\; A \cup X = B$.

N22. Пусть A - множество решений уравнения $f(x) = 0$, B - множество решений уравнения $g(x) = 0$. Выразите через A и B множество решений:

1. уравнений $f(x)g(x) = 0$, $\frac{f(x)}{g(x)} = 0$, $f^2(x) + g^2(x) = 0$;
2. системы уравнений $\begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) = 0; \end{cases}$
3. совокупности уравнений $\left[\begin{array}{l} f(x) = 0, \\ g(x) = 0; \end{array}\right.$

N23. Верно ли, что для произвольных множеств A, B, C:

1. $A \backslash B = A \Leftrightarrow A \cap B = \emptyset$;
2. $(A \cup B) \backslash (A \cap B) = \emptyset \Leftrightarrow A = B$;
3. $(A \cap B) \cup C = A \cap (B \cup C) \Leftrightarrow C \subseteq A$;
4. $A \cup B = \emptyset \Leftrightarrow A = \emptyset \wedge B = \emptyset$;
5. $A \backslash B = A \Leftrightarrow B \backslash A = B$;
6. $A \cup B = A \backslash B \Leftrightarrow B = \emptyset$;
7. $A \cap B = A \backslash B \Leftrightarrow A = \emptyset$;
8. $A \cup B \subseteq C \Leftrightarrow A \subseteq C \wedge B \subseteq C$;
9. $C \subseteq A \cap B \Leftrightarrow C \subseteq A \wedge C \subseteq B$;
10. $A \subseteq B \subseteq C \Leftrightarrow A \cup B = B \cap C$?

N24. Докажите, что для произвольных подмножеств A, B, C универсального множества U:

1. $A \cap B = \emptyset \Leftrightarrow A \subseteq \overline{B} \Leftrightarrow B \subseteq \overline{A}$;
1. $A \cup B = U \Leftrightarrow \overline{A} \subseteq B \Leftrightarrow \overline{B} \subseteq A$.

N25. Перечислите элементы множеств $A \times B, B \times A$:
1. $A = \{1, 2\}, B = \{3, 4, 5\}$;
2. $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3\}$;
3. $A = \{1\}, B = \{1, 2, 3\}$;
4. $A = \emptyset, B = \{1, 2, 3, 4\}$.

3. Бинарные отношения.

N1. Найти всевозможные
1. симметричные отношения на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$.
2. транзитивные отношения на множестве $\{1, 2, 3, 4\}$.

N2. Может ли отношение эквивалентности быть отношением включения?

N3. Какими свойствами обладают отношения "иметь в десятичной записи то же число цифр", "иметь тот же остаток при делении с остатком на 3"на множестве $\mathbb{N}$? Являются ли они отношениями эквивалентности?

N4. Пусть $M \rightleftharpoons \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, N \rightleftharpoons \{-4,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3\}$. Выяснить, будет ли отношение α рефлексивным, будет ли симметричным, будет ли транзитивным, если
1. $\alpha = \{(x, y) \in M^2 | x \leq y\}$;
2. $\alpha = \{(x, y) \in M^2 | \frac{x}{y} \in \mathbb{Z}\}$;
3. $\alpha = \{(x, y) \in M^2 | \frac{x-y}{4} \in \mathbb{Z}\}$;
4. $\alpha = \{(x, y) \in M^2 | xy \geq 0\}$;
5. $\alpha = \{(x, y) \in M^2 | x < 2y\}$;
6. $\alpha = \{(x, y) \in M^2 | x + y = 8\}$;
7. $\alpha = \{(x, y) \in M^2 | x + y \in M\}$;
8. $\alpha = \{(x, y) \in M^2 | xy = y^2\}$;
9. $\alpha = \{(x, y) \in M^2 || x - y| < 3\}$;
10. $\alpha = \{(x, y) \in M^2 || x - y| \geq 2\}$;

11. $\alpha = \{(x, y) \in N^2 | x < y^2\}$;
12. $\alpha = \{(x, y) \in N^2 | \frac{x}{y} \in \mathbb{Z}\}$;
13. $\alpha = \{(x, y) \in N^2 | \frac{x-y}{3} \in \mathbb{Z}\}$;
14. $\alpha = \{(x, y) \in N^2 | xy \geq 0\}$;
15. $\alpha = \{(x, y) \in N^2 | xy \leq 0\}$;
16. $\alpha = \{(x, y) \in N^2 | xy > 0\}$;
17. $\alpha = \{(x, y) \in N^2 | xy = y^2\}$;
18. $\alpha = \{(x, y) \in N^2 || x - y| < 3\}$.

N5. Привести примеры отношений:
1. рефлексивного, симметричного, нетранзитивного;
2. нерефлексивного, симметричного, транзитивного;
3. рефлексивного, несимметричного, транзитивного;
4. рефлексивного, несимметричного, нетранзитивного;
5. нерефлексивного, симметричного, нетранзитивного;
6. нерефлексивного, несимметричного, транзитивного.

N6. Пусть M - множество всех слов русского языка, N - множество всех прямых в пространстве. Выяснить, будет ли отношение α рефлексивным, будет ли симметричным, будет ли транзитивным, если

1. $\alpha = \{(x, y) \in M^2|$ слова x и y не содержат ни одной общей буквы$\}$;

2. $\alpha = \{(x, y) \in M^2|$ слова x и y содержат хотя бы одну общую букву $\}$;

3. $\alpha = \{(x, y) \in M^2|$ всякая буква, входящая в слова x, входит и в слово y $\}$;

4. $\alpha = \{(x, y) \in N^2|$ x параллельна y или x совпадает с y $\}$;

5. $\alpha = \{(x, y) \in N^2|$ x перпендикулярна y $\}$;

6. $\alpha = \{(x, y) \in N^2|$ x пересекается с y $\}$.

N7. Найти $Dom\alpha, Im\alpha, \alpha^{-1}, \alpha\alpha, \alpha\alpha^{-1}, \alpha^{-1}\alpha$:
1. $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2|\ y|x\}$;
2. $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{N}^2|\ y = x^2\}$;
3. $\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2|\ x + y = 0\}$;

4. $\alpha = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 |\ 2x \leq 2y\}$;

5. $\alpha = \{(x,y) \in [0;\pi]^2 |\ y \leq cosx\}$.

N8. Для каких $\alpha \subseteq A^2$ справедливо равенство $\alpha^{-1} = A^2 \backslash \alpha$?

N9. Доказать, что если $\alpha \subseteq A \times B, \beta \subseteq B \times C, \gamma \subseteq C \times D$, то:

1. $(\alpha^{-1})^{-1}$;

2. $(\alpha\beta)^{-1} = \beta^{-1}\alpha^{-1}$;

3. $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

N10. Верно ли, что $\alpha\beta = \beta\alpha$ для любых $\alpha, \beta \subseteq A \times A$?

N11. Верно ли, что:

1. произведение двух симметричных отношений симметрично тогда и только тогда, когда сомножители перестановочны?

2. ни одно из свойств - рефлексивность, транзитивность, симметричность, антисимметричность, линейность - не влечет другое из этих свойств?

3. ни одна пара из трех свойств - симметричность, рефлексивность, транзитивность - не влечет третье?

N12. Пусть A - некоторое множество, $\delta_A \rightleftharpoons \{(a,a) | a \in A\}$ - диагональ на A, $\alpha \subseteq A^2$. Доказать, что следующие высказывания равносильны:

1. α - рефлексивно и $\delta_A \subseteq \alpha$;

2. α - транзитивно и $\alpha\alpha \subseteq \alpha$;

3. α - симметрично и $\alpha^{-1} = \alpha$;

4. α - антисимметрично и $\alpha \cap \alpha^{-1} \subseteq \delta_A$;

5. α - линейно и $\alpha \cup \alpha^{-1} = A^2$.

N13.

1. Когда произведение $\alpha_1\alpha_2$ двух эквивалентностей α_1, α_2 на множестве A будет тоже эквивалентностью?

2. Верно ли, что для эквивалентностей $\alpha_1, \alpha_2 \subseteq A^2$ отношение $\alpha_1 \cup \alpha_2$ - эквивалентность тогда и только тогда, когда $\alpha_1 \cup \alpha_2 = \alpha_1\alpha_2 =$?

N14. Пусть α - эквивалентность на A, $a^\alpha \rightleftharpoons \{x \in A | (x,a) \in \alpha\}$, $A/\alpha \rightleftharpoons \{a^\alpha | a \in A\}$. Доказать, что A/α - разбиение A.

N15. Пусть $R = \{A_i | i \in I\}$ - разбиение множества A и $\sigma_R \rightleftharpoons \{(x,y) \in A^2 | \exists i \in I(x,y \in A_i)\}$. Доказать, что σ_R - эквивалентность на A.

N16. Пусть α - эквивалентность на A и R - некоторое его разбиение. Доказать, что в обозначениях задач 7 и 8 $\sigma_{A/\alpha} = \alpha$ и $A/\sigma_R = R$.

N17. Для разбиения $R = \{\{1\},\{2,3\},\{4,5,6\}\}$ множества $\{x \in \mathbb{N} \ |1 \leq x \leq 6\}$ построить на нем эквивалентность σ_R.

N18. На множестве $A = \{-4,-3,-2,1,2,3\}$ определены отношения $\alpha_1 = \{(x,y) \in A^2 | \ xy \geq 0\}, \alpha_2 = \{(x,y) \in A^2 | \ xy > 0 \wedge \frac{x-y}{2} \in \mathbb{Z}\}$. Будет ли α_k при $k \in \{1,2\}$ эквивалентностью? Если да, то построить соответствующее разбиение множества A.

N19. Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6\}$ и $M = A \times A$. Доказать, что α - отношение эквивалентности и построить соответствующее разбиение, если:

1. $\alpha = \{((x,y),(u,v)) \in M^2 | \ xv = yu \ \}$.
2. $\alpha = \{((x,y),(u,v)) \in M^2 | \ x+v = y+u \ \}$.

N20. Пусть $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $M = A \times A$, $M_1 = \{3,4,5,6,7,8\}$ и $M_2 = M_1 \cup \{9\}$ Выяснить, будет ли отношение α рефлексивным, будет ли симметричным, будет ли транзитивным, если

1. $\alpha = \{((x,y),(u,v)) \in M^2 | \ x \leq u$ и $y \leq v \ \}$;
2. $\alpha = \{(x,y) \in {M_1}^2 | x < 3y\}$;
3. $\alpha = \{(x,y) \in {M_2}^2 | x < 3y\}$.

Являются ли отношения 1-3 отношениями эквивалентности.

N21. Пусть $A = \{1,2,3,...,25\}$, $\alpha = \{(x,y) \in A^2 | \exists k,l \in \mathbb{N}$
$x^k = y^l\}$. Доказать, что α есть отношение эквивалентности

и построить соответствующее разбиение.

N22. Обозначим через B^A *совокупность всех функций* $\varphi : A \to B$, *для которых* $Dom\varphi = A, Im\varphi \subseteq B$. Верно ли, что

1. для любой функции $\varphi \in B^A$ и любых $X, Y \in P(A)$ выполнены равенства

$$\varphi(X \cup Y) = \varphi(X) \cup \varphi(Y),$$
$$\varphi(X \cap Y) = \varphi(X) \cap \varphi(Y),$$
$$\varphi(X \backslash Y) = \varphi(X) \backslash \varphi(Y)?$$

2. $\varphi \in B^A$ - инъекция $\Leftrightarrow \varphi(X \cap Y) = \varphi(X) \cap \varphi(Y)$?

N23. Верно ли, что

1. функция $\varphi \in B^A$ инъективна тогда и только тогда, когда
$\varphi^{-1} \in A^{Im\varphi}$;

2. если функции $\varphi \in B^A, \psi \in C^B$ инъективны, то $\psi\varphi$ - инъекция из C^A;

3. $\varphi \in A^A$ инъективна тогда и только тогда, когда $\varphi\varphi^{-1} =$
$\varphi^{-1}\varphi = \delta_A$?

N24. *Ядром отображения* $\varphi \in B^A$ называется отношение $ker\varphi \rightleftharpoons \{(x, y) \in A^2 | \varphi(x) = \varphi(y)\}$. Доказать, что

1. $ker\varphi$ - эквивалентность на A и отношение $\{(x, x^{ker\varphi}) \in A \times P(A) | x \in A\}$ является отображением A на $A/ker\varphi$. Оно называется *естественным отображением* и обозначается через $nat_{ker\varphi}$.

2. для любой функции $\varphi \in B^A$, для которой $Im\varphi = B$, существует и при том единственная биекция $\psi : A/ker\varphi \to B$ такая, что
$\varphi = \psi nat_{ker\varphi}$.

N25. Для непустого множества A и $B \in P(A)$ определим *характеристическую функцию* $\chi_B \in \{0, 1\}^A$ множества B следующим образом:

$$\chi_B \rightleftharpoons \begin{cases} 0, \text{ если } x \in B, \\ 1, \text{ если } x \notin B. \end{cases}$$

Показать, что отображение $\varphi : P(A) \to \{0,1\}^A$, согласно которому $\varphi(B) \rightleftharpoons \chi_B$ для любого $B \in P(A)$, является биекцией.

N26. Верны ли следующие равенства: $\chi_A(x) = 0, \chi_\emptyset = 1$,
$\chi_{A \setminus B}(x) = 1 - \chi_B(x), \chi_{B \cup C}(x) = \chi_B(x) \cdot \chi_C(x), \chi_{B \cap C}(x) = \chi_B(x) + \chi_C(x), \chi_{B \setminus C}(x) = 1 - \chi_{B \cup C}(x)$.

4. Упорядоченные множества

N1.

1. Какими свойствами обладают отношения делимости на множествах $\mathbb{N}, \omega \rightleftharpoons \mathbb{N} \cup \{0\}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$?

2. Каковы свойства отношения $\leq$ на множествах $\mathbb{N}, \omega, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$?

N2. Доказать, что любое частично упорядоченное множество (ч.у.м.) изоморфно вложимо в ч.у.м. $< P(A); \subseteq >$ для некоторого множества A.

N3. Построить диаграммы ч.у.м. $< P(\emptyset); \subseteq >$, $< P(\{1\}; \subseteq >$,
$< P(\{1,2\}); \subseteq >$ и $< P(\{1,2,3\}); \subseteq >$.

N4. Построить диаграмму ч.у.м. $< \{1,2,3,4,5,6\}; | >$.

N5. Из скольких элементов сосстоит ч.у.м., в котором каждая цепь содержит не более h элементов, а каждая антицепь - не более l элементов?

N6. На декартовом произведении $A \times B$ ч.у.множеств $< A; \leq_1 >, < B; \leq_2 >$ определим отношение $\leq_3$: $(x,y) \leq_3 (u,v) \Leftrightarrow x \leq_1 u \wedge y \leq_2 v$. Пара $< A \times B; \leq_3 >$ называется прямым произведением исходных ч.у.м. Каковы свойства отношения $\leq_3$?

