§5. Система аксиом Цермело-Френкеля

Одна из аксиоматизаций теории множеств.

Используются два понятия – множество, отношение принадлежности.

Обозначение: a, …, x, … – множество (или элемент множества);
$a \in x$ – двухместный предикат принадлежности.

1. (Аксиома объёмности) $(\forall a)(a \in x \leftrightarrow a \in y) \to x = y$.

2. (Аксиома пустого множества) $(\exists x)(\forall a)(\neg\, a \in x)$. $\varnothing$

3. (Аксиома неупорядоченной пары)
$(\forall a)(\forall b)(\exists x)(a \in x \,\&\, b \in x \,\&\, (\forall c)(c \in x \to c = a \vee c = b))$.

4. (Аксиома суммы) $(\forall x)(\exists y)(\forall a)(a \in y \leftrightarrow (\exists z)(z \in x \,\&\, a \in z))$.

$$y = \bigcup_{z \in x} z$$

Для всякого семейства множеств ***x*** *существует множество* ***y****, являющееся объединением* ***x****.*

5. (Аксиома степени) $(\forall x)(\exists y)(\forall a)(a \in y \leftrightarrow (\forall b)(b \in a \rightarrow b \in x))$.

Для всякого множества ***x*** *существует множество* ***y****, являющееся булеаном* ***x****.*

$$y = 2^x$$

6. (Аксиома регулярности) $(\forall x)(\exists a)(a \in x \,\&\, (\forall b)(b \in a \to \neg\, b \in x))$.

Во всяком непустом множестве ***x*** *существует элемент* ***a****, такой, что* $a \cap x = \varnothing$.

7. (Аксиома бесконечности)
$(\exists x)(\varnothing \in x \,\&\, (\forall u)(u \in x \to (u \cup \{u\}) \in x))$.

8. (Аксиома замещения) – схема аксиом для любой $A(u, v)$:

$$(\forall a)(\forall b)(\forall c)(A(a,b) \,\&\, A(a,c) \to b = c) \to$$

$$\to (\exists y)(\forall c)(c \in y \leftrightarrow (\exists a)(a \in x \,\&\, A(a,c))\ .$$

Обозначение: ZF – система аксиом Цермело Френкеля.

Теорема. В системе аксиом ZF не допускается $x \in x$.

Доказательство:
(от противного) Предположим, существует x такое, что $x \in x$.
По аксиоме пары существует $y = \{x, x\} = \{x\}$.
По аксиоме регулярности в y существует элемент (это может быть только x), что $x \cap y = \varnothing$. Но $x \in x$ и $x \in y$, следовательно $x \cap y = \{x\} \neq \varnothing$. Противоречие.

9. (Аксиома выделения) – схема аксиом для любой $A(u)$:
$(\exists y)(\forall a)(a \in y \leftrightarrow a \in x \,\&\, A(a))$.

Теорема. Из аксиомы выделения выводится существование пересечения двух множеств и декартова произведения двух множеств.

Доказательство:

1. $(\exists y)(\forall a)(a \in y \leftrightarrow a \in x_1 \,\&\, \underbrace{a \in x_2}_{A(a)})$ – пересечение $y = x_1 \cap x_2$.

2. Пара $\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\}$ – упорядоченная пара (x_1,x_2).

3. $(\exists y)(\forall a)(a \in y \leftrightarrow a \in x \,\&\, \underbrace{(\exists b_1)(\exists b_2)(b_1 \in x_1 \,\&\, b_2 \in x_2 \,\&\, a=(b_1,b_2))}_{A(a)})$

– декартово произведение $y = x_1 \times x_2$.

(Аксиома выбора)

Для любого непустого множества x существует выбирающая функция, т.е. $\psi : 2^x \setminus \{\varnothing\} \to x$, такая, что $\forall y \subseteq x : y \neq \varnothing \to$ $\to \psi(y) \in y$.

Обозначение: ZFC – система аксиом Цермело Френкеля с добавленной аксиомой выбора.

«Континуум-гипотеза»: не существует мощность $\aleph_\alpha$:

$\aleph_0 < \aleph_\alpha < \mathfrak{c}$

В ZFC не выводится отрицание гипотезы, не выводится сама гипотеза (в предположении о непротиворечивости этой системы аксиом).

Обозначение: H – «Континуум-гипотеза».

Теорема (Коэн). Если ZFC непротиворечивая, то ZFC $+\neg$H непротиворечивая (существует интерпретация).

Теорема (Гёдель). Если ZFC непротиворечивая, то ZFC +H непротиворечивая (существует интерпретация).

Введение натуральных чисел с 0 в ZF:

Пусть $0 = \varnothing$;

$1 = \{\varnothing\}$;

$2 = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$;

$3 = \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}$; …

$n' = n \cup \{n\}$;

Для любых m и n выполняется $m < n \Leftrightarrow m \in n$.

Замечание: аксиомы Пеано в этом случае выполняются.