§3. Логическое следствие

Опр. Формула G называется логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, если для любой интерпретации φ из того, что все значения $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_n)$ истинны, следует, что значение $\varphi(G)$ истинно.

Замечание. Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, если $F_1 \,\&\, F_2 \,\&\ldots\&\, F_n \to G \equiv 1$.

Опр. Множество формул $F_1, F_2, \ldots, F_m$ выполнимо, если существует интерпретация φ такая, что все значения $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_m)$ истинны.

Невыполнимо – в противном случае.

Теорема.
Формула G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$ $\Leftrightarrow$ множество формул $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ не выполнимо.

Доказательство:
$\Rightarrow$) Дано: G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$.

Предположим, что $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ выполнимо, т.е. существует интерпретация φ такая, что все значения $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_n), \varphi(\neg G)$ истинны. Тогда $\varphi(G)$ ложно. Противоречие.

$\Leftarrow$) Дано: множество формул $\{F_1, F_2, \ldots, F_n, \neg G\}$ не выполнимо.
Для любой интерпретации φ среди значений $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_n), \varphi(\neg G)$ будет хотя бы одно ложное значение.

Для всех интерпретаций φ, таких, что $\varphi(F_1), \varphi(F_2), \ldots, \varphi(F_n)$ истинны, обязательно ложным будет $\varphi(\neg G)$. Тогда $\varphi(G)$ истинно.

Следовательно, G является логическим следствием формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$. Теорема доказана.

Пример.

Является ли формула G логическим следствием формул F_1, F_2?

$G = Z \to Y$; $F_1 = X \,\&\, Y \leftrightarrow Z$; $F_2 = (X \,\&\, Z) \vee Y$.

Решение: предположим, что G не является логическим следствием формул F_1, F_2.

Тогда существует интерпретация, при которой значения формул $F_1 = F_2 = 1$, а значение $G = 0$.

$G = 0 \Leftrightarrow Z = 1$ и $Y = 0$;

Пример.

Является ли формула G логическим следствием формул F_1, F_2?

$G = Z \to Y$; $F_1 = X \,\&\, Y \leftrightarrow Z$; $F_2 = (X \,\&\, Z) \vee Y$.

$G = 0 \Leftrightarrow Z = 1$ и $Y = 0$;

$$F_1 = 1 \Leftrightarrow X \,\&\, 0 \leftrightarrow 1 = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow X \,\&\, 0 = 1$$

но это невозможно ни при каком значении X.

Пример.
Является ли формула G логическим следствием формул $F_1,...,F_k$?
$G = Z \to Y$; $F_1 = X \& Y \leftrightarrow Z$; $F_2 = (X \& Z) \vee Y$.

Значит предположение не верно, т.е. G является логическим следствием формул F_1, F_2 .

Ответ: G является логическим следствием формул F_1, F_2.

§4. Нормальные формы

Опр. Литерал – атомарная формула (кроме 0 и 1), или ее отрицание.

Элементарная конъюнкция – литерал или конъюнкция литералов.

Опр. Формула F имеет дизъюнктивно-нормальную форму (ДНФ), если она является элементарной конъюнкцией или дизъюнкцией элементарных конъюнкций.

$$(\ldots. \,\&\, \ldots. \,\&\, \ldots) \vee (\ldots. \,\&\, \ldots.) \vee (\ldots \quad) \ldots$$

Теорема.
Для всякой формулы F существует равносильная формула, имеющая ДНФ.

Доказательство:

Алгоритм приведения к ДНФ.

Алгоритм приведения к ДНФ.

1. Исключить эквиваленцию и импликацию (по законам 21 и 20).

2. Занести отрицание к атомарным формулам (по законам де Моргана 17 и 18).

3. К не элементарным конъюнкциям применить законы дистрибутивности (11 и 12).

Пример.

Привести к ДНФ

$F = \neg((X \to Y) \to Z)$.

1 шаг: $\neg((X \to Y) \to Z) \equiv \neg((\neg X \vee Y) \to Z) \equiv \neg[\neg(\neg X \vee Y) \vee Z]$.

