

§5. Невыразимость в логике предикатов

Опр. Пусть $P(x, y)$ – двухместный предикат на M . Транзитивным замыканием предиката $P(x, y)$ называется предикат $P^*(x, y)$ такой, что для любых $a, b \in M$

$$P^*(a, b) = 1 \Leftrightarrow \text{существуют } n \in \mathbb{N} \text{ и } a_0, a_1, \dots, a_n \in M : \\ a_0 = a, a_n = b, P(a_0, a_1) = 1 = P(a_1, a_2) = \dots = P(a_{n-1}, a_n).$$

Пример.

$$M = \mathbb{N}, P(x, y) = \langle\langle y = x + 1 \rangle\rangle.$$

$$P^*(x, y) = ?$$

Пример.

$$M = \mathbb{N}, P(x, y) = \langle\langle y = x + 1 \rangle\rangle.$$

$$\text{Тогда } P^*(x, y) = \langle\langle x < y \rangle\rangle.$$

Теорема.

Пусть $A(x, y)$ символ двухместного предиката. Не существует формулы $F(x, y)$ логики предикатов, такой, чтобы для любой интерпретации φ предикат $\varphi F(x, y)$ был бы транзитивным замыканием предиката $\varphi A(x, y)$.

Теорема (компактности).

Если формула G является логическим следствием бесконечного множества формул K , то G является логическим следствием конечного подмножества формул $K' \subseteq K$.

Доказательство:

Дано: G является логическим следствием бесконечного множества формул K , т.е. $\{K, \neg G\}$ невыполнимо.

Приведем каждую формулу из K и формулу $\neg G$ к СНФ. Соберем множество дизъюнктов S . Тогда S невыполнимо.

По теореме из § 4 существует вывод из S пустого дизъюнкта:

$D_1, D_2, \dots, D_{n-1}, \square$ (конечная последовательность).

Пусть $S' \subseteq S$ подмножество дизъюнктов, участвующих в выводе.
 $\Rightarrow S'$ конечное невыполнимое.

Соберем $K' \subseteq K$ – формулы, из которых получились дизъюнкты в S' (кроме полученных из $\neg G$). K' конечное. $\{K', \neg G\}$ невыполнимо.

G является логическим следствием конечного подмножества формул K' . Теорема доказана.

Теорема.

Пусть $A(x, y)$ символ двухместного предиката. Не существует формулы $F(x, y)$ логики предикатов, такой, чтобы для любой интерпретации φ предикат $\varphi F(x, y)$ был бы транзитивным замыканием предиката $\varphi A(x, y)$.

Доказательство (теоремы о невыразимости):

(от противного) Предположим, что $F(x, y)$ – формула: для любой интерпретации φ на множестве M , и любых $a, b \in M$ выполняется $\varphi F(a, b) = 1 \Leftrightarrow \varphi A^*(a, b) = 1$.

Рассмотрим бесконечное множество формул

$K = \{E_0(x, y), E_1(x, y), \dots, E_n(x, y), \dots\}$, где

$$E_0(x, y) = \neg A(x, y),$$

$$E_1(x, y) = \neg(\exists z_1)(A(x, z_1) \& A(z_1, y)),$$

...

$$E_n(x, y) = \neg(\exists z_1) \dots (\exists z_n)(A(x, z_1) \& \dots \& A(z_n, y)), \dots$$

Тогда $\neg F(x, y) = \neg A^*(x, y)$ является логическим следствием бесконечного множества формул K .

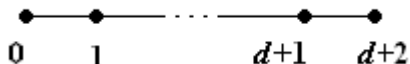
По теореме компактности $\neg F(x, y)$ является логическим следствием конечного множества формул $K' \subseteq K$.

Пусть $K' = \{E_0(x, y), E_1(x, y), \dots, E_d(x, y)\}$.

Рассмотрим $M = \{0, 1, \dots, d, d+1, d+2\}$ и интерпретацию $\varphi A(x, y) = \langle y = x + 1 \rangle$.

$$\varphi A^*(x, y) = \langle x < y \rangle, \Rightarrow \varphi A^*(0, d+2) = \varphi F(0, d+2) = 1.$$

С другой стороны: $\varphi E_0(0, d+2) = 1, \dots, \varphi E_d(0, d+2) = 1$.



Следовательно, $\varphi(\neg F(0, d+2)) = 1$. Противоречие.

Логика первого порядка – логика предикатов.

§6. Многосортная логика предикатов

Расширение понятия формулы логики предикатов вводится определением нового понятия ограниченных кванторов.

Опр. Пусть $B(x)$ – одноместный предикат. Ограниченный квантор общности $(\forall B(x))$ применяется так:

$(\forall B(x)) F(x, \dots)$ есть сокращение формулы $(\forall x)(B(x) \rightarrow F(x, \dots))$.

Опр. Пусть $B(x)$ – одноместный предикат. Ограниченный квантор существования $(\exists B(x))$ применяется так:

$(\exists B(x)) F(x, \dots)$ есть сокращение формулы $(\exists x)(B(x) \& F(x, \dots))$.

Пример.

$V(x) = \langle x - \text{четное} \rangle;$

$C(x) = \langle x - \text{нечетное} \rangle;$

$P(x, y) = \langle y = x + 1 \rangle.$

$(\forall V(x)) (\exists C(y)) P(x, y) = ?$

$$= (\forall x)(B(x) \rightarrow (\exists y)(C(y) \& P(x, y))).$$

При построении формул многосортной логики используется сигнатура $\Phi \cup R \cup V$, где $V = V_1 \cup \dots \cup V_m$ (множество переменных разбито на m сортов);

для каждого аргумента x_i функции $f(x_1, \dots, x_n)$ или предиката $A(x_1, \dots, x_n)$ указан сорт переменной.

При построении интерпретации φ используют не одно множество M , а набор M_1, \dots, M_m , т.е. для каждого сорта переменной свое множество M_i .

Пример. $(\forall x) (B(x)) (\exists y) (C(y)) P(x, y)$

Интерпретация φ на M_1, M_2 , где

$M_1 = \{\text{четные числа}\}$, $M_2 = \{\text{нечетные числа}\}$.

$P(x, y) = \langle y = x + 1 \rangle$.

Переменная x – первого сорта (свойство $B(x)$),
переменная y – второго сорта (свойство $C(y)$).

Из определения следует, что многосортная логика совпадает с обычной логикой предикатов.

Однако более короткая запись формул может применяться, например, в запросах в информационных системах (т.е. базах данных).

Пример. База данных сделок купли-продажи партий товаров.

Информация хранится в виде упорядоченных наборов в следующих таблицах:

1. Партия (Номер, Наименование, Кол-во).
2. Покупка (Номер, Дата, Агент).
3. Продажа (Номер, Дата, Агент).
4. Склад (Секция, Номер, Срок).

Введем предикаты:

Партия (x, y, z) .

Покупка (x, u, v) .

Продажа (x, u, v) .

Склад (s, x, u) .

Ранее $(u_1, u_2) = \langle u_1 \leq u_2 \rangle$.

Запрос = «Какие номера партий и наименования товаров, купленных у фирмы α в 2017 году?» соответствует формуле:

$x \in \text{Номер} \ \& \ y \in \text{Наим.} \ \& \ (\exists z \in \text{Кол} - \text{во})(\exists u \in \text{Дата})$
[$\text{Партия}(x, y, z) \ \& \ \text{Покупка}(x, u, \alpha) \ \& \ \text{Ранее}(01.01.17, u) \ \&$
 $\ \& \ \text{Ранее}(u, 01.01.18)$].