## Глава III. Расширения логики предикатов и неклассические логики

### §1. Монадическая логика второго порядка. Язык, определяемый логической формулой

Опр. Предметной  переменной называется любая переменная из $V$. Обозначение: $x$, $y$, …

Опр. Монадической переменной называется множество значений предметной переменной (множественная переменная).

Обозначение: $X$, $Y$, …

Определим понятие терма, добавив использование монадической переменной.
Тогда атомарные формулы могут зависеть от предметных или монадических переменных.

Определим понятие формулы монадической логики второго порядка, добавив: $(\forall X)(F)$, $(\exists X)(F)$, где $X$ – монадическая переменная, $F$– формула монадической логики второго порядка.

В сигнатуре будет обязательный двухместный предикат « $x \in X$ ».

Пример.

$$F = (\forall X)(\exists x)(x \in X \,\&\, (\forall y)(y \in X \rightarrow P(x, y)))$$

при $P(x, y)$ = « $x \le y$ » на $\mathbb{N}$ соответствует условию минимальности для вполне упорядоченного множества $(\mathbb{N}, \le)$.

Пусть Σ – алфавит, $\Sigma^*$ – множество всех слов (включая пустое) над Σ.

Опр. Языком над алфавитом Σ называется $L \subseteq \Sigma^*$.

Опишем способ задания языка $L$ формулами монадической логики второго порядка (MSO(<)).

1. Каждому слову $u \in \Sigma^*$ соответствует множество Dom($u$) = {0, 1, …, $n$ –1} номеров позиций букв в слове, где $n$ – длина слова $u$.

2. $R_a(x)$ = «позиция $x$ занята буквой $a \in \Sigma$».

3. Двухместный предикат $x < y$, где $x$ и $y$ – номера позиций.

4. Каждая предметная переменная есть номер позиции, каждая монадическая переменная – подмножество множества Dom($u$) для проверяемого слова $u$.

Опр. Язык $L$ определяется замкнутой формулой $F$, если для каждого слова $u \in L$ значение $F$ – истина, а для $u \notin L$ значение $F$ – ложь.

Пример. $\Sigma = \{a, b\}$

$$F = (\exists X)(\exists Y)(\forall x)(\forall y)((x \in X \,\&\, y \in Y) \to (x < y \,\&\, R_a(x) \,\&\, R_b(y))).$$

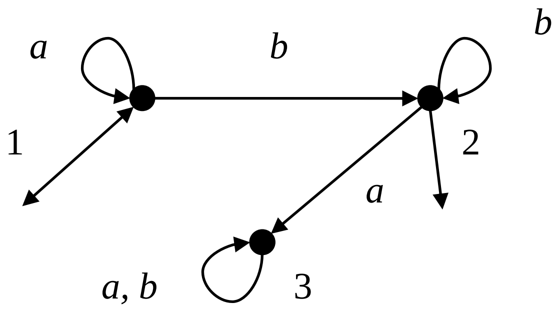
$L = ?$

$$L = \{ a^* b^* \}.$$

Теорема (Б**ю**хи).
Класс языков над $\Sigma$, допускаемых конечными автоматами, совпадает с классом языков, определяемых формулами MSO(<).

Пример (иллюстрация доказательства).

Пусть $L = \{ a^* b^* \}$.




Определим множества позиций $X_1, X_2, X_3$, соответствующие состояниям автомата: $x \in X_i \Leftrightarrow$ в момент чтения позиции $x$ в слове автомат находится в состоянии $i$.

$$F_1 = \neg(\exists x)((x \in X_1 \,\&\, x \in X_2) \vee (x \in X_1 \,\&\, x \in X_3) \vee (x \in X_2 \,\&\, x \in X_3)).$$

«Множества не пересекаются»

$$F_2 = (\forall x)(x \in X_1 \vee x \in X_2 \vee x \in X_3).$$

«Множества образуют разбиение»

$$F_3 = (\forall x)(\forall y)(y = x + 1 \rightarrow [x \in X_1 \;\&\; y \in X_1 \;\&\; R_a(y)] \vee \ldots).$$

«Функция переходов»

$$F_4 = (\forall x)((\forall y)\neg(x = y + 1) \rightarrow x \in X_1).$$

«Начальное состояние»

$$F_5 = (\forall x)((\forall y)\neg(y = x + 1) \rightarrow x \in X_1 \vee x \in X_2).$$

«Заключительные состояния»

$$(\exists X_1)(\exists X_2)(\exists X_3)(F_1 \;\&\; F_2 \;\&\; F_3 \;\&\; F_4 \;\&\; F_5).$$

Пример (переход от формулы к автомату).

$$F = (\exists X)(\exists Y)(\forall x)(\forall y)((x \in X \ \& \ y \in Y) \to (x < y \ \& \ R_a(x) \ \& \ R_b(y))).$$

Для перехода от формулы к автомату потребуется переход по цепочке: от формулы к регулярному выражению, затем к автомату. (Теорема Клини).

$L = \{ a^* b^* \}.$

Лемма.
Двухместный предикат «$y = x+1$» можно выразить формулой логики предикатов в сигнатуре, содержащей «$x < y$».

Замечание: обратное не верно в логике предикатов, но выполняется в монадической логике второго порядка над $\mathbb{N}$, содержащей $y = x+1$:
«$x < y$» =
$(\exists X)(y \in X \, \& \, \neg(x \in X) \, \& \, (\forall z)(\forall t)(z \in X \, \& \, t = z+1 \to t \in X))$.