2 шаг: $\equiv (\neg X \vee Y) \mathbin{\&} \neg Z$.

3 шаг: $\equiv (\neg X \mathbin{\&} \neg Z) \vee (Y \mathbin{\&} \neg Z)$ – ДНФ.

Опр. Формула F имеет совершенную дизъюнктивно-нормальную форму (СДНФ) относительно атомарных формул $X_1, X_2, \ldots, X_n$, если:

1) в записи F участвуют только $X_1, X_2, \ldots, X_n$;

2) F имеет ДНФ, т.е. $F = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$;

3) Каждая C_i содержит или X_j, или $\neg X_j$, для любого j.

4) F не содержит одинаковых элементарных конъюнкций.

Теорема.
Для всякой выполнимой формулы F существует равносильная формула, имеющая СДНФ.

Доказательство:

Алгоритм приведения к СДНФ.

Алгоритм приведения к СДНФ.

1, 2, 3 – из алгоритма приведения к ДНФ.
Результат – формула $F = C_1 \vee C_2 \vee \ldots \vee C_k$, равносильная исходной.

4. Если C_i не содержит ни X_j, ни $\neg X_j$, то заменяем C_i на $(C_i \& X_j) \vee (C_i \& \neg X_j)$.

5. Если F содержит несколько одинаковых элементарных конъюнкций, то вычеркиваем их все, кроме одной.

Пример.

Привести к СДНФ
$F = \neg((X \to Y) \to Z)$.

1, 2, 3 шаги дают результат
$F \equiv (\neg X \,\&\, \neg Z\,) \vee (Y \,\&\, \neg Z)$.

4 шаг: $\equiv (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg Y) \vee (Y \,\&\, \neg Z) \equiv$

$\equiv (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg Y) \vee (Y \,\&\, \neg Z \,\&\, X) \vee (Y \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg X)$.

5 шаг: т.к. первая и четвертая скобки совпадают, то одну вычеркиваем.
$\equiv (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg Y) \vee (Y \,\&\, \neg Z \,\&\, X)$.

$F = (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, Y) \vee (\neg X \,\&\, \neg Z \,\&\, \neg Y) \vee (Y \,\&\, \neg Z \,\&\, X)$.

Составим таблицу истинности формулы F:

X	Y	Z	F	
0	0	0	1	вторая скобка
0	0	1		
0	1	0	1	первая скобка
0	1	1		
1	0	0		
1	0	1		
1	1	0	1	третья скобка
1	1	1		

Следствие: можно использовать второй способ приведения формулы к СДНФ.

Пример.

Привести к СДНФ $F = \neg((X \to Y) \to Z)$.

Второй способ.

1 шаг: Составить таблицу истинности F

X	Y	Z	$X \to Y$	$((X \to Y) \to Z$	F
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0	0		
1	0	1	0		
1	1	0			
1	1	1			

X	Y	Z	$X \to Y$	$((X \to Y) \to Z$	F
0	0	0	1	0	
0	0	1	1	1	
0	1	0	1	0	
0	1	1	1	1	
1	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	

X	Y	Z	$X \to Y$	$((X \to Y) \to Z$	F
0	0	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	1	0
1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	1	0
1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	1	0

2 шаг: используя строки, в которых значение равно 1, записываем СДНФ.

Элементарная дизъюнкция – литерал или дизъюнкция литералов.

Опр. Формула F имеет конъюнктивно-нормальную форму (КНФ), если она является элементарной дизъюнкцией или конъюнкцией элементарных дизъюнкций.

$$(\dots \vee \dots \vee \dots) \ \& \ (\dots \vee \dots) \ \& \ (\dots \ ) \dots$$

Теорема.
Для всякой формулы F существует равносильная формула, имеющая КНФ.

Опр. Формула F имеет совершенную конъюнктивно-нормальную форму (СКНФ) относительно атомарных формул $X_1, X_2, \ldots, X_n$, если:

1) в записи F участвуют только $X_1, X_2, \ldots, X_n$;

2) F имеет КНФ, т.е. $F = D_1 \,\&\, D_2 \,\&\ldots\&\, D_k$;

3) Каждая D_i содержит или X_j, или $\neg X_j$, для любого j.