N7. Построить диаграмму ч.у.м. $A \times A$, где A - двуэлементная цепь.

N8. Построить диаграмму ч.у.м. $A \times B$, где A - двуэлементная цепь, $B =< P(\{1,2\}); \subseteq>$.

N9. Пусть $< A; \leq>, a, b \in A, a \leq b$ и $[a,b] \rightleftharpoons \{x \in A | a \leq x \leq b\}$. Показать, что ч.у.м. $< \{[a,b] | a,b \in A\}; \subseteq>$ изоморфно вложимо в прямое произведение $< A; \geq> \times < A; \leq>$.

N10. Сколько существует двуэлементных неизоморфных ч.у.м.? Какие из них самодвойственны? Те же вопросы для трехэлементных ч.у.м.

N11. Доказать, что каждый частичный порядок на множестве A может быть продолжен до линейного порядка на A.

N12. Доказать, что в любом векторном пространстве существует базис.

N13. Пусть функция $\varphi : A^2 \to A$ такова, что $\varphi(x,y) = \varphi(y,x), \varphi(x, \varphi(y,z)) = \varphi(\varphi(x,y),z), \varphi(x,x) = x$. Определим на A отношение α, полагая $x\alpha y \Leftrightarrow \varphi(x,y) = x$. Каковы свойства α? Верно ли, что если α - частичный порядок, то $\varphi(x,y) = inf(x,y)$ в ч.у.м. $< A; \alpha >$?

N14. На $\mathbb{R}$ определим отношение

$$x\alpha y \Leftrightarrow \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{y}{y^2+1}.$$

Каковы свойства α? Существуют ли подмножества $A \subseteq \mathbb{R}$ такие, что $< A; \alpha >$ - ч.у.м.?

N15. Пусть $\mathcal{D} \rightleftharpoons \{x \in \mathbb{Q} | x > 0 \wedge x^2 > 2\}$. Имеет ли $\mathcal{D}$ точную нижнюю грань в ч.у.м. $< \mathbb{Q}; \leq>$? Имеет ли это множество точную нижнюю грань в ч.у.м. $< \mathbb{R}; \leq>$?

N16. Пусть B - множество всех бинарных отношений на множестве $\{1,2\}$. Какова диаграмма ч.у.м. $< B; \subseteq>$?

N17. Пусть R, S, A, T - множества всех рефлексивных, симметричных, антисимметричных и транзитивных отношений на данном множестве M. Будут ли полными решетками ч.у.м. $< R; \subseteq >$, $< S; \subseteq >$, $< A; \subseteq >$, $< T; \subseteq >$?

N18. Будет ли ч.у.м. $< \{[1,2] \cap \mathbb{Q}\}; \leq >$ полной решеткой?

N19. Пусть $\mathbb{Q}$ - множество всех квадратных многочленов из $\mathbb{R}[x]$ с единичными старшими коэффициентами и неотрицательными дискриминантами. На $\mathbb{Q}$ рассмотрим отношение $\leq_1$, согласно которому $x^2+p_1x+q_1 \leq_1 x^2+p_2x+q_2 \Leftrightarrow p_1-p_2 \geq |\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2}|$, где $D_k = {p_k}^2 - 4q_k, k = 1,2$. Будет ли $< \mathbb{Q}; \leq_1 >$ решеткой?

N20. Является ли семейство всех эквивалентностей на данном множестве полной решеткой относительно отношения включения?

N21. Пусть $< A; \leq >$ - более чем одноэлементное линейно упорядоченное множество (л.у.м.) и $B = \cup^{\infty}{}_{k=1} A^k$. На B введем отношение $\leq_1$: $(x_1,...,x_m) \leq_1 (y_1,...,y_n) \Leftrightarrow (m \leq n \wedge x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_m = y_m) \vee (\exists i \leq min(m,n)(x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} = y_{i-1} \wedge x_i < y_i))$. Доказать, что $\leq_1$ - линейный порядок и что любое счетное л.у.м. изоморфно вложимо в $< B; \leq_1 >$. Порядок $\leq_1$ называется *лексикографическим.*

N22. На множестве B из предыдущей задачи определим отношение $\leq_2$: $(x_1,...,x_m) \leq_2 (y_1,...,y_n) \Leftrightarrow (m < n \vee (m = n \wedge \exists i \leq m$
$(x_1 = y_1 \wedge ... \wedge x_{i-1} = y_{i-1} \wedge x_i < y_i) \vee (x_1,...,x_m) = (y_1,...,y_n)$. Каковы свойства отношения $\leq_2$ и его связи с отношением $\leq_1$ из предыдущей задачи?

N23. Подмножество B л.у.м. $< A; \leq_1 >$ называется *плотным в* A, если $\forall x, y \in A \exists b \in B (x \leq_1 b \leq_1 y \vee y \leq_1 b \leq_1 x)$. Верно ли, что если A содержит плотное в A подмножество, то A изоморфно вложимо в $< \mathbb{R}; \leq >$?

N24. Верно ли, что ч.у.м. фундированно, т.е. удовлетворяет условию минимальности, тогда и только тогда, когда все его цепи вполне упорядоченны относительно исходного порядка?

N25. Верно ли, что наибольший элемент ч.у.м. является его единственным максимальным элементом? Может ли ч.у.м. иметь точно один максимальный элемент и не иметь наибольшего?

N26. Отображение $\varphi : A \to B$ называется *монотонным отображением* ч.у.м. $< A; \leq >$ в ч.у.м. $< B; \leq_1 >$, если $\forall x, y \in A(x \leq y \to \varphi(x) \leq_1 \varphi(y))$. Всегда ли обратная биекция к монотонной биекции A на B также будет монотонной? Отдельно рассмотреть случай, когда A и B - л.у.м.

N27. Когда произведение $\sigma_1\sigma_2$ двух линейных порядков σ_1, σ_2 на данном множестве будет опять линейным порядком?

N28. Построить линейные порядки на множествах $\mathbb{N}^2$, $\cup\mathbb{N}^k$, $\mathbb{C}$.

N29. Верно ли, что л.у.м. одинаковой мощности изоморфны между собой?

N30. Для ч.у.м. $< A; \leq >$ и $a \in A$ обозначим $(< a) \rightleftharpoons \{x \in A | x < a\}$. Множество $(< a)$ называется *интервалом* A, *отсекаемым элементом* a. Верно ли, что $< \{(< a) | a \in A\}; \subseteq >$ изоморфно $< A; \leq >$?

N31. Доказать, что:

1. для любого вполне упорядоченного множества (в.у.м.) $< A; \leq >$, любой монотонной инъекции $\varphi : A \to A$ и любого $x \in A$ имеем $x \leq \varphi(x)$;

2. в.у.м. не изоморфно части никакого своего отрезка;

3. различные отрезки вполне упорядоченного множества не изоморфны;

4. существует не более одного изоморфизма двух в.у.м.

5. любые два в.у.м. либо изоморфны, либо одно изоморфно отрезку другого;

N32. Верны ли утверждения задачи **N31** для произвольных л.у.м.?

N33. Каковы те л.у.м., для которых конечен каждый интервал?

N34. *Порядковый тип* л.у.м. $< A; \leq >$, т.е. класс всех л.у.м., изоморфных $< A; \leq >$, будем обозначать через $\overline{< A; \leq >}$. Введем следующие обозначения для порядковых типов: $\omega = \overline{< \omega; \leq >}$, $\pi = \overline{< \mathbb{Z}; \leq >}$, $\eta = \overline{< \mathbb{Q}; \leq >}$, $\lambda = \overline{< \mathbb{R}; \leq >}$. Доказать, что $\overline{A} = \omega$ тогда и только тогда, когда:

1. в A есть наименьший элемент a_0;

2. для любого $a \in A$ в множестве $\{x \in A | a < x\}$ есть наименьший элемент a';

3. $\forall \subseteq A(a_0 \in X \wedge \forall a \in X(a' \in X) \rightarrow X = A)$.

N35. Верно ли, что бесконечное л.у.м. имеет порядковый тип ω тогда и только тогда, когда все его отрезки конечны или пусты?

N36. Доказать, что любое счетное л.у.м. $< A; \leq >$ имеет порядковый тип η тогда и только тогда, когда в A нет экстремальных элементов и A - плотно упорядоченное множество, т.е. $\forall x, y \in A \exists z \in A(x < y \rightarrow x < z < y)$.

N37. Верно ли, что $\alpha \leq \eta$ для любого счетного порядкового типа α?

N38. Верно ли, что $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ для любых порядковых типов α, β?

N39. Верно ли, что $\alpha \cdot \beta = \beta \cdot \alpha$ для любых порядковых типов α, β?

N40. Какие из следующих соотношений справедливы: $1 + \omega = \omega, \omega + 1 = \omega, \omega^* + \omega \neq \pi, \omega + \omega^* = \pi, \eta + \eta = \eta, \lambda + 1 + \lambda = \lambda, \lambda + \lambda = \lambda, 1 + \lambda + 1 = \overline{< [1, 2]; \leq >}$, $\alpha \cdot 0 = 0, 0 \cdot \alpha = 0, \alpha \cdot 1 = \alpha, 1 \cdot \alpha = \alpha, \eta^2 \neq \eta, \omega \cdot \eta = \omega \cdot (\eta + 1)$?

N41. Построить множества порядковых типов $\omega^2, \omega^3, \ldots$

N42. Верно ли, что $\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma, (\alpha + \beta) \cdot \gamma = \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$ для любых порядковых типов α, β, γ?

N43. Доказать, что л.у.м. будет в.у.м. тогда и только тогда, когда оно не содержит подмножеств типа ω^*.

N44. Пусть O_n - *класс всех ординалов*, $\alpha \in O_n$ и $W_\alpha \rightleftharpoons \{\beta \in O_n | \beta < \alpha\}$. Верно ли, что $W_\alpha = \alpha$?

N45. Доказать, что:

1. всякое множество ординалов вполне упорядочено;

2. для любого множества ординалов S существует ординал, больший всех ординалов из S, и среди ординалов из $O_n \backslash S$ существует наименьший;

3. не существует множества, содержащего класс O_n;

4. для любого $\alpha \in O_n$ имеет место одно из трех утверждений: $\alpha = 0$; W_α имеет максиматьный элемент; α - предельный ординал;

5. любой ординал представим в виде $\alpha + n$, где $\alpha = 0$ или является предельным ординалом, $n \in \omega$.

N46. Верно ли, что для любых $\alpha, \beta, \gamma \in O_n$:

1. $\alpha \leq \alpha + \gamma, \alpha \leq \gamma + \alpha$;
2. $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma \leq \beta + \gamma$;
3. $\alpha + \gamma < \beta + \gamma \Leftrightarrow \alpha < \beta$;
4. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha + \gamma < \beta + \gamma$;
5. $\alpha + \gamma = \beta + \gamma \Leftrightarrow \alpha = \beta$;
6. $\alpha \leq \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma \leq \beta \cdot \gamma$;
7. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta$;
8. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \alpha \cdot \gamma < \beta \cdot \gamma$;
9. $\alpha < \beta \Leftrightarrow \gamma \cdot \alpha < \gamma \cdot \beta \wedge \gamma \neq 0$;
10. $\alpha = \beta \Leftrightarrow \gamma \cdot \alpha = \gamma \cdot \beta \wedge \gamma \neq 0$.

N47. Существуют ли такие $\alpha, \beta, \gamma \in O_n$, что $\alpha \neq \beta \wedge \alpha + \gamma = \beta + \gamma$?

N48. Построить в.у.м. порядкового типа ω^ω.

N49. Множество A называется *транзитивным*, если $\emptyset \in A \wedge \forall xy(x \in y \wedge y \in A \rightarrow x \in A)$ и если отношение $x \leq y \Leftrightarrow x = y \vee x \in y$ вполне упорядочивает A. Построить пример бесконечного транзитивного множества.

N50. Доказать, что:

1. для любого $\alpha \in O_n$ существует и притом единственное транзитивное множество, упорядоченное отношением $\leq$ из предыдущей задачи по типу α;

2. аксиоме выбора эквивалентна аксиома Цермело: Для любого множества A непустых попарно непересекающихся множеств существует такое множество C, что для любого $x \in A$ множество $x \cap C$ одноэлементно;

3. аксиоме выбора эквивалентна аксиома Тейхмюллера-Тьюки: каждое семейство множеств конечного характера содержит максимальное по включению множество. При этом семейство S множеств имеет конечный характер, если $\forall x(x \in S \to \forall y \subseteq x(\overline{\overline{y}} < \overline{\overline{\omega}} \to y \in S))$.

5. Мощность множества

N1. Какие из следующих множеств конечны и какие бесконечны? Для каждого конечного множества перечислите все его элементы:

1. $\{x \in \mathbb{R} | x^2 - 5x + 4 = 0\}$;
2. $\{x \in \mathbb{N} | x^2 - 5x + 4 > 0\}$;
3. $\{x \in \mathbb{N} | x/24\}$;
4. $\{x \in \mathbb{N} | \exists y \in \mathbb{N}\ 2x + 3y = 24\}$;
5. $\{x \in \mathbb{N} | \exists y \in \mathbb{Z}\ 2x + 3y = 24\}$.

N2. Из 100 студентов 28 изучают английский язык, 30 - немецкий, 42 - французский, 8 - английский и немецкий, 10 - английский и французский, 5 - немецкий и французский и 3 студента изучают все три языка. Сколько студентов не изучают ни одного языка, изучают только французский язык?

N3. Из 100 студентов 24 не изучают никакого языка, 26 изучают японский, 48 - китайский, 8 - корейский и китайский, 8 - японский и китайский, 18 - только японский, 23

- японский, но не корейский. Сколько студентов изучают только корейский язык?

N4. Доказать, что:

1. множество счетно тогда и только тогда, когда все его элементы можно расположить в виде бесконечной последовательности без повторяющихся членов;

2. каждое бесконечное множество содержит счетное подмножество;

3. всякое бесконечное подмножество счетного множества счетно;

4. объединение не более чем счетного семейства счетных множеств счетно;

5. декартово произведение конечного числа счетных множеств счетно;

6. множество всех рациональных чисел счетно;

7. объединение бесконечного множества A и не более чем счетного множества имеет мощность A;

8. объединение двух континуальных множеств континуально;

9. множество всех непрерывных на $\mathbb{R}$ функций континуально;

10. множество $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ более чем континуально;

11. $P(\mathbb{N})$ континуально;

12. непустое множество бесконечно тогда и только тогда, когда оно равномощно некоторому собственному подмножеству;

13. область значений функции со счетной областью определения не более чем счетна;

14. непустое множество A не более чем счетно тогда и только тогда, когда существует сюрьекция $\mathbb{N}$ на A;

15. множество всех конечных последовательностей, составленных из элементов некоторого счетного множества, есть счетное множество;

16. множество всех конечных подмножеств счетного множества счетно;

17. множество $\mathbb{Z}[x]$ счетно;

18. множество всех алгебраических чисел, т.е. корней многочленов из $\mathbb{Z}[x]$, счетно;

19. любое множество попарно непересекающихся открытых интервалов на действительной прямой не более чем счетно;

20. если $A \subseteq \mathbb{R}$ и $\exists \delta > 0 \forall x, y \in A (x \neq y \to |x - y| \geq \delta)$, то A не более чем счетно;

21. множество точек разрыва монотонной функции на действительной оси не более чем счетно;

22. $\overline{\overline{[a,b]}} = \overline{\overline{[c,d]}}, \overline{\overline{[a,b]}} = \overline{\overline{(a,b)}}, \overline{\overline{[a,b]}} = \overline{\overline{\mathbb{R}}}$ для любых a, b, c, d таких, что $a < b, c < d$;

23. множества точек двух окружностей равномощны;

24. множество всех разрывных функций, определенных на $[0,1]$, более чем континуально.

