

§7. Аксиоматическая теория исчисления предикатов

Один случай формальной теории, совпадающей с логикой предикатов.

Опр. Алфавитом теории **K** называется множество, содержащее заглавные и строчные латинские буквы, с индексом или без, скобки (и), символ запятой , , символы \neg и \rightarrow , квантор общности \forall .

Опр. Формулой теории **K** называется слово над алфавитом теории, являющееся формулой логики предикатов.

Опр. Аксиомой теории **K** называется каждая из формул:

(A1) $F \rightarrow (G \rightarrow F)$;

(A2) $(F \rightarrow (G \rightarrow H)) \rightarrow ((F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow H))$;

(A3) $(\neg G \rightarrow \neg F) \rightarrow ((\neg G \rightarrow F) \rightarrow G)$;

где F, G, H – формулы теории **K**.

(A4) $(\forall x)(F \rightarrow G) \rightarrow (F \rightarrow (\forall x)G)$,

где F не содержит свободных вхождений x .

(A5) $(\forall x)F(x) \rightarrow F(t)$,

где t – терм, свободный для x в $F(x)$, т.е $F(t)$ получена из $F(x)$ заменой свободных вхождений x на t , и в $F(t)$ во всех вхождениях t нет связанных переменных.

В частности, t может совпадать с x .

Пример аксиомы по схеме (A5):

$$\begin{aligned} & (\forall x)((\forall y)A(x, y, z) \rightarrow (\forall x)(\forall z)B(x, z)) \rightarrow \\ & \rightarrow ((\forall y)A(f(x, z), y, z) \rightarrow (\forall x)(\forall z)B(x, z)). \end{aligned}$$

Опр. Правилами вывода в теории **K** называются: правило *modus ponens* и правило обобщения.

$$(mp): \frac{F, (F \rightarrow G)}{G} .$$

$$(gen): \frac{F}{(\forall x)F} .$$

Опр. Теория **K** – набор из алфавита, множества всех возможных формул, множества аксиом, правил вывода.

Опр. Пусть Γ – подмножество формул теории **K** (множество гипотез). Формула F_n выводится из Γ , если существует последовательность формул F_1, F_2, \dots, F_n , такая, что каждая F_i либо является аксиомой, либо принадлежит Γ , либо получена по правилам вывода из формул среди F_1, F_2, \dots, F_{i-1} .

$$\Gamma \vdash F_n.$$

Опр. Формула F_n называется теоремой, если F_n выводится из пустого множества гипотез.

$$\vdash F_n.$$

Замечание: теорией первого порядка называется аксиоматическая теория, полученная добавлением к **K** некоторого множества «собственных аксиом».

Главные утверждения (без доказательств).

Теорема (Гёделя о полноте).

Формула F теории **K** является теоремой \Leftrightarrow формула логики предикатов F тождественно истинная.

Опр. Аксиоматическая теория называется непротиворечивой, если не существует формулы P , такой, что и P и $\neg P$ являются теоремами.

Следствие.

Теория **K** – непротиворечивая.

Замечание: F тождественно истинная $\Leftrightarrow \neg F$ невыполнимая.

Существуют формулы, истинные на любой конечной модели, но не тождественно истинные.

Теорема (об адекватности).

$\Gamma \vdash G \Leftrightarrow G$ является логическим следствием формул в Γ .

Опр. Формула F логики предикатов называется замкнутой, если она не содержит свободных переменных (т.е. все переменные связанные).

Теорема (о дедукции).

Пусть формула F замкнутая.

$\{\Gamma, F\} \vdash G \Leftrightarrow \Gamma \vdash (F \rightarrow G)$.

Опр. Аксиоматическая теория называется разрешимой, если существует алгоритм, проверяющий для любой формулы P , является ли P теоремой.

Теорема (Чёрча).

Теория **K** – неразрешимая.

Замечание: 1) если использовать предикатные символы только от одной переменной, то теория **K** становится разрешимой.

2) если использовать только интерпретации на конечных моделях, то теория **K** становится разрешимой.

Алгоритм проверки, является ли теоремой формула, содержащая предикатные символы только от одной переменной.

Опр. Пусть формула $F(x_1, x_2, \dots, x_n)$ содержит свободные переменные x_1, x_2, \dots, x_n . Замыканием формулы F называется формула $(\forall x_1)(\forall x_2) \dots (\forall x_n)F(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Обозначение: $\overset{\cap}{F}$.

Лемма. $F \equiv 1 \Leftrightarrow \overset{\cap}{F} \equiv 1$.

Пусть F – замкнутая формула, содержащая предикатные символы только от одной переменной, не использующая операции импликации и эквиваленции.

- 1) Заносим отрицание к атомарным формулам.
- 2) Заносим кванторы к атомарным формулам.

В случаях вида: $(\forall x)(A(x) \vee B(x))$ и $(\exists x)(A(x) \& B(x))$ заменяем скобку на новый предикатный символ $C(x)$.

Результат: формула, где каждое вхождение $(\forall x)A(x)$ или $(\exists x)A(x)$ считаем атомарной формулой логики высказываний.

3) Строим таблицу истинности для всех значений, кроме:

$(\forall x)A(x)$	$(\forall x)B(x)$	$(\forall x)C(x)$
1		0
	1	0

если $C(x) = A(x) \vee B(x)$;

$(\exists x)A(x)$	$(\exists x)B(x)$	$(\exists x)C(x)$
0		1
	0	1

если $C(x) = A(x) \& B(x)$;

также нужно исключить случаи:

$(\forall x)A(x)$	$(\exists x)A(x)$
1	0

$(\forall x)A(x)$	$(\forall x)\neg A(x)$
1	1

$(\exists x)A(x)$	$(\exists x)\neg A(x)$
0	0

Пример.

$$F = (\exists x)\neg A(x) \vee (\exists x)\neg B(x) \vee (\forall x)(A(x) \vee B(x)).$$

$(\exists x)\neg A(x)$	$(\exists x)\neg B(x)$	$(\forall x)(A(x) \vee B(x))$	F
0	0	0	
0	0	1	
0	1	0	
0	1	1	
1	0	0	
1	0	1	
1	1	0	
1	1	1	

$$F = (\exists x)\neg A(x) \vee (\exists x)\neg B(x) \vee (\forall x)(A(x) \vee B(x)) .$$

$(\exists x)\neg A(x)$	$(\exists x)\neg B(x)$	$(\forall x)(A(x) \vee B(x))$	F
0	0	0	\times
0	0	1	1
0	1	0	\times
0	1	1	1
1	0	0	\times
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

\Rightarrow Формула F тождественно истинная, т.е. F является теоремой.