4) F не содержит одинаковых элементарных дизъюнкций.

Теорема.
Для всякой формулы F, не являющейся тождественно истинной, существует равносильная формула, имеющая СКНФ.

Замечание: если формула F имеет СДНФ, то $(\neg F)$ после занесения отрицания к атомарным формулам будет иметь СКНФ.
И наоборот.

§5. Карты Карно

Теорема. Если для формулы F существует СДНФ, то она единственная, с точностью до перестановки элементарных конъюнкций и перестановки литералов внутри элементарной конъюнкции.

Пример существования ДНФ, более короткой, чем СДНФ.

$F = (X \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} Z) \vee (X \mathbin{\&} Y \mathbin{\&} \neg Z) \vee (X \mathbin{\&} \neg Y \mathbin{\&} Z) \equiv$

$\equiv (X \mathbin{\&} Y) \vee (X \mathbin{\&} Z)$.

Вопрос: как доказать, что полученная ДНФ самая короткая?

И как находить самую короткую ДНФ?

Опр. Картой Карно называется рисунок-таблица, в которой закрашенные ячейки соответствуют элементарным конъюнкциям в СДНФ формулы.

Построение карты Карно зависит от количества атомарных формул в составе формулы F (обозначим n).

Случай n = 2.

	B	¬B
A		
¬A		

Пример.

$F = A \leftrightarrow B \equiv (A \,\&\, B) \vee (\neg A \,\&\, \neg B)$.

	B	¬B
A		
¬A		

Случай n = 3.

	B	$\neg$B	$\neg$B	B
A				
$\neg$A				
	C		$\neg$C	

Случай $n = 4$.

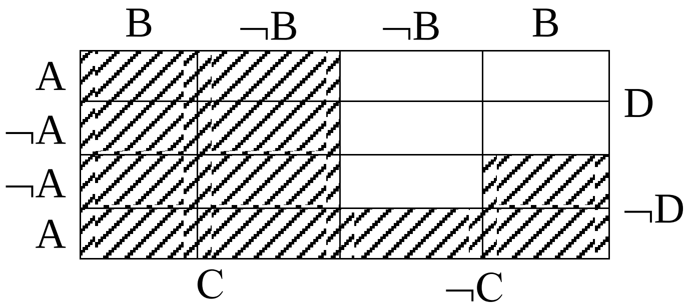
	B	$\neg B$	$\neg B$	B	
A					D
$\neg A$					
$\neg A$					$\neg D$
A					
	C		$\neg C$		

Свойства карты Карно:
1) Закрашенный блок из двух соседних ячеек карты соответствует элементарной конъюнкции, содержащей (n – 1) литерал.
2) Крайнюю левую и крайнюю правую ячейки одной строки можно считать соседними.
3) Крайнюю верхнюю и крайнюю нижнюю ячейки одного столбца можно считать соседними.
4) Закрашенный блок из четырех соседних ячеек карты соответствует элементарной конъюнкции, содержащей (n – 2) литерала.
5) Закрашенный квадрат из четырех ячеек карты соответствует элементарной конъюнкции, содержащей (n – 2) литерала.
6) Закрашенный прямоугольник размером 2×4 (или 4×2) из восьми ячеек карты соответствует элементарной конъюнкции, содержащей (n – 3) литерала.

Следствие. Для поиска минимальной ДНФ формулы нужно найти покрытие закрашенной области минимальным количеством блоков, имеющих максимальную площадь.

Пример.

Рассмотрим карту некоторой формулы:



Покроем закрашенную область прямоугольником 4×2.
Затем выделим строку из 4 ячеек, перекрывающую прямоугольник.
Затем выделим квадрат 2×2, также перекрывающий выделенные области.

Всего 3 блока.
Первый блок соответствует (C).
Второй блок соответствует ($A \& \neg D$).
Третий блок соответствует ($B \& \neg D$).

Минимальная ДНФ этой формулы: $C \vee (A \& \neg D) \vee (B \& \neg D)$.