N5. Можно ли установить взаимно однозначное соответствие между точками квадрата и плоскости? Если да, то сделать это.

N6. Найти мощность множества всех счетных последовательностей действительных чисел.

N7. Какова мощность множества A, если на нем можно ввести полный порядок α, для которого α^{-1} тоже будет полным порядком?

N8. Какова мощность множества всех монотонных функций на действительной прямой?

N9. Можно ли выбрать $a \in \mathbb{R}$ так, что $\{x + a | x \subseteq A\} \cap A = \emptyset$ для данного счетного множества $A \subseteq \mathbb{R}$?

N10. Пусть S - такое семейство множеств, что для каждого $X \subseteq S$ существует $Y \in S$, неравномощное никакому подмножеству множества X. Доказать, что объединение всех множеств из S неравномощно никакому подмножеству из S.

N11. Пусть A - такое множество последовательностей натуральных чисел, что оно с каждой последовательностью $\{x_n\}$ содержит все последовательности $\{y_n\}$, для которых $\underset{n \to \infty}{lim} \left(\frac{x_n}{y_n}\right) = 0$. Какова мощность A?

N12. Доказать коммутативность и ассоциативность сложения кардинальных чисел.

N13. Доказать коммутативность и ассоциативность умножения кардинальных чисел.

N14. Доказать, что если ξ, η, μ - кардинальные числа, то $\xi^{\eta+\mu} = \xi^{\eta} \cdot \xi^{\mu}, \xi \cdot \eta^{\mu} = \xi^{\mu} \cdot \eta^{\mu}, \xi^{\eta^{\mu}} = \xi^{\eta \cdot \mu}$.

N15. Доказать, что для любого непустого множества A имеет место равенство $2^{\overline{\overline{A}}} = \overline{\overline{2^A}}$.

N16. Верно ли, что для любых множеств A_1, A_2 существуют такие множества B_1, B_2, что $\overline{\overline{A_k}} = \overline{\overline{B_k}}, k = 1, 2$ и $B_1 \cap B_2 = \emptyset$.

N17. Доказать, что кардинальные числа линейно упорядочены отношением $\leq$.

N18. Доказать, что для произвольных мощностей $\mathfrak{m}$ и $\mathfrak{n}$ выполняется одно и только одно из условий $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$, $\mathfrak{m} > \mathfrak{n}$.

N19. Доказать, что произведение двух кардинальных чисел всегда существует.

N20. Доказать для произвольных кардинальных чисел $\mathfrak{m}$, $\mathfrak{n}$, $\mathfrak{p}$:

1. $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{m}$;
2. $(\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}) \cdot \mathfrak{p} = \mathfrak{m} \cdot (\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p})$;
3. $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}) + \mathfrak{p}) = \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} + \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p})$;
4. $\mathfrak{m} \cdot 1 = \mathfrak{m}$;
5. $\mathfrak{m} \cdot 0 = 0$;
6. $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n} = \mathfrak{n}$, если $\mathfrak{m}$ - конечное, а $\mathfrak{n}$ - бесконечное кардинальное число;

7. $\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}+\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n}} \cdot \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}}$;
8. $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}\ ^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \cdot \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$;
9. $(\mathfrak{m}^{\mathfrak{n}})^{\mathfrak{p}} = \mathfrak{m}^{\mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}}$;
10. если $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{n} \leq \mathfrak{p}$, то $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{p}$;
11. если $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{m} + \mathfrak{p} \leq \mathfrak{n} + \mathfrak{p}$;
12. если $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{m} \cdot \mathfrak{p} \leq \mathfrak{n} \cdot \mathfrak{p}$;
13. если $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{m}^{\mathfrak{p}} \leq \mathfrak{n}^{\mathfrak{p}}$;
14. если $\mathfrak{m} \leq \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{p}^{\mathfrak{m}} \leq \mathfrak{p}^{\mathfrak{n}}$;
15. если $\mathfrak{m}, \mathfrak{n} > 1$, то $\mathfrak{m} + \mathfrak{n} \leq \mathfrak{m} \cdot \mathfrak{n}$;
16. если $\mathfrak{n} + \mathfrak{m} = \mathfrak{n}$ и $\mathfrak{p} \geq \mathfrak{n}$, то $\mathfrak{p} + \mathfrak{m} = \mathfrak{p}$.

ЧАСТЬ 2. Математическая логика

1. Логика высказываний

N1. Какие из следующих предложений являются высказываниями?

1. Студент математико-механического факультета университета.

2. Треугольник ABC подобен треугольнику $A_1B_1C_1$.

3. Луна - спутник Марса.

4. $2+\sqrt{3}-\sqrt{5}$.

5. Кислород - газ.

6. Каша - вкусное блюдо.

7. Математика - интересный предмет.

8. Картины Пикассо слишком абстрактны.

9. Железо тяжелее свинца.

10. Да здравствуют музы!

11. Треугольник называется равносторонним, если все его стороны равны.

12. Если в треугольнике все углы равны, то он равносторонний.

13. Сегодня плохая погода.

14. В романе А.С.Пушкина "Евгений Онегин"136245 букв.

15. Река Ангара впадает в озеро Байкал.

16. Иди туда, не знаю куда.

17. Пролетарии всех стран соединяйтесь!

N2. Данное сложное предложение требуется расчленить на простые и записать с использованоем связок: *конъюнкции* - $\wedge$ (союз "и"), *дизъюнкции* - $\vee$ (союз "или"), *импликации* - $\rightarrow$ (союз "если ... то"), *эквиваленции* - $\leftrightarrow$ (союз "тогда и только тогда, когда"), *отрицание* - $\neg$ (частица "не").

Для образца проведем требуемый анализ следующего предложения: "Автолюбитель счастлив, если он покупает машину, или выживает после автокатастрофы, или окончательно продает свой автомобиль". Введем следующие обозначения:

p - "автолюбитель счастлив",

q - "он покупает машину",

r - "он выживает после автокатастрофы",

s - "он окончательно продает свой автомобиль".

Теперь наше сложное предложение запишется так: $(q \vee r \vee s) \rightarrow p$.

1. "Заяц"платит штраф за безбилетный проезд лишь в том случае, когда его поймал контролер и этот кантролер настойчив, а "заяц"не забыл дома кошелек.

2. Если последовательность монотонна и ограниченна сверху, то она имеет предел.

3. Если хочешь быть спокоен, не принимай горя и неприятностей на свой счет, но всегда относи их на казенный.

К.Прутков

4. Для того, чтобы x было нечетным, достаточно, чтобы x было простым.

5. Бросая в воду камешки, смотри на круги, ими образуемые; иначе такое бросание будет пустою забавою.

К.Прутков

6. Необходимым условием обратимости матрицы является ее невырожденность.

7. Обидно, если в пору цветения садов не сочиняют стихи и не наполняют чарки вином.

Цзацзауань; Ли Шан-Инь

8. Необходимым и достаточным условием дифференцируемости функции является ее непрерывность.

N3. Сформулируйте отрицания следующих высказываний; укажите значения истинности данных высказываний и их отрицаний:

1. Волга впадает в Каспийское море.
2. Число 28 не делится на число 7.
3. Все простые числа нечетны.
4. $6 > 3$.
5. $4 \leq 5$.

N4. Установите, какие из высказываний в следующих парах являются отрицаниями друг друга и какие - нет (объясните почему):

1. $2 < 0, 2 > 0$.
2. $6 < 9, 6 \geq 9$.
3. "Треугольник ABC прямоугольный", "Треугольник ABC тупоугольный".
4. "Натуральное число n четно", "Натуральное число n нечетно".
5. "Функция f нечетна", "Функция f четна".
6. "Все простые числа нечетны", "Все простые числа четны".
7. "Все простые числа нечетны", "Существует простое четное число".
8. "Человеку известны все виды животных, обитающих на Земле", "На Земле существует вид животных, не известный человеку".
9. "Существуют иррациональные числа", "Все числа рациональные".

N5. Следующие высказывания запишите без знака отрицания, считая $\leq$ отношением порядка на $\mathbb{R}$ и на $\mathbb{C}$:

1. $\neg(a < b)$;
2. $\neg(a \leq b)$;
3. $\neq (a \geq b)$;
4. $\neg(a > b)$.

N6. Определите значения истинности следующих высказываний:

1. Париж расположен на Днестре и $2+3=5$.

2. 7 - простое число и 9 - простое число.

3. 7 - простое число или 9 - простое число.

4. Число 2 четное или это число простое.

5. $2 \leq 3$ или $2 \geq 3$.

6. $2 \cdot 2 = 4$ или павлины живут в Антарктиде.

7. $2 \cdot 2 = 4$, и $2 \cdot 2 \leq 5$, и $2 \cdot 2 \geq 4$.

8. Если 12 делится на 6, то 12 делится на 3.

9. Если 11 делится на 6, то 11 делится на 3.

10. Если 15 делится на 6, то 15 делится на 3.

11. Если 15 делится на 3, то 15 делится на 6.

12. Если Саратов расположен на Неве, то белые медведи обитают в Африке.

13. 12 делится на 6 тогда и только тогда, когда 12 делится на 3.

14. 11 делится на 6 тогда и только тогда, когда 11 делится на 3.

15. 15 делится на 6 тогда и только тогда, когда 15 делится на 3.

16. 15 делится на 5 тогда и только тогда, когда 15 делится на 4.

17. Тело с массой m обладает потенциальной энергией mgh тогда и только тогда, когда оно находится на высоте h над поверхностью Земли.

N7. Определите значения истинности высказываний A, B, C, D, E, если:

1. $A \wedge (2 \cdot 2 = 4)$ - истинное высказывание.

2. $B \wedge (2 \cdot 2 = 4)$ - ложное высказывание.

3. $C \vee (2 \cdot 2 = 5)$ - истинное высказывание.

4. $D \vee (2 \cdot 2 = 5)$ - ложное высказывание.

5. $D \wedge (2 \cdot 2 = 5)$ - ложное высказывание.

6. "Если 4 - четное число, то A. истинное высказывание.

7. "Если B, то 4 - нечетное число. истинное высказывание.

8. "Если 4 - четное число, то C. ложное высказывание.

9. "Если D, то 4 - нечетное число. ложное высказывание.

N8. Будут ли следующие выражения формулами логики высказываний:

1. $(((p \wedge q) \vee r) \neg s)$;
2. $(p \wedge q) \to r$;
3. $((p \to q) \wedge \neg r)$;
4. $((p \wedge (r \wedge q) \vee \neg p) \to s)$;
5. $(p \wedge q) r \neg s$;
6. $(((\neg p) \to q) \to \neg(p \vee q)))$?

N9. Расставив скобки, образовать формулы логики высказываний:

1. $p \to \neg q \vee r \wedge s$,
2. $p \to q \to r \to p \to q \to p \to r$.

N10. Подсчитать число расстановок скобок, в результате которых получаются формулы:

1. $p \to q \wedge \neg p \vee s \to r$,
2. $p \wedge \neg p \vee \neg q \vee r \wedge s$.

N11. Выписать все подформулы формулы:

1. $(((p \to q) \wedge (q \to r)) \to (\neg p \vee r))$;
2. $((p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg q))$.

N12. Построить таблицы истинности для формул

1. $((p \wedge \neg q) \to \neg p)$;
2. $((\neg p \wedge (q \to p)) \to p)$;
3. $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$;
4. $((p \to q) \vee (p \to (p \wedge q)))$;
5. $(\neg(p \to \neg(p \wedge q)) \to (p \vee r))$;
6. $((p \wedge (q \to p)) \to \neg q)$;
7. $(((p \wedge \neg q) \to q) \to (p \to q))$;

8. $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$;
9. $((p \wedge (q \vee \neg p)) \wedge ((\neg q \to p) \vee q))$;
10. $((((p \to q) \to r) \to s) \vee (((s \to r) \to q) \to p))$;
11. $((((s \to r) \to q) \to s) \wedge (p \vee \neg r))$;
12. $((p \to q) \to (p \to (r \vee \neg q)))$.

N13. Существуют ли такие значения p, q, r, s, при которых ложны формулы

1. $((p \wedge \neg q) \to ((p \to q) \wedge (q \to p)))$,
2. $(((p \vee q) \wedge r) \to (p \vee (q \wedge s)))$?

N14. Сформулируйте и запишите в виде конъюнкции или дизъюнкции условие истинности каждого из следующих предложений, считая, что a, $b \in \mathbb{R}$ или a, $b \in \mathbb{C}$:

1. $a \cdot b \neq 0$.
2. $a \cdot b = 0$.
3. $a^2 + b^2 = 0$.
4. $\frac{a}{b} = 0$.
5. $|a| = 3$.
6. $|a| < 3$.
7. $|a| > 3$.
8. $\sqrt{a} = b$.
9. $a^2 + b^2 \neq 0$.
10. $\frac{a}{b} \neq 0$.
11. $x^2 + ax + b = 0$.
12. $\sin \frac{b}{a} = b$.

N15. Для каждого из помещенных ниже высказываний определите, достаточно ли приведенных сведений, чтобы установить его истинностное значение. Если достаточно, то укажите это значение. Если недостаточно, то покажите, что возможны и одно, и другое истинностные значения:

1. $(p \to q) \to r$, $C =$И;
2. $p \wedge (q \to r)$, $(q \to r) =$Л;
3. $p \vee (q \to r)$, $q =$Л;
4. $\neg(p \vee q) \leftrightarrow (\neg p \wedge \neg q)$, $p =$И;

5. $(p \to q) \to (\neg p \to \neg q)$, $q =$И;

6. $(p \wedge q) \to (p \vee r)$, $p =$Л.

N16. Существует ли такая формула p, что следующие формулы будут тождественно истинны

1. $(((p \wedge q) \to \neg r) \to ((r \to \neg q) \to p)))$,
2. $(((q \to (\neg r \wedge s)) \to p) \to (p \wedge ((s \to r) \wedge q)))$?

N17. Для всякой ли выполнимой (т.е. не тождественно ложной) формулы, в запись которой входит символ p, можно так подобрать некоторую формулу, что после подстановки ее вместо p мы получим тождественно истинную формулу?

