§2. Логика второго порядка

Опр. Предикатной переменной P называется формула логики предикатов.

Определим понятие формулы логики второго порядка, добавив: $(\forall P)(F)$, $(\exists P)(F)$, где P – предикатная переменная, F – формула логики второго порядка.

Пример.

$P = A(x, y)$; $F = (\forall x)A(x, x)$;

$(\exists A)(\forall x)A(x, x)$.

Замечание: монадическая логика второго порядка является частным случаем, в котором кванторы навешиваются на символы одноместных предикатов $P(x)$ = « $x \in X$ » для выбранного X.

При интерпретации на модели *M* каждая предикатная переменная местности *k* соответствует характеристической функции $\delta(x_1,..., x_k) : M^k \to \{0, 1\}$, или *k*-местному отношению на *M*. Т.е. в формулах логики второго порядка кванторы можно навешивать на множества множеств.

Случай навешивания квантора на $f(x_1,\ldots,x_n)$ соответствует навешиванию квантора на предикат $P(x_1,\ldots,x_n,y)$, равный «$f(x_1,\ldots,x_n)=y$».

Определим понятие формулы логики третьего порядка, добавив: $(\forall F)(G)$, $(\exists F)(G)$, где F – формула логики второго порядка G – формула логики третьего порядка.

Теорема (Хинтикка). Для всякой формулы логики третьего порядка существует равновыполнимая формула логики второго порядка.

Для логики второго порядка не выполняется аналог теоремы о компактности для логики предикатов.

Теорема (компактности).
Если формула G является логическим следствием бесконечного множества формул K, то G является логическим следствием конечного подмножества формул $K' \subseteq K$.

Пример формулы $\neg G$ и бесконечного множества формул K, таких, что $\{K, \neg G\}$ не выполнимо, но для любого конечного $K' \subseteq K$ множество $\{K', \neg G\}$ выполнимо:

$$\neg G = (\forall f)((\forall x)(\forall y)(f(x) = f(y) \to x = y) \to (\forall x)(\exists y)(x = f(y))),$$

$$K = \{P_k\}, \; P_k = (\exists x_1)\ldots(\exists x_k)(\neg(x_1 = x_2)\,\&\ldots)$$

$K = \{P_k\}$, $P_k = (\exists x_1)\ldots(\exists x_k)(\neg(x_1 = x_2)\,\&\ldots)$

Все формулы в K истинны, только если модель M бесконечная.
На бесконечной модели формула $\neg G$ ложна.
$\Rightarrow \{K, \neg G\}$ не выполнимо.

Для любого конечного $K' \subseteq K$ существует конечная модель (количество элементов не меньше максимального индекса k в P_k), на которой все формулы в K' истинны.
На любой конечной модели формула $\neg G$ истинна.
$\Rightarrow \{K', \neg G\}$ выполнимо.