N18. Доказать тождественную истинность формул:

1. $(p \to (q \to p))$;
2. $((p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r)))$;
3. $((\neg p \to \neg q) \to (q \to p))$;
4. $(\neg\neg p \to p)$;
5. $(\neg p \to (p \to q))$;
6. $((p \to q) \vee (q \to p))$;
7. $((p \to q) \vee (p \to \neg q))$;
8. $(p \to (q \to (p \wedge q)))$;
9. $((p \to q) \to ((q \to r) \to (p \to r)))$;
10. $(p \to (q \to p))$;
11. $(p \vee \neg p)$;
12. $((p \to q) \to ((p \to (q \to r)) \to (p \to r)))$;
13. $((p \wedge q) \to p)$;
14. $(p \to (p \vee q))$;
15. $((p \to r) \to ((q \to r) \to ((p \vee q) \to r)))$;
16. $((p \to q) \to ((p \to \neg q) \to \neg p))$;
17. $(p \to \neg\neg p)$;
18. $((\neg q \to \neg p) \to ((\neg q \to p) \to q))$;
19. $((p \vee p) \to p)$;
20. $((q \to r) \to ((p \vee q) \to (p \vee r)))$;
21. $(((p \to q) \to p) \to p)$.

N19. Можно ли построить формулу от трех переменных, которая истинна в том и только в том случае, когда ровно две переменные принимают значение Л?

N20. Существует ли такая формула от трех переменных, которая принимает такое же значение, как и большинство переменных?

N21. Доказать, что формула, не содержащая других связок, кроме $\leftrightarrow$, тождественно истинна тогда и только тогда, когда каждая переменная входит в нее четное число раз.

N22. Доказать, что формула, не содержащая других связок, кроме $\leftrightarrow$ и $\neg$, тождественно истинна тогда и только тогда, когда каждая переменная и знак отрицания входит в нее четное число раз.

N23. Пусть $(p \leftrightarrow q) =$И. Что можно сказать об истинностном значении формул $(\neg p \leftrightarrow q) =$, $(p \leftrightarrow \neg q) =$?

N24. Пусть $(p \to q) =$И. Что можно сказать об истинностном значении формулы $((\neg p \wedge q) \leftrightarrow (p \vee q))$?

N25. Верно ли, что тождественная истинность формул $(p \vee q), (p \to q), (q \to s)$ влечет тождественную истинность формулы $(r \vee s)$?

N26. Достаточны ли условия $p =$И, $q =$Л для установления истинностного значения формулы r, если:

1. $p = x_3, r = ((x_1 \to x_2) \to x_3)$;
2. $p = x_1 \vee x_2, r = (\neg(x_1 \vee x_2) \leftrightarrow (\neg x_1 \wedge \neg x_2))$;
3. $p = x_1, q = x_3, r = ((x_1 \wedge x_2) \to (x_1 \vee x_3))$?

N27. Пусть $(p \vee q) =$И, $(p \to q) =$И, $(q \to s) =$И. Верно ли, что $(r \vee s) =$И?

N28. Введем новую связку - *штрих Шеффера*: $(p|q) \rightleftharpoons (\neg p \vee \neg q)$. Справедливы ли следующие утверждения:

1. $(p|p) \models\!\!\mid \neg p$,
2. $(p|p)|(q|q) \models\!\!\mid p \vee q$?

N29. Можно ли выразить связки $\wedge$ и $\to$ через штрих

Шеффера?

N30. Можно ли отрицание выразить через $\wedge$, $\vee$, $\to$?

N31. Всякая ли формула равносильна формуле, содержащей лишь связки $\neg$ и $\vee$?

N32. Выразимы ли связки $\wedge$ и $\vee$ через связки $\neg$ и $\to$?

N33. Выразимы ли связки $\to$ и $\vee$ через связки $\neg$ и $\wedge$?

N34. Введем новую связку $(p \circ q) =$И $\Leftrightarrow p = q =$Л. Показать, что любая формула равносильна формуле с единственной связкой $\circ$.

N35. Пусть p и q не содержат импликации и p^*, q^* получены из p и q взаимной заменой связок $\wedge$, $\vee$.

1. Доказать *закон двойственности*: $p \models\!\dashv q \Leftrightarrow p^* \models\!\dashv q^*$.

2. Доказать, что $\models p \to q \Leftrightarrow \models q^* \to p^*$.

3. Доказать, что $\models p \Leftrightarrow \models \neg p^*$.

N36. Доказать, что $p \models\!\dashv q \Leftrightarrow p \models q$ и $q \models p$.

N37. Доказать, что $p_1, ..., p_n \models q \Leftrightarrow \models (p_1 \to (...(p_n \to q)...))$ и что $p_1, ..., p_n \models q \Leftrightarrow \models (p_1 \wedge ... \wedge p_n \to q)$.

N38. По высказыванию $p \to q$ построим следующие три высказывания: $(q \to p)$, $(\neg p \to \neg q)$, $(\neg q \to \neg p)$. Первое из них называется *обратным к исходному*, второе - *противоположным*, а третье - *противоположным к обратному*. Показать, что

1. обратное к истинному высказыванию не всегда истинно;

2. противоположное истинному высказыванию не всегда истинно;

3. противоположное к обратному для истинного высказывания всегда истинно;

4. высказывание, противоположное обратному, совпадает с высказыванием, обратным к противоположному;

5. если высказывание и противоположное ему истинны, то и обратное также истинно;

6. если высказывание и обратное к нему истинны, то и противоположное также истинно.

N39. Для каждого из следующих утверждений сформулировать обратное, противоположное и противоположное обратному; указать верные утверждения:

1. Если в четырехугольник можно вписать окружность, то этот четырехугольник представляет собой ромб;

2. Если параллелограмм является прямоугольником, то вокруг него можно описать окружность;

3. Если последовательность имеет предельную точку, то она ограниченна.

N40. В следующих предложениях заменить многоточия оборотами "необходимо и достаточно", "необходимо, но не достаточно", "достаточно, но не необходимо"так, чтобы получились верные утверждения:

1. Для того, чтобы выиграть в лотерее, ... иметь хотя бы один лотерейный билет.

2. Для того, чтобы хотя бы одно из чисел a, b было равно нулю, ..., чтобы $a^2 + b^2 = 0$.

3. Для того, чтобы функция $y = ax^2 + bx + c$ при всех целых x принимала целые значения, ..., чтобы $2a, a + b, c$ были целыми числами.

N41. Следователь допрашивает трех свидетелей - Клода, Жака и Дика. Каждый из них обвинял кого-нибудь во лжи. Клод утверждал, что Жак лжет, Жак обвинял во лжи Дика, а Дик уговаривал следователя не верить ни Клоду, ни Жаку. Следовательь, не задав ни одного вопроса, понял, кто из свидетелей говорил правду. Как это можно сделать и кто говорил правду?

N42. Из шести кладоискателей-одиночек двое нашли клады. Опрашивая свидетелей, налоговый инспектор на вопрос: "Кто нашел клад?"получил следующие пять ответов: нашли клад 1-й и 3-й, 2-й и 6-й, 1-й и 6-й, 2-й и 5-й, 1-й и 4-й. Стало известно, что в четырех из пяти ответов правильно указан один из счастливцев, а в одном ответе оба счастливца указаны неверно. Кто нашел клад?

N43. Жители некоторого государства делятся на рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда лгут. Как-то в комнате собралось 10 жителей этого государства, и каждый из них сказал, обращаясь к остальным:"Все вы - лжецы". Сколько среди этих людей было рыцарей и сколько - лжецов?

N44. В стране Плюралии некоторые жители всегда говорят правду, а остальные всегда лгут. Как-то собрались четыре жителя этой страны, и между ними произошел такой разговор:

1-й: По крайней мере один из нас - лжец. 2-й: По крайней мере двое из нас - лжецы. 3-й: По крайней мере трое из нас - лжецы. 4-й: Среди нас нет лжецов.

Кто из говоривших лжец, а кто всегда говорит правду?

N45. Жители некоторого государства делятся на рыцарей, которые всегда говорят правду, и лжецов, которые всегда лгут. Однажды 15 жителей государства встали в круг, и каждый из них заявил, что один из его соседей рыцарь, а другой - лжец. Сколько рыцарей и сколько лжецов могло быть среди этих 15 человек?

N46. Упростить схемы:

N47. Три молодые пары пришли на дискотеку. Одна девушка была в красном костюме, вторая - в зеленом, третья - в синем. Их партнеры также были в красном, зеленом и синем. Оказавшись во время танцев рядом с девушкой в зеленом, юноша в красном обратился к ней. "Не правда ли забавно получается: ни у кого из нас цвет костюма не совпадает с цветом костюма партнера."Можете ли вы с уверенностью сказать, в костюме какого цвета был юноша, танцевавший в паре с девушкой в красном костюме?

N48. Пол, Джон и Джордж - музыканты. Один из них гитарист, другой ударник, третий пианист (разумеется, мы отнюдь не утверждаем, что Пол непременно играет на гитаре, Джон на ударных и Джордж на фортепьяно: Пол вполне может быть, например, пианистом, Джордж ударником и т.д.).

а). На запись грампластинки ударник хотел пригласить гитариста, но того не оказалось в городе: он отбыл на гастроли вместе с пианистом.

б). Пианисту платят больше, чем ударнику.

в). Полу платят меньше, чем Джону.

г). Джордж никогда не слышал о Джоне.

На каком инструменте играет каждый из трех музыкантов?

N49. В комнате общежития женского колледжа собрались однажды все четыре обитательницы. Каждая из них занималась своим делом. Одна студентка занялась маникюром, другая расчесывала волосы, третья прихорашивалась перед зеркалом, а четвертая читала.

а). Маша не занималась маникюром и не читала.

б). Муза не прихорашивалась перед зеркалом и не занималась маникюром.

в). Если Маша не прихорашивалась перед зеркалом, то Нина не занималась маникюром.

г). Надя не занималась маникюром и не читала.

д). Нина не читала и не прихорашивалась.

Что делала каждая девушка?

2. Алгебра логики

N1. Мальчик решил в воскресенье закончить чтение книги, сходить в музей или в кино, а если будет хорошая погода - пойти на реку выкупаться. В каком случае можно сказать, что решение мальчика не выполнено? (В ответе отрицания должны содержаться лишь в простых высказываниях).

N2. Доказать полноту следующих систем функций:

1. $x \wedge y$, $\neg x$.
2. $x \vee y$, $\neg x$.
3. $\neg(x \vee y)$, $\neg(x \wedge y)$.
4. $x \to y$, $\neg x$.

N3. Всякая совокупность функций алгебры логики, замкнутая относительно суперпозиции (т.е. такая, что суперпозиция функций из данной совокупности снова принадлежит этой совокупности), называется *замкнутым классом.* Какие из указанных ниже систем функций являются замкнутыми классами:

1. функции от одной переменной;
2. функции от двух переменных;
3. все функции алгебры логики;
4. линейные функции;
5. самодвойственные функции;
6. монотонные функции;
7. монотонно убывающие функции;
8. функции, сохраняющие нуль;
9. функции, сохраняющие единицу;
10. функции, сохраняющие нуль и единицу;
11. функции, сохраняющие нуль, но не сохраняющие единицу.

N4.

1. Доказать, что пересечение замкнутых классов - замкнутый класс.

2. Доказать, что совокупность функций, двойственных функциям из замкнутого класса, образует замкнутый класс.

N5. Является ли объединение замкнутых классов замкнутым классом?

N6. Замкнутые классы, отличные от пустого класса и от совокупности всех функций алгебры логики, называются *собственными замкнутыми классами.* Доказать, что дополнение собственного замкнутого класса (совокупность функций, в него не входящих) не может быть замкнутым классом.

N7. Минимальная полная система функций (т.е. такая полная система функций, удаление из которой любой функции делает систему неполной) называется базисом.

1. Привести пример полной системы, являющейся базисом.

2. Являются ли базисами системы функций, приведенные в задаче **N2**.

N8. Доказать, что для полноты системы функций необходимо и достаточно, чтобы для всякого замкнутого класса, не совпадающего с множеством всех функций, в данной системе нашлась функция, не принадлежащая этому классу.

N9. Доказать, что базис не может содержать более пяти функций.

N10. Доказать, что базис не может содержать более четырех функций.

N11. Доказать, что из всякого базиса можно отождествлением аргументов у входящих в него функций получить базис, в котором все функции зависят не более чем от трех переменных; дальнейшее уменьшение числа переменных, вообще говоря, невозможно.

N12. Если при любом отождествлении переменных у всякой функции базиса мы получаем неполную систему, то базис называется минимальным. Доказать, что имеется лишь конечное число различных минимальных базисов.

N13. Функция алгебры логики, представляющая собой базис из одного элемента, называется обобщенной функцией Шеффера. Сколько имеется обобщенных функций Шеффера от n переменных?

N14. Найти все минимальные базисы из одной функции.

N15. Найти все минимальные базисы из четырех функций.

N16. Будем говорить, что функция f получена из системы Φ при помощи *расширенной суперпозиции*, если она получается из Φ при помощи операций суперпозиции и подстановки констант. Как связаны замкнутые классы относительно обычной и расширенной суперпозиций?

N17. В каждом из нижеследующих случаев найти необходимые и достаточные условия на систему функций Φ алгебры логики, при выполнении которых расширенными суперпозициями функций из системы Φ могут быть представлены:

1. все линейные функции;
2. все монотонные функции;
3. функция $(x \wedge y) \vee (y \wedge z) \vee (x \wedge z)$;
4. функция $\neg x$;
5. всякая линейная функция или функция $x \wedge y$;
6. $x \wedge y$ или $\neg x$;
7. $x \wedge y$ и $\neg x$;
8. $x \wedge y$ или $x \vee y$ или $\neg x$.

N18. Суперпозиция системы функций Φ называется *глобальной*, если она может быть получена из элементов Φ путем последовательного применения операций переименования переменных (и, в частности, их отождествления) и подстановки каких-то функций $\varphi_1, ..., \varphi_n \in \Phi$ вместо всех аргументов некоторой функции $f(x_1, ..., x_n) \in \Phi$. Ограничение состоит в том, что не разрешается подстановка вместо части аргументов функции. Однако, если в системе Φ имеется функция x, то любую суперпозицию можно считать глобальной (так как тогда аргумент y можно оставить неизменным, подставляя вместо него $\varphi(y) = y$). Привести пример системы функций, полной в обычном смысле, но не полной относительно глобальной суперпозиции.

N19. Найти условия полноты системы функций относительно глобальной суперпозиции.

N20. Назовем подстановку функций $\varphi_1, ..., \varphi_n$ вместо нескольких аргументов функции f *сокращающей*, если полученная в результате функция будет фиктивно зависеть от всех аргументов функций $\varphi_1, ..., \varphi_n$. Расширим понятие глобальной суперпозиции, допуская наряду с подстановкой во все аргументы сокращающую подстановку. Выяснить условия полноты относительно этого класса суперпозиций.

3. Логика предикатов

N1. Какие вхождения переменных являются свободными, а какие связанными в следующих формулах:

1. $\forall x(P(x, y) \to \forall y Q(y))$;
2. $(\forall x P(x, y) \to \forall y Q(x, y))$;
3. $\forall x P(x, y) \to \forall y Q(x, y)$;
4. $\forall xy(P(x, y) \to Q(x, y))$;
5. $\forall xy P(x, y) \to Q(x, y)$;
6. $(\neg\exists y Q(y, y) \wedge R(f(x, y)))$?

N2. Пусть $\underline{M} =< \mathbb{N}; S, P >$, где

$$S(x, y, z) = \text{И} \Leftrightarrow x + y = z, P(x, y, z) = \text{И} \Leftrightarrow x \cdot y = z.$$

Записать формулу с одной свободной переменной x, истинную в $\underline{M}$ тогда и только тогда, когда:

1. $x = 0$;

2. $x = 1$;

3. $x = 2$;

4. x четно;

5. x нечетно;

6. x простое число.

N3. Записать формулу с двумя свободными переменными x и y, истинную в $\underline{M}$ из задачи **N2** тогда и только тогда, когда:

1. $x = y$;

2. $x \leq y$;

3. $x < y$;

4. x делит y.

N4. Записать формулу с тремя свободными переменными x, y и z, истинную в $\underline{M}$ из задачи **N2** тогда и только тогда, когда:

1. z - наименьшее общее кратное x и y;

2. z - наибольший общий делитель x и y.

N5. Записать предложение, выражающее в модели $\underline{M}$ из задачи **N2**:

1. коммутативность сложения;

2. ассоциативность сложения;

3. коммутативность умножения;

4. ассоциативность умножения;

5. дистрибутивность сложения относительно умножения;

6. бесконечность множества простых чисел;

7. то, что всякое число есть сумма четырех квадратов;

8. существование наименьшего общего кратного и наибольшего общего делителя для чисел отличных от нуля;

9. несуществование единицы;

10. существование единицы;

11. конечность множества простых чисел;

12. то, что всякое число можно представить в виде суммы двух квадратов;

13. то, что для всякого числа существует строго меньшее число;

14. существование наибольшего натурального числа;

15. существование наименьшего натурального числа;

16. существование пифагоровых троек;

17. существование четного простого числа;

18. то, что всякое четное число, большее 2, есть сумма двух простых;

19. то, что уравнение $3x^2 + 2x + 1 = 0$ имеет в точности два различных корня;

20. то, что система уравнений

$$\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

не имеет решения,

21. гипотезу Гольдбаха-Эйлера: всякое четное число, большее 2, есть сумма двух простых чисел. Истинность или ложность этой гипотезы до сих пор не доказана.

N6. Пусть M - множество точек, прямых и плоскостей трехмерного евклидова пространства со следующими предикатами:

$T(x) = \text{И} \Leftrightarrow x$ - точка,

$L(x) = \text{И} \Leftrightarrow x$ - прямая,

$P(x) = \text{И} \Leftrightarrow x$ - плоскость,

$S(x) = \text{И} \Leftrightarrow x$ лежит на y.

Записать следующие формулы:

1. через каждые две точки можно провести прямую; если эти точки различны, то такая прямая единственна;

2. через каждые три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести единственную плоскость;

3. определение параллельных прямых;

4. определение параллельных плоскостей.

N7. В модели из задачи **N6** записать:

1. аксиому Евклида о параллельных прямых;

2. аксиому Лобачевского о параллельных прямых;

N8. Рассмотрим модели с одним двуместным предикатом $R(x, y)$. Записать, что данный предикат:

1. рефлексивен;

2. симметричен;

3. транзитивен;

4. $R(x, y)$ - отношение эквивалентности.

N9. Записать в сигнатуре $<\leq, =>$ аксиомы:

1. упорядоченного множества с наибольшим и наименьшим элементами;

2. дискретно упорядоченного множества;

3. решетки;

4. дистрибутивной решетки;

5. дедекиндовой решетки;

6. дистрибутивной решетки с относительными дополнениями;

7. булевой алгебры;

8. атомной булевой алгебры;

N10. Записать в подходящей сигнатуре аксиомы:

1. квазигруппы;

2. лупы;

3. полугруппы;

4. коммутативной полугруппы;

5. коммутативной полугруппы с сокращением;

6. группы;

7. абелевой группы;

8. упорядоченной абелевой группы;

9. полной группы;

10. кольца;

11. ассоциативного кольца;

12. коммутативного кольца;

13. кольца Ли;

14. области целостности;

15. тела;

16. поля;

17. алгебраически замкнутого поля;

18. вещественно замкнутого поля.

N11. Используя квантор всеобщности, квантор существования и логические связки, записать следующие высказывания:

1. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$.

2. $\lim\limits_{n \to \infty} x_n \neq a$.

3. Последовательность $\{x_n\}$ не имеет предела.

4. В некотором поезде в каждом вагоне есть свободное место.

5. Все рыбы, кроме акул, добры к детям.

6. Ты можешь обманывать кое-кого все время, ты можешь обманывать всех некоторое время, но ты не можешь обманывать всех все время.

7. Всякий, кто находится в здравом уме, может понять любую теорему Коши. Ни один из потомков Понтия Пилата не понимает все теоремы Коши. Сумасшедшие не допускаются к голосованию. Следовательно, никто из потомков Понтия Пилата не допускается к голосованию.

8. Всякий парикмахер в Старгороде бреет всех тех и только тех, кто не бреется сам. Следовательно, в Старгороде нет ни одного парикмахера.

N12. Будет ли формулой логики предикатов следующее выражение:

$$\forall\varepsilon(\varepsilon > 0 \to \exists\delta(\delta > 0 \wedge (\forall x(x \neq a \wedge |x-a| < \delta \to |f(x)-A| < \varepsilon))))?$$

Указать в нем свободные и связанные переменные, константы, предикаты. Связав свободные переменные, превратить это выражение в математическое утверждение.

N13. Рассмотрим формулу

$$\forall x \exists y \forall z (R(x,y) \wedge (R(x,z) \wedge R(z,y) \to R(z,x) \vee R(y,z)) \wedge R(y,x)).$$

Зафиксируем интерпретацию: предметная область - это $P(M)$, где $M \neq \emptyset, R(x,y) =$И $\Leftrightarrow x \subseteq y$. При каких интерпретациях свободной переменной эта формула истинна?

N14. Доказать, что формула ψ сигнатуры σ выполнима в алгебраической системе $\underline{M} =< M; \sigma >$ тогда и только тогда, когда ψ выполнима в любом обогащении $\underline{M}' =< M; \sigma' >$.

N15. Доказать, что для любого предложения ψ сигнатуры σ, относящегося к алгебраической системе $\underline{M} =< M; \sigma >$, имеем $\underline{M} \models \psi$ или $\underline{M} \models \neg\psi$.

N16. Доказать, что:

1. ψ выполнима тогда и только тогда, когда $\neg\psi$ не тождественно истинна.

2. ψ тождественно истинна тогда и только тогда, когда $\neg\psi$ не выполнима.

N17. Доказать, что бескванторная формула тождественно истинна тогда и только тогда, когда она может быть получена подстановкой из некоторой тождественно истинной формулы исчисления высказываний.

N18. Доказать, что

1. если замкнутая $\forall$-формула истинна в алгебраической системе, то она истинна в любой ее подсистеме.

2. если замкнутая $\exists$-формула истинна в алгебраической системе, то она истинна в любом ее расширении.

3. привести пример формулы ψ и алгебраической системы $\underline{M}$ таких, что $\underline{M} \models \psi$ и ψ ложна в некоторой подсистеме и некотором расширении системы $\underline{M}$.

N19. Выполнимы ли следующие формулы:

1. $\exists x P(x)$;
2. $\forall x P(x)$;
3. $\exists x \forall y (Q(x,x) \wedge \neg Q(x,y))$;
4. $\exists x \exists y (Q(x,x) \wedge \neg Q(x,y))$;
5. $\exists x \forall y (Q(x,y) \to \forall z R(x,y,z))$;
6. $(P(x) \to \forall y P(y))$?

N20. Являются ли тождественно истинными следующие формулы:
1. $(\exists x P(x) \to \forall x P(x))$;
2. $\neg(\exists x P(x) \to \forall x P(x))$;
3. $\exists x \forall y (Q(x,y) \to \forall y \exists x Q(x,y))$;
4. $\forall x \exists y (Q(x,y) \to \exists x y \forall Q(x,y))$?

N21. Доказать, что формула

$$(\forall x \exists y P(x,y) \wedge \forall x \forall y P(x,y) \to \neg P(y,x)) \wedge$$

$$\forall x \forall y \forall z (P(x,y) \to P(y,z) \to P(x,z))))$$

выполнима в некоторой бесконечной модели и ложна во всех конечных.

N22. Записать формулу с одноместными предикатами, выполнимую лишь в моделях, содержащих не менее пяти элементов.

N23. Доказать, что предложение

$$\exists x \forall y (x \alpha y \to (\neg y \alpha x \to (x \alpha x \Leftrightarrow y \alpha y)))$$

истинно в любой не более чем трехэлементной модели.

N24. Докажите, что следующие множества предложений выполнимы:
1. $\exists x P(x), \exists x \neg P(x)$;
2. $\exists x (P(x) \wedge Q(x)), \exists x (P(x) \wedge \neg Q(x))$;
3. $\exists x \exists y (x \neq y \wedge P(x,y))$;
4. $\forall x \forall y (x \neq y \to f(x) \neq f(y)), \exists x (f(x) = x)$;

5. $\forall x \forall y(x \neq y \to f(x) \neq f(y)), \forall x(f(x) \neq x)$;

6. $\forall x \forall y(x \neq y \to f(x) \neq f(y)), \exists y \forall x(f(x) \neq y)$;

7. P - строгий порядок, $\forall x \exists y P(x, y)$;

8. $\cdot$ коммутативна и ассоциативна;

9. $\cdot$ коммутативна и не ассоциативна;

10. $\cdot$ не коммутативна и ассоциативна.

N25. Выясните, какие из множеств предыдущей задачи имеют конечные модели, а какие - нет.

N26. Докажите, что множества предложений из задачи **N24** не являются категоричными.

N27. Докажите, что следующие множества предложений противоречивы:

1. $\forall x \forall y(x \neq y \to f(x) \neq f(y)), \exists y \forall x(f(x) \neq y), \forall x \forall y(x = y)$;

2. P - рефлексивно, P - иррефлексивно;

3. P - строгий порядок, $\forall x \exists y P(x, y), \forall x \forall y \forall z(x = y \vee x = z \vee y = z)$;

4. $\exists y \forall x P(x, y) \to \forall x \exists y \neg P(x, y), \exists y \forall x P(x, y), \forall x \forall y(x = y)$;

5. P - иррефлексивно, $\forall x \exists y P(x, y)$, $\forall x \forall y(x = y)$;

6. $\forall x P(x, x), \neg \forall x \exists y P(x, y)$;

7. P - иррефлексивно, P - транзитивно, $\forall x \exists y P(x, y)$, $\neg \exists x \exists y \exists z(x \neq y \wedge x \neq z \wedge y \neq z)$;

8. $\forall x \forall y(f(x) = f(y) \to x = y), \exists x \exists y(x \neq y \wedge f(x) = f(y))$;

9. P - иррефлексивно, P - транзитивно, $\forall x \exists y P(x, y)$, $\forall x \forall y(x = y)$;

10. $\exists y \forall x(y \neq f(x)), \forall y \exists x(y \neq f(x) \wedge x \neq f(x))$.

N28. Пусть A^+ - свободная полугруппа над алфавитом A, рассматриваемая как алгебра сигнатуры $< \cdot >$. Формульно ли A в A^+?

N29. Формульно ли в A^+ отношение "u - подслово слова v"?

N30. Формульно ли в A^+ множество $A^n \rightleftharpoons \{u \in A^+ | u = a_1...a_n; a_1, ..., a_n \in A\}$ всех слов длины n?

N31. Рассмотреть вопросы задач **N28-N30** для свободного моноида A^*, рассматриваемого как алгебра сигнатуры $< \cdot, 1 >$.

N32. Пусть $\mathcal{T}(X)$ - симметрический моноид над множеством X; его сигнатура $< \cdot, 1 >$. Доказать формульность в $\mathcal{T}(X)$ множества всех константных преобразований, т.е. множества

$$C(X) \rightleftharpoons \{\varphi_x | x \in X \wedge \forall y \in X(\varphi_x(y) = x)\}.$$

N33. Рангом преобразования $\varphi \in \mathcal{T}(X)$ называется мощность образа $Im\varphi = \varphi(X)$. Формульно ли множество всех преобразований из $\mathcal{T}(X)$ данного конечного ранга r?

N34. Пусть $\mathcal{B}(X)$ - симметрическая группа над множеством X; ее сигнатура $< \cdot, ^{-1}, 1 >$. Доказать формульность в $\mathcal{B}(X)$ множества всех транспозиций, т.е. таких преобразований $\varphi \in \mathcal{B}(X)$, что

$$\exists x_1, x_2 \in X(x_1 \neq x_2 \wedge \varphi(x_1) = x_2 \wedge \varphi(x_2) = x_1 \wedge$$
$$\forall y(y \neq x_1 \wedge y \neq x_2 \rightarrow \varphi(y) = y)).$$

N35. Можно ли формулой сигнатуры $< \cdot, 1 >$ охарактеризовать $\mathcal{B}(X)$ в $\mathcal{T}(X)$?

N36. Пусть $\mathbb{R}^{2\times 2}$ - кольцо всех матриц 2-го порядка над полем $\mathbb{R}$; сигнатура $< +, -, 0, \cdot, 1 >$. Будет ли формульно в $\mathbb{R}^{2\times 2}$ множество

1. всех скалярных матриц;
2. всех матричных единиц;
3. всех матриц с нулевым определителем;
4. всех симметрических матриц;
5. всех кососимметрических матриц;

6. всех диагональных матриц;

7. всех матриц, имеющих базис из собственных векторов?

N37. Можно ли различить пары л.у.м. предложением сигнатуры $<\leq>$:

1. $<\omega;\leq>$, $<\mathbb{N};\leq>$;
2. $<\omega;\leq>$, $<\mathbb{Q};\leq>$;
3. $<\omega;\leq>$, $<\mathbb{R};\leq>$;
4. $<\mathbb{Q};\leq>$, $<\mathbb{R};\leq>$;
5. $<\mathbb{R};\leq>$, $<\mathbb{C};\leq>$;
6. $<\mathbb{N};|>$, $<P(\mathbb{N});\subseteq>$;
7. $<P(\mathbb{N});\subseteq>$, $<P(\mathbb{R});\subseteq>$?

N38. Доказать, что если $\overline{\overline{X}} \neq \aleph_0$, то существует предложение α сигнатуры $< \cdot >$ такое, что $\mathcal{T}(\mathbb{N}) \models \alpha$ и $\mathcal{T}(X) \not\models \alpha$.

N39. Доказать, что если $\overline{\overline{X}} \neq \aleph_0$, то существует предложение α сигнатуры $< \cdot, ^{-1}, 1 >$ такое, что $\mathcal{B}(\mathbb{N}) \models \alpha$ и $\mathcal{B}(X) \not\models \alpha$.

N40. Будет ли формульным свойство элемента группы иметь данный порядок?

N41. Построить предложение φ такое, что

1. $\mathcal{T}(X) \models \varphi \Leftrightarrow |X| \geq \aleph_0$;
2. $\mathcal{T}(X) \models \varphi \Leftrightarrow |X| = \aleph_0$;
3. $\mathcal{B}(X) \models \varphi \Leftrightarrow |X| \geq \aleph_0$;
4. $\mathcal{B}(X) \models \varphi \Leftrightarrow |X| = \aleph_0$.

N42. Доказать, что свойство "быть циклом длины 3"формульно в симметрической группе.

N43. Доказать формульность отношений $X \cap Y = Z$, $X \cup Y = Z$, $X = \emptyset$, $X = A$, $X = A \backslash Y$ в модели $< P(A); \subseteq$.

N44. Доказать формульность бесконечной циклической подполугруппы в решетке подполугрупп данной полугруппы.

N45. Записать предложения, выражающие в кольце целых чисел:

1. бесконечность множества простых чисел;

2. несовместность системы $\begin{cases} 3x - y = 0 \\ x + y = 2. \end{cases}$

N46. Доказать, что универсальное предложение с n переменными модельной сигнатуры тождественно истинно тогда и только тогда, когда оно истинно в любой n-элементной модели.

N47. Доказать, что экзистенциальное предложение с n переменными модельной сигнатуры тождественно истинно тогда и только тогда, когда оно истинно в любой одноэлементной модели.

N48. Доказать, что предложение $\forall x_1 ... x_m \exists y_1 ... y_n \psi$, где ψ - бескванторная формула модельной сигнатуры, тождественно истинно тогда и только тогда, когда оно истинно в любой m-элементной модели.

N49. Пусть φ, ψ - универсальное и экзистенциальное предложения сигнатуры σ, $\underline{A} =< A; \sigma >$. Доказать, что если $\underline{A} \models \varphi$, то $\underline{B} \models \varphi$ для любой подсистемы $\underline{B} \leq \underline{A}$, и если $\underline{A} \models \psi$, то $\underline{C} \models \psi$ для любой надсистемы $\underline{C} \geq \underline{A}$.

N50. Существуют ли системы $\underline{A}, \underline{B}, \underline{C}$ сигнатуры σ и σ-предложение φ такие, что $\underline{A} \leq \underline{B} \leq \underline{C}$, $\underline{A} \not\models \varphi, \underline{B} \models \varphi, \underline{C} \not\models \varphi$?

ЧАСТЬ 3. Теория алгоритмов

1. Вычислительные машины

N1. Какую функцию $f(x)$ вычисляет машина T со следующей программой команд:

$$q_1 0 \to q_2 0 R,$$

$$q_1 1 \to q_0 1 S,$$

$$q_2 0 \to q_0 1 S,$$

$$q_2 1 \to q_2 1 R?$$

N2. Пусть машина T имеет следующую программу: $q_1 0 S \to q_0 0 S$. Какие функции $f_1(x), f_2(x_1, x_2), ..., f_n(x_1, ..., x_n), ...$ вычисляет эта машина?

N3. Будем говорить, что машина T *правильно вычисляет* функцию $f(x_1, ..., x_n)$, если выполнены условия:

1. если $< x_1, ..., x_n >\in Dom f$, то машина T перерабатывает $q_1 0 1^{x_1} 0 ... 1^{x_n} 0$ в $q_0 0 1^{f(x_1,...,x_n)} 0 0 ... 0$, при этом не используя преобразования: если слово A пусто, то машинное слово $A q_i a_j B$ перерабатывается в $q_k a_0 a_l B$;

2. если $< x_1, ..., x_n >\notin Dom f$, то машина T, начиная работу со слова $q_1 0 1^{x_1} 0 ... 1^{x_n} 0$, работает бесконечно.

Построить машину Тьюринга, которая правильно вычисляет функцию $f(x) = x + 1$.

N4. Будем говорить, что машина T *вычисляет* функцию $f(x_1, ..., x_n)$, если выполнены условия:

1. если $< x_1, ..., x_n >\in Dom f$, то машина T *останавливается*, т.е. перерабатывает слово $q_1 0 1^{x_1} 0 ... 1^{x_n} 0$ в некоторое слово $A q_0 B$, и при этом слово $A q_0 B$ содержит $f(x_1, ..., x_n)$ вхождений символа 1;

2. если $< x_1, ..., x_n > \notin Dom f$, то машина T, начиная работу со слова $q_1 0 1^{x_1} 0 ... 1^{x_n} 0$, работает бесконечно.

Функция f называется *вычислимой*, если существует машина, которая вычисляет функцию f.

Следующие функции назовем *простейшими*:

$$s^1(x) = x + 1,$$

$$0^1(x) = 0,$$

$$I^n{}_m(x_1, ..., x_n) = x_m \quad (\text{при } 1 \leq m \leq n).$$

Будем говорить, что функция

$$h(x_1, ..., x_n) = g(f_1(x_1, ..., x_n), ..., f_m(x_1, ..., x_n))$$

получается с помощью *оператора суперпозиции* из функций g, f_1, ..., f_m. Скажем, что функция

$$h(x_1, ..., x_n) = g(t_1, ..., t_m)$$

получается с помощью *оператора подстановки* из функций g, f_1, ..., f_k, если $t_i = f_j(x_{j_1}, ..., x_{j_s})$, где x_{j_l} есть переменная из числа $x_1, ..., x_n$, или t_i есть одна из переменных $x_1, ..., x_n$. Скажем, что функция $f(x_1, ..., x_n, y)$ получается из функций $g(x_1, ..., x_n)$ и $h(x_1, ..., x_n, y, z)$ с помощью *оператора примитивной рекурсии*, если она может быть задана *схемой примитивной рекурсии*:

$$\begin{cases} f(x_1, ..., x_n, 0) = g(x_1, ..., x_n), \\ f(x_1, ..., x_n, y + 1) = h(x_1, ..., x_n, y, f(x_1, ..., x_n, y)). \end{cases}$$

Будем говорить, что функция $f(x_1, ..., x_n)$ получается из функции $g(x_1, ..., x_n, y)$ с помощью *оператора минимизации*, если выполнено условие: $f(x_1, ..., x_n)$ определено и равно y тогда и только тогда, когда $g(x_1, ..., x_n, 0)$,..., $g(x_1, ..., x_n, y-1)$ определены и не равны 0, а $g(x_1, ..., x_n, y) = 0$. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *частично рекурсивной*, если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Доказать, что любая вычислимая функция частично рекурсивна.

N5. Доказать, что функция вычислима тогда и только тогда, когда существует машина Тьюринга с внешним алфавитом $\{0, 1\}$, вычисляющая эту функцию.

N6. Пусть G - некоторое семейство n-местных частичных функций. Функцию f назовем *универсальной функцией для* G, если

$$G = \{f(0, x_1, ..., x_n), f(1, x_1, ..., x_n)...\}.$$

Доказать, что существует двуместная частично рекурсивная функция $U(t, x)$, универсальная для семейства всех одноместных частично рекурсивных функций.

N7. Доказать, что существует $(n+1)$-местная частично рекурсивная функция $U^{n+1}(t, x_1, ..., x_n)$, универсальная для семейства всех n-местных частично рекурсивных функций.

N8. Известно, что на ленте записано слово $\underbrace{11...1}_{n}; n \geq 1$.

Постройте машину Тьюринга, которая отыскивала бы левую единицу этого слова (т.е. приходила бы в состояние, при котором обозревалась бы ячейка с самой левой единицей данного слова, и в этом положении остановилась), если в начальный момент головка машины обозревает одну из ячеек с буквой данного слова.

N9. Сконструируйте машину Тьюринга, которая каждое слово в алфавите $A_1 = \{1\}$ перерабатывает в пустое слово.

N10. Сконструируйте машину Тьюринга, которая каждое слово длиной n в алфавите $A_1 = \{1\}$ перерабатывает в слово длиной $n+1$ в том же алфавите A_1.

N11. Дана конечная совокупность единиц, вписанных в ячейки, взятые подряд без пропусков. Постройте машину Тьюринга, которая записывала бы в десятичной системе число этих единиц, т.е. пересчитывала бы набор единиц.

N12. Постройте машину Тьюринга, осуществляющую перевод слова $00\underbrace{11...1}_{x}0$ в слово $0\underbrace{11...1}_{x}00$. Причем в начальной конфигурации машина должна находиться в состоянии q_1 и обозревать первую ячейку, эту же ячейку она должна обозревать и в момент остановки.

N13. Постройте машину Тьюринга, перерабатывающую слово $0\underbrace{11...1}_{x}0$ в это же слово $0\underbrace{11...1}_{x}0$ из стандартного начального положения, причем в момент остановки должна обозреваться крайняя левая ячейка.

N14. Постройте машину Тьюринга, которая перерабатывает слово $0\underbrace{11...1}_{x}0\underbrace{11...1}_{y}0$ в слово $0\underbrace{11...1}_{y}0\underbrace{11...1}_{x}0$, причем в начальном и конечном положении обозревается ячейка, содержащая 0, между двумя наборами единиц.

N15. Постройте машину Тьюринга, которая перерабатывает слово $0\underbrace{11...1}_{x}0$ в слово $0\underbrace{11...1}_{x}0\underbrace{11...1}_{x}0$, причем в начальном и конечном положении обозревается крайняя левая ячейка.

N16. Постройте машину Тьюринга, которая перерабатывает слово $0\underbrace{11...1}_{x}0\underbrace{11...1}_{y}0\underbrace{11...1}_{z}0$ в слово $0\underbrace{11...1}_{z}0\underbrace{11...1}_{x}0\underbrace{11...1}_{y}0$, причем в начальном положении обозревается ячейка с 0 между наборами из y и z единиц, а в конечном положении обозревается ячейка с 0 между наборами из z и x единиц.

N17. Сконструируйте машину Тьюринга, обладающую следующим свойством:

1. машина не применима ни к какому непустому слову,

т.е. применение машины к любому непустому слову приводит к тому, что машина никогда не останавливается;

2. машина применима к произвольному непустому слову, т.е. любое непустое слово перерабатывается машиной в некоторое слово (в результате машина останавливается, т.е. приходит в состояние q_0);

3. машина применима только к словам вида $\underbrace{11...1}_{3n}, n \geq 1$;

4. машина применима только к словам вида $\underbrace{11...1}_{n} a0 \underbrace{11...1}_{m}$, $n \geq 1, m \geq 1$.

N18. Докажите, что следующие функции вычислимы по Тьюрингу, построив соответствующие машины Тьюринга:

1. $f_3(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ делится на } 3\ , \\ 1, \text{ если } x \text{ не делится на } 3\ ; \end{cases}$

2. $f_p(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \text{ делится на } p\ , \\ 1, \text{ если } x \text{ не делится на } p. \end{cases}$

N19. Докажите, что если функции $f(z_1, z_2, z_3)$, $g_1(x, y)$, $g_2(x, y)$, $g_3(x, y)$ вычислимы по Тьюрингу, то и сложная функция

$$h(x, y) = f(g_1(x, y), g_2(x, y), g_3(x, y))$$

вычислима по Тьюрингу.

N20. По программе машины Тьюринга найдите формульное выражение функции $f(x)$, вычисляемой этой машиной:

	q_1	q_2	q_3
0	$q_2 1L$	$q_3 1R$	$q_0 0S$
1	$q_1 1R$	$q_2 1L$	$q_0 1S$

N21. По программе машины Тьюринга найдите формульное выражение функции $f(x, y)$, вычисляемой этой машиной:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$q_2 0R$	$q_1 0L$	$q_4 0L$	$q_4 0L$	$q_6 0R$	$q_0 0S$
1	$q_1 1R$	$q_3 0R$	$q_3 0R$	$q_5 1L$	$q_5 1L$	$q_0 1S$

N22. Выяснить, применима ли машина Тьюринга T, задаваемая программой P к слову W. Если применима, то найти результат применения машины T к слову W. Предполагается, что в начальный момент головка машины обозревает самую левую единицу на ленте:

$$1.P : \begin{cases} q_1 0 \to q_2 0R \\ q_1 1 \to q_1 1R \\ q_2 0 \to q_3 0R \\ q_2 1 \to q_1 1L \\ q_3 0 \to q_0 0S \\ q_3 1 \to q_2 1R \end{cases}$$

a). $w = 1110011$, b). $w = 1110111$, c). $w = 1001011$.

$$2.P : \begin{cases} q_1 0 \to q_2 1R \\ q_1 1 \to q_3 0R \\ q_2 0 \to q_3 1R \\ q_2 1 \to q_2 1S \\ q_3 1 \to q_1 1R \end{cases}$$

a). $w = 111101$, b). $w = 111011$, c). $w = 111111$.

$$3.P : \begin{cases} q_1 0 \to q_1 1R \\ q_1 1 \to q_2 0R \\ q_2 0 \to q_1 1R \\ q_2 1 \to q_3 1L \\ q_3 1 \to q_1 1L \end{cases}$$

a). $w = 1011$, b). $w = 11001$, c). $w = 10101$.

N23. Построить машину Тьюринга, обладающую следующим свойством:

1. машина не применима ни к какому слову, и зона работы на каждом слове - бесконечная, т.е. в процессе работы машины появляются машинные слова сколь угодно большой длины;

2. машина не применима ни к какому слову в алфавите

$\{0,1\}$, и зона работы на любом слове ограничена одним и тем же числом ячеек, не зависящим от выбранного слова;

3. машина применима к словам вида $\underbrace{11...1}_{n}0\underbrace{11...1}_{n}$, где $n \geq 1$, и не применима к словам $\underbrace{11...1}_{n}0\underbrace{11...1}_{m}$, где $n \geq 1$, $m \geq 1$ и $n \neq m$.

N24. По заданной машине Тьюринга T и начальной конфигурации K найти заключительную конфигурацию, если она существует:

1. T:

	q_1	q_2
0	$q_0 1$	$q_1 0R$
1	$q_2 0R$	$q_2 1L$

a). $K = 11q_1 11101$, b). $K = 1q_1 1111$.

2. T:

	q_1	q_2	q_3
0	$q_0 0$	$q_0 1L$	$q_1 1L$
1	$q_2 1R$	$q_3 0R$	$q_1 0R$

a). $K = 1q_1 11111$, b). $K = q_1 11101$, c). $K = 10q_1 1111$.

N25. Построить машину Тьюринга, переводящую конфигурацию K_1 в конфигурацию K_0.

1. $K_1 = q_1\underbrace{11...1}_{n}, K_0 = q_0\underbrace{11...1}_{n}0\underbrace{11...1}_{n}(n \geq 1)$;

2. $K_1 = q_1\underbrace{00...0}_{n}\underbrace{11...1}_{n}, K_0 = q_0\underbrace{0101...01}_{n}(n \geq 1)$;

3. $K_1 = \underbrace{11...1}_{n}q_1 0, K_0 = q_0\underbrace{11...1}_{2n}(n \geq 1)$;

4. $K_1 = \underbrace{11...1}_{n}q_1 0\underbrace{11...1}_{m}, K_0 = \underbrace{11...1}_{2m}q_0 0\underbrace{11...1}_{n}(m \geq 1, n \geq 1)$.

N26. Показать, что для всякой машины Тьюринга T существует счетное количество эквивалентных ей машин $T_1, T_2, ..., T_m, ...$, отличающихся друг от друга своими программами.

N27. Какие одноместные функции вычисляются всеми такими машинами Тьюринга, программы которых содержат лишь по одной команде?

N28. Пусть M - счетное множество каких-то вычислимых функций и $T(M)$ - такое минимально возможное множество машин Тьюринга, что для всякой функции f из M существует машина в множестве $T(M)$, вычисляющая функцию f.

1. Показать, что если для некоторого $n \geq 1$ в множестве M существует бесконечное подмножество, состоящее из n-местных функций, то в $T(M)$ найдется машина со сколь угодно большим числом состояний (т.е. для всякого $l_0 \geq 1$ можно указать в $T(M)$ машину с числом состояний, большим l_0).

2. Каково необходимое и достаточное условие конечности множества $T(M)$?

N29. По словесному описанию машин $T_1, T_2, ..., T_9$ построить их программы.

T_1 - машина, начав работу с последней единицы массива из единиц, "сдвигает"его на одну ячейку влево (не изменяя "остального содержимого"ленты); головка останавливается на первой единице "перенесенного"массива;

T_2 - при заданном $l \geq 1$ головка машины, начав работу с произвольной ячейки, содержащей единицу, движется вправо до тех пор, пока не пройдет массив из $l+1$ нулей; головка останавливается в первой ячейке за этим массивом, напечатав в ней 1;

T_3 - при заданном $l \geq 1$ головка машины, начав работу с какой-то ячейки и двигаясь вправо, ставит подряд l единиц и останавливается на последней из них;

T_4 - машина начинает работу с самой левой ячейки с 1, при заданном $l \geq 1$ "отыскивается"первый слева массив из $l+1$ нулей и головка останавливается на последнем из этих нулей;

T_5 - начав работу с самой левой ячейки с 1, машина отыскивает единицу, примыкающую с левой стороны к первому слева массиву из трех нулей, "окаймленному"единицами; головка останавливается на найденной единице ("содержимое исходного куска ленты"не меняется);

T_6 - в исходной ячейке печатается 0 и головка, сдвинувшись на одну ячейку влево, останавливается ("содержимое исходного куска ленты"не меняется);

T_7 - головка сдвигается на две ячейки вправо от "начальной"ячейки, и машина останавливается в состоянии q_9, если новая ячейка содержит символ 0, и в состоянии q_10, если в "новой"ячейке - 1 (содержимое ленты остается прежним);

T_8 - головка передвигается на одну ячейку влево (после чего машина останавливается; на ленте никаких изменений не происходит);

T_9 - головка, начав двигаться вправо от какой-то "начальной"ячейки, "находит"первую (при таком перемещении) единицу и, сделав еще один шаг, останавливается на ячейке, расположенной справа от "найденной"единицы (содержимое ленты не меняется).

N30. Стандартная машина Тьюринга с внешним алфавитом $\{0, 1\}$ называется нестирающей, если она способна выполнять лишь предписания вида

$$q_\alpha 0 \to q_\beta 0S,$$

$$q_\alpha 0 \to q_\beta 0L,$$

$$q_\alpha 0 \to q_\beta 0R,$$

$$q_\alpha 0 \to q_\beta 1S,$$

$$q_\alpha 0 \to q_\beta 1L,$$

$$q_\alpha 0 \to q_\beta 1R,$$

$$q_\alpha 1 \to q_\beta 1S,$$

$$q_\alpha 1 \to q_\beta 1L,$$

$$q_\alpha 1 \to q_\beta 1R,$$

т.е. если она может вписать 1 в ячейку с 0, но не может удалить символ 1, если он уже вписан в ячейку. Показать, что при подходящем кодировании чисел любая частично рекурсивная функция вычислима на подходящей нестирающей машине. В частности, существуют универсальные нестирающие машины.

N31. Показать, что машина Тьюринга, имеющая лишь одно внутреннее состояние, отличное от заключительного, не может быть универсальной.

N32. Показать, что существует универсальная машина Тьюринга, имеющая лишь одно внутреннее состояние, отличное от заключительного.

2. Рекурсивные функции

N1. Функция $f(x_1, ..., x_n)$ называется *примитивно рекурсивной*, если она может быть получена из простейших функций с помощью конечного числа применений операторов суперпозиции и примитивной рекурсии. (см. **N4** из пункта 1). Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

1. $f(x) = x + n$;
2. $f(x) = n$;
3. $f(x, y) = x + y$;
4. $f(x, y) = x \cdot y$;
5. $f(x, y) = x^y$ (здесь $0^0 = 1$);
6. $f(x) = x!$ (здесь $0! = 1$);

7. $\left[\frac{x}{y}\right]$ - частное от деления x на y (здесь $\left[\frac{x}{0}\right] = x$);

8. $rest(x, y)$ - остаток от деления x на y (здесь $rest(x, 0) = x$);

9. $\tau(x)$ - число делителей числа x, где $\tau(0) = 0$;

10. $\sigma(x)$ - сумма делителей числа x, где $\sigma(0) = 0$;

11. $lh(x)$ - число простых делителей числа x, где $lh(0) = 0$;

12. $\pi(x)$ - число простых чисел, не превосходящих x;

13. $k(x, y)$ - наименьшее общее кратное чисел x и y, где $k(x, 0) = k(0, y) = 0$;

14. $d(x, y)$ - наибольший общий делитель чисел x и y, где $d(0, 0) = 0$;

15. $p(x)$ - x-е простое число $(p(0) = 2, p(1) = 3, p(2) = 5, ...)$;

16. $long(x)$ - номер наибольшего простого делителя числа x;

17. $ex(x, y)$ - показатель степени x-го простого числа $p(x)$ в каноническом разложении на простые множители числа y, где $ex(x, 0) = 0$;

18. $[\sqrt{x}]$;

19. $[x\sqrt{2}]$;

20. $[e \cdot x]$;

21. $[e^x]$;

22. $[\sqrt[y]{x}]$, где $[\sqrt[0]{x}] = x$.

N2. Пусть $c(x, y) = \frac{(x+y)^2+3x+y}{2}$ - *канторовская нумерующая функция.* Для каждого $n \geq 1$ определим функции

$$c^1(x_1) = x_1,$$

$$c^{n+1}(x_1, x_2, x_3, ..., x_{n+1}) = c^n(c(x_1, x_2), x_3, ..., x_{n+1}).$$

Пусть $c_{ni}(1 \leq i \leq n)$ таковы, что $c^n(c_{n1}(x), ..., c_{nn}(x)) = x$.

1. Доказать, что функция $c(x, y)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{N}^2$ и $\mathbb{N}$ (нумерует пары натуральных чисел).

2. Пусть $l(x)$ и $r(x)$ таковы, что

$$c(l(x), r(x)) = x.$$

Доказать, что $l(x)$ и $r(x)$ примитивно рекурсивны и $l(c(x, y)) = x, r(c(x, y)) = y$.

3. Доказать тождества

$$c_{ni}(c^n(x_1, ..., x_n)) = x_i \quad \text{для} \quad 1 \le i \le n.$$

4. Доказать, что функции c^n и c_{ni} примитивно рекурсивны.

5. Доказать, что функции $c^n(x_1, ..., x_n)$ осуществляет взаимно однозначное соответствие между $\mathbb{N}^n$ и $\mathbb{N}$ (нумерует кортежи натуральных чисел длины n).

N3. Каким образом из одноместных частично рекурсивных функций и функций $c^n(x_1, ..., x_n)$ получить все частично рекурсивные функции?

N4. Рассмотрим следующую *функцию Геделя*:

$$\beta(x, y, z) = rest(x, 1 + y(z + 1)).$$

Доказать, что, какова бы ни была конечная последовательность натуральных чисел $a_0, ..., a_n$, система уравнений

$$\begin{cases} \beta(x, y, 0) = a_0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \beta(x, y, n) = a_n \end{cases}$$

имеет по мельшей мере одно решение x, y.

N5. Доказать, что функция, перечисляющая по порядку числа Фибоначчи:

$$\begin{cases} f(0) = 0, f(1) = 1\ , \\ f(n + 2) = f(n) + f(n + 1), \end{cases}$$

примитивно рекурсивна.

N6. Пусть функции f и g определены следующим образом:

$$\begin{cases} f(0) = a, g(0) = b\ , \\ f(x+1) = h_1(x, f(x), g(x)), \\ g(x+1) = h_2(x, f(x), g(x)). \end{cases}$$

Доказать, что если функции h_1 и h_2 примитивно рекурсивны, то функции f и g примитивно рекурсивны.

N7. Доказать, что следующие функции частично рекурсивны:

1. *нигде не определенная функция*, т.е. функция с пустой областью определения;

2. $f(x,y) \begin{cases} = x - y, \text{ если } x \geq y, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

3. $f(x,y) \begin{cases} = \frac{x}{y}, \text{ если } y \text{ делит } x, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

4. $f(x,y) \begin{cases} = z, \text{ если } z^y = x, \\ \text{не определена в остальных случаях;} \end{cases}$

5. функция, определенная в конечном числе точек.

N8. Доказать, что не существует примитивно рекурсивной функции, универсальной для семейства всех n-местных примитивно рекурсивных функций.

N9. Функция называется *общерекурсивной*, если она частично рекурсивна и всюду определена. Доказать, что не существует частично рекурсивной функции, универсальной для семейства всех n-местных общерекурсивных функций.

N10. Рассмотрим следующие *функции Аккермана*:

$$B(0, y) = 2 + y;$$

$$B(x+1, 0) = \begin{cases} 0, \text{ если } x = 0, \\ 1, \text{ если } x > 0; \end{cases}$$

$$B(x+1, y+1) = B(x, B(x+1, y));$$

$$A(x) = B(x, x).$$

Назовем всюду определенную функцию $f(x_1, ..., x_n)$ B-*мажорируемой*, если существует натуральное число m такое, что

$$f(x_1, ..., x_n) < B(m, max(x_1, ..., x_n) + 3).$$

Доказать, что:

1. $B(x, y)$ и $A(x)$ общерекурсивны;
2. $B(n + 2, x + 1) \geq 2^{x+1}$;
3. $B(n + 1, x + 2) \geq B(n + 1, x + 1)$;
4. $B(n + 2, x + 3) \geq B(n + 1, x + 4)$;
5. функция, полученная с помощью суперпозиции из B-мажорируемых функций, B-мажорируема;
6. функция A не является примитивно рекурсивной.

N11. Показать, что если функции $g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x)$ примитивно рекурсивны, то функция

$$f(x, y) = \begin{cases} g_2(x), \text{ если } g_1(y) \leq a, \\ g_3(x), \text{ если } a < g_1(y) \leq b, \\ g_3(x), \text{ если } g_1(x) > b, \end{cases}$$

где $0 \leq a \leq b$, также примитивно рекурсивна.

N12. Пусть $g_1(y), g_2(x), g_3(x, y)$ - примитивно рекурсивные функции. Доказать, что тогда примитивно рекурсивна и функция $f(x, y)$, определяемая следующей схемой:

$$\begin{cases} f(0, y) = g_1(y), \\ f(x + 1, 0) = g_2(x), \\ f(x + 1, y + 1) = g_3(x, y) \end{cases}$$

(здесь $x \geq 0$ и $y \geq 0$).

N13. Пусть функции $g(x_1, ..., x_{n-1}, x_n), h_1(x_1, ..., x_{n-1}, x_n), h_2(x_1, ..., x_{n-1}, x_n), n \geq 1$, примитивно рекурсивны. Доказать, что тогда примитивно рекурсивны и следующие функции:

1. $f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = \sum\limits_{i=0}^{x_n} g(x_1, ..., x_{n-1}, i);$

2. $f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = \prod\limits_{i=0}^{x_n} g(x_1, ..., x_{n-1}, i);$

3. $f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} \sum\limits_{i=y}^{z} g(x_1, ..., x_{n-1}, i) \text{ при } y \le z, \\ 0 \text{ при } y > z; \end{cases}$

4. $f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = \begin{cases} \prod\limits_{i=y}^{z} g(x_1, ..., x_{n-1}, i) \text{ при } y \le z, \\ 1 \text{ при } y > z; \end{cases}$

5. $f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = \sum\limits_{i=h_1(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)}^{h_2(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)} g(x_1, ..., x_{n-1}, i)$

(здесь считается, что если верхний предел суммирования меньше нижнего, то сумма равна 0);

6. $f(x_1, ..., x_{n-1}, x_n) = \prod\limits_{i=h_1(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)}^{h_2(x_1, ..., x_{n-1}, x_n)} g(x_1, ..., x_{n-1}, i)$

(здесь считается, что если верхний предел у произведения меньше нижнего, то произведение полагается равным 1).

N14. Пусть функция $f(x)$ общерекурсивна, но не примитивно рекурсивна. Всегда ли справедливы следующие соотношения:

1. $f(2x)$ - не является примитивно рекурсивной;

2. $f(x+y)$ - примитивно рекурсивна.

N15. Пусть функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ общерекурсивны, но не примитивно рекурсивны. Могут ли быть верными следующие утверждения:

1. $f_1(f_2(x))$ - примитивно рекурсивна, но $f_2(f_1(x))$ - не является примитивно рекурсивной;

2. $f_1(x^2)$ - примитивно рекурсивна, но $[\sqrt{f_1(x^2)}]$ - не является примитивно рекурсивной;

3. $f_1(x) + f_2(x)$ - примитивно рекурсивна, но $f_1(x) + 2f_2(x)$ - не является примитивно рекурсивной.

N16. Известно, что $f(x)$ - общерекурсивная функция и что $f(2x+1) = f(x)$ и $f(2x) = f(x+1)$ при всех $x \geq 0$. Верно ли, что $f(x)$ - примитивно рекурсивна?

N17. Доказать, что функция, универсальная для одноместных примитивно рекурсивных функций

1. принимает все значения;
2. принимает каждое значение бесконечное число раз.

N18. Привести пример частичной числовой функции, принимающей ровно одно значение и не являющейся частично рекурсивной.

N19. Пусть $u(x_0, x_1, ..., x_n)$ - частично рекурсивная функция, универсальная для некоторого непустого подмножества M множества всех общерекурсивных функций, такого что множество $\{g | g$ - общерекурсивная функция и $g \notin M\}$ бесконечно. Построить счетное множество общерекурсивных функций, не принадлежащих M.

N20. Показать, что если функция $f(x)$ частично рекурсивна, то и всякая функция, отличающаяся от $f(x)$ на конечном множестве значений аргумента, являятся частично рекурсивной.

N21. Пусть $U(x, y)$ - функция, универсальная для множества всех одноместных частично рекурсивных функций. Доказать, что функция $f(x) = U(x, x) + 1$ не имеет рекурсивных доопределений (иными словами, всякая всюду определенная функция, совпадающая с $f(x)$ везде, где $f(x)$ определена, а в остальном произвольная, не является частично рекурсивной).

3. Рекурсивные и рекурсивно перечислимые множества

N1. Предикат называется *примитивно рекурсивным*, если его характеристическая функция примитивно рекурсивна. Доказать, что следующие предикаты примитивно рекурсивны:

1. $x = y$;
2. $x + y = z$;
3. $x \cdot y = z$;
4. x делит y;
5. x четно;
6. x и y взаимно просты;
7. $\exists n x = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$;
8. $\exists n x = 1 + 2 + ... + n$.

N2. Доказать, что если предикаты $P(x_1, ..., x_n)$ и $Q(x_1, ..., x_n)$ рекурсивны (примитивно рекурсивны), то следующие предикаты также рекурсивны (примитивно рекурсивны):

1. $P(x_1, ..., x_n) \wedge Q(x_1, ..., x_n)$;
2. $P(x_1, ..., x_n) \vee Q(x_1, ..., x_n)$;
3. $P(x_1, ..., x_n) \to Q(x_1, ..., x_n)$;
4. $\neg P(x_1, ..., x_n)$;
5. $P(x_1, x_1, x_3, ..., x_n)$;
6. $P(f(x_1, ..., x_m), x_{m+1}, ..., x_{m+n-1})$, если $f(x_1, ..., x_m)$ - общерекурсивная (примитивно рекурсивная) функция.

N3. Доказать, что если предикат $R(x_1, ..., x_n, y)$ рекурсивен (примитивно рекурсивен), то предикаты $\exists y\, y \leq z \wedge R(x_1, ..., x_n, y)$ и $\forall y\, y \leq z \to R(x_1, ..., x_n, y)$ также рекурсивны (примитивно рекурсивны).

N4. Доказать, что если предикат $R(x_1, ..., x_n, y, z)$ примитивно рекурсивен, то $M = \{< x_1, ..., x_n > | \exists y \exists z R(x_1, ..., x_n, y, z)\}$ - рекурсивно перечислимое множество.

N5. Доказать, что существует множество, не являющееся рекурсивно перечислимым.

N6. Доказать, что любое конечное множество натуральных чисел примитивно рекурсивно.

N7. Показать, что множество n-ок рекурсивно (примитивно рекурсивно) тогда и только тогда, когда его характеристическая функция общерекурсивна (примитивно рекурсивна).

N8. Доказать, что если f - общерекурсивная (примитивно рекурсивная) функция и a - фиксированное число, то множество решений уравнения $f(x_1, ..., x_n) = a$ рекурсивно (примитивно рекурсивно).

N9. Пусть функция f частично рекурсивна, но не общерекурсивна. Доказать, что область определения функции f^{-1} примитивно рекурсивна.

N10. Доказать, что если множества A и B рекурсивны (примитивно рекурсивны), то множества $A \cap B$, $A \cup B$, $\mathbb{N} \setminus A$ также рекурсивны (примитивно рекурсивны).

N11. Доказать, что если множества A и B рекурсивно перечислимы, то множества $A \cap B$, $A \cup B$ рекурсивно перечислимы.

N12. Доказать, что всякое примитивно рекурсивное множество рекурсивно перечислимо.

N13. Пусть множества A и B отличаются конечным числом элементов. Доказать, что:

1. если A рекурсивно, то B рекурсивно;

2. если A рекурсивно перечислимо, то B рекурсивно перечислимо.

N14. Доказать, что если A и его дополнение $\mathbb{N} \setminus A$ рекурсивно перечислимы, то A рекурсивно (*Теорема Поста.*)

N15. Пусть $M \subseteq \mathbb{N}^n$. Положим $c^n(M) = \{c^n(x_1, ..., x_n) | < x_1, ..., x_n > \in M\}$, где c^n определена в задаче **N2** параграфа 2. Доказать, что:

1. M примитивно рекурсивно тогда и только тогда, когда $c^n(M)$ примитивно рекурсивно;

2. M рекурсивно тогда и только тогда, когда $c^n(M)$ рекурсивно;

3. M рекурсивно перечислимо тогда и только тогда, когда $c^n(M)$ рекурсивно перечислимо.

N16. Пусть $M \subseteq \mathbb{N}$ - непустое множество. Доказать, что множество M рекурсивно перечислимо тогда и только тогда, когда существует примитивно рекурсивная функция $\alpha(x)$ такая, что $M = \{\alpha(x) | x \in \mathbb{N}\}$.

N17. Пусть M - непустое множество n-ок. Доказать, что множество M рекурсивно перечислимо тогда и только тогда, когда существуют одноместные примитивно рекурсивные функции α_1, ..., α_n такие, что $M = \{< \alpha_1(x), ..., \alpha_n(x) > | x \in \mathbb{N}\}$.

N18. Пусть общерекурсивная функция $f(x)$ удовлетворяет условию: $f(x) \geq x$ для всех $x \in \mathbb{N}$. Доказать, что область значений Imf функции f рекурсивна.

N19. Доказать, что бесконечное множество A рекурсивно тогда и только тогда, когда A есть множество значений строго возрастающей общерекурсивной функции.

N20. Доказать, что непустое множество A рекурсивно тогда и только тогда, когда A есть множество значений монотонно (не обязательно строго) возрастающей общерекурсивной функции.

N21. Доказать, что каждое бесконечное рекурсивно перечислимое множество содержит бесконечное рекурсивное подмножество.

N22. Доказать, что полный прообраз рекурсивного множества относительно общерекурсивной функции рекурсивен.

N23. Пусть A - рекурсивное множество, f - общерекурсивная функция с $Imf = \mathbb{N}$, $f(A) \cap f(\mathbb{N} \backslash A) = \emptyset$. Доказать, что $f(A)$ рекурсивно.

N24. Пусть A, B - рекурсивно перечислимые множества, а C - рекурсивное множество такие, что $A \cap B = \emptyset, A \subseteq C \subseteq A \cup B$. Доказать, что A рекурсивно.

N25. Пусть A, B - рекурсивно перечислимые множества. Доказать, что существуют рекурсивно перечислимые множества $A_1 \subseteq A, B_1 \subseteq B$ такие, что $A_1 \cap B_1 = \emptyset, A_1 \cup B_1 = A \cup B$.

N26. Доказать, что область определения частично рекурсивной функции есть рекурсивно перечислимое множество.

N27. Доказать, что множество значений частично рекурсивной функции рекурсивно перечислимо.

N28. Доказать, что любое рекурсивное множество рекурсивно перечислимо.

N29. Доказать, что множество n-ок рекурсивно перечислимо тогда и только тогда, когда его частичная характеристическая функция частично рекурсивна.

N30. Доказать, что:

1. образ рекурсивно перечислимого множества относительно частично рекурсивной функции рекурсивно перечислим;

2. полный прообраз рекурсивно перечислимого множества относительно частично рекурсивной функции рекурсивно перечислим.

N31. Доказать, что множество A решений уравнения

$$f(x_1, ..., x_n) = a$$

рекурсивно перечислимо, если f - частично рекурсивная n-местная функция.

N32. Доказать, что если f^{n+1} - частично рекурсивная функция, то множество $M = \{< x_1, ..., x_n > | \exists y\, f(x_1, ..., x_n, y) = 0\}$ рекурсивно перечислимо.

N33. Пусть $M_1, ..., M_k$ - попарно непересекающиеся рекурсивно перечислимые множества n-ок, $f_1, ..., f_k$ - частично рекурсивные n-местные функции. Доказать, что функция $g(x_1, ..., x_n)$, определенная следующим образом:

$$g(x_1,...,x_n)=\begin{cases} f_1(x_1,...,x_n), \text{ если } < x_1,...,x_n >\in M_1, \\ \text{...........................} \\ f_k(x_1,...,x_n), \text{ если } < x_1,...,x_n >\in M_k, \\ \text{не определена в остальных случаях,} \end{cases}$$
частично рекурсивна.

N34. Доказать, что если область определения частично рекурсивной функции f^n есть рекурсивное множество, то f^n имеет рекурсивное доопределение.

N35. Доказать, что если $V(n,x)$ есть частично рекурсивная функция, универсальная для класса всех одноместных частично рекурсивных функций, то множество $M = \{x|V(x,x) = 0\}$ рекурсивно перечислимо, но не рекурсивно.

N36. Найти частично рекурсивную функцию $f(x)$, не имеющую общерекурсивного доопределения.

N37. Доказать, что если $V(n,x)$ есть частично рекурсивная функция, универсальная для класса всех одноместных примитивно рекурсивных функций, то множество $G = \{n|V(n,x)$ - общерекурсивная функция $\}$ не является рекурсивно перечислимым.

3. Алгоритмические проблемы

N1. Доказать, что если теория $\exists\wedge\mathbb{Z}$ сигнатуры $<+,\cdot,0,1>$ неразрешима, то неразрешимы и теории

1. $\exists\mathbb{Z}$ сигнатуры $<+,\cdot,0,1>$;
2. $\forall\neg\mathbb{Z}$ сигнатуры $<+,\cdot,0,1>$;
3. $\forall\exists\mathbb{Z}$ сигнатуры $<+,\cdot>$;
4. $\exists\forall\mathbb{Z}$ сигнатуры $<+,\cdot>$;
5. $\exists\neg\wedge\mathbb{Z}$ сигнатуры $<+,\cdot>$;
6. $\forall\neg\vee\mathbb{Z}$ сигнатуры $<+,\cdot>$;

N2. Пусть $F_\infty\mathfrak{A}$ - свободное ассоциативное кольцо счетного ранга. Доказать, что если теория $\exists F_\infty\mathfrak{A}$ сигнатуры

$< +, \cdot, 0, a_1, a_2, ..., a_n, ... | \{a_1, a_2, ..., a_n, ...\} -$ множество свободных образующих кольца $F_\infty \mathfrak{A} >$ неразрешима, то неразрешимы и теории

1. $\forall\exists F_\infty \mathfrak{A}$ сигнатуры $< +, \cdot >$;

2. $\exists\forall\neg F_\infty \mathfrak{A}$ сигнатуры $< +, \cdot >$.

N3. Пусть $F_k \mathfrak{A}$ - свободное ассоциативное кольцо ранга k. Показать, что при $m \neq n$ $F_m \mathfrak{A}$ и $F_n \mathfrak{A}$ не являются элементарно эквивалентными в сигнатуре $< +, \cdot >$.

N4. Пусть $\mathfrak{A}$ - многообразие всех ассоциативных колец. Показать, что теория $\exists\neg \wedge \vee \mathfrak{A}$ сигнатуры $< +, \cdot >$ разрешима.

N5. Доказать разрешимость теории $\exists\forall\neg\wedge\mathfrak{A}$ сигнатуры $< +, \cdot >$.

N6. Интерпретацией машины Тьюринга показать существование двупорожденной полугруппы с неразрешимой проблемой равенства слов.

N7. Доказать неразрешимость проблемы равенства слов в многообразии всех альтернативных колец.

N8. Пусть системы $\underline{A}$ и $\underline{B}$ таковы, что $\underline{A} < \underline{B}$. Что можно сказать про элементарные теории $\mathcal{E}\underline{A}$ и $\mathcal{E}\underline{B}$?

N9. Доказать, что универсальные теории класса всех полугрупп и класса всех симметрических полугрупп совпадают. Верно ли это для групп?

N10. Верно ли, что любая бесконечная алгебраическая система не более чем счетной сигнатуры имеет элементарно эквивалентную счетную подмодель?

N11. Будут ли элементарно эквивалентны

1. полугруппы $S_1 =< a, b | aba = b >, S_2 =< a, b | aba = a >$ в сигнатуре $< \cdot >$;

2. моноиды $M_1 =< a, b | aba = b >, M_2 =< a, b | aba = a >$ в сигнатуре $< \cdot, 1 >$?

N12. Будут ли элементарно эквивалентны два конечномерных векторных пространства разных размерностей над полем P в сигнатуре $< *, \xi >$, где $*$ - операция умножения на скаляр, ξ - одноместный предикат, истинный лишь на элементах из P?

N13. Очевидно, что если для классов $\mathcal{K}_1$, $\mathcal{K}_2$ одной сигнатуры выполнено строгое включение $\mathcal{K}_1 \subset \mathcal{K}_2$, то $\mathcal{E}\mathcal{K}_1 \supseteq \mathcal{E}\mathcal{K}_2$. Привести примеры, показывающие, что последнее включение может быть строгим, а может быть и равенством.

N14. Будут ли элементарно эквивалентны группы $< \mathbb{Q}; + >, < \mathbb{Z}; + >$?

N15. Будет ли класс конечных моделей теории расчлененного предиката относительно элементарно определим в моноиде $\{a, b\}^*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Г.П.Гаврилов, А.А.Сапоженко. Сборник задач по дискретной математике. М. "Наука". 1977.

2. М.Гарднер. Есть идея! М. "Мир". 1982.

3. С.Г.Гиндикин. Алгебра логики в задачах. М. "Наука". 1972.

4. Задачи по теории множеств и математической логике/ Составитель Ю.М.Важенин. Екатеринбург: Изд-во Урал.ун-та, 1993.

5. В.И.Игошин. Задачник-практикум по математической логике. М. "Просвещение". 1986.

6. Избранные задачи по математике. Выпуск 21. Методические разработки для учащихся ВЗМШ. Москва. 1991.

7. Избранные задачи по математике. Выпуск 22. Методические разработки для учащихся ВЗМШ. Москва. 1992.

8. Л.Я.Куликов, А.И.Москаленко, А.А.Фомин. Сборник задач по алгебре и теории чисел. М. "Просвещение". 1993.

9. И.А.Лавров, Л.Л.Максимова. Задачи по теории множеств, математической логике и теории алгоритмов. М. "Наука". 1984.

10. А.И.Мальцев. Алгоритмы и рекурсивные функции. М. "Наука". 1965.

11. Методическая разработка по курсу "Высшая математика"(для студентов 1 и 2 курсов философского факультета заочного отделения)/ Составители: Баранский В.А., Замятин А.П. Свердловск. 1976.

12. Методическая разработка практических занятий по числовым системам для студентов математического факультета пединститута/ Составитель - В.Л.Селиванов. Новосибирск. 1990.

13. К.И.Нешков, А.М.Пышкало, В.Н. Рудницкая. Множества, отношения, числа, величины. Пособие для учите-

лей. М. "Просвещение". 1978.

14. Л.Б.Шнеперман. Сборник задач по алгебре и теории чисел. Минск. "Вышэйшая школа". 1982.