## §3. Арифметика

Система аксиом Пеано (была предложена Дедекиндом):

(P1) 0 есть натуральное число.

(P2) для любого натурального числа $x$ существует другое натуральное число $x'$, называемое непосредственно следующим за $x$ ($x' = x + 1$).

(P3) $0 \neq x'$ для любого натурального числа $x$.

(P4) если $x' = y'$, то $x = y$.

(P5) пусть Q есть свойство, которым м.б. обладают одни и не обладают другие натуральные числа. Если выполняются:

(БИ) натуральное число 0 обладает свойством Q;

(ШИ) для всякого натурального числа $x$ из того, что $x$ обладает свойством Q, следует, что и $x'$ обладает свойством Q;

то свойством Q обладают все натуральные числа.

При добавлении к этой системе аксиом теории множеств можно получить арифметику и рациональных, и действительных, и комплексных чисел.

Рассмотрим теорию первого порядка **S**, полученную добавлением к теории **K** (глава II, §7) «собственных» аксиом.
В алфавит теории добавим символ двухместного предиката $x = y$, предметную константу 0, три символа функций: $x'$ ($x' = x + 1$), $x + y$, $x \cdot y$.

(S1) $x_1 = x_2 \rightarrow (x_1 = x_3 \rightarrow x_2 = x_3)$;

(S2) $x_1 = x_2 \rightarrow x_1' = x_2'$;

(S3) $0 \neq x'$;

(S4) $x_1' = x_2' \rightarrow x_1 = x_2$;

(S5) $x + 0 = x$;

(S6) $x_1 + x_2' = (x_1 + x_2)'$;

(S7) $x \cdot 0 = 0$;

(S8) $x_1 \cdot x_2' = x_1 \cdot x_2 + x_1$;

(S9) $A(0) \rightarrow \left[(\forall x)(A(x) \rightarrow A(x')) \rightarrow (\forall x)A(x)\right]$

Опр. Теория первого порядка называется теорией с равенством, если теоремами в ней являются формулы:

$$F_{рефл} \overset{def}{=} (\forall x)x = x$$ (рефлексивность равенства);

$$F_{подст} \overset{def}{=} x = y \to (A(x, x) \to A(x, y))$$ (подстановочность равенства),

где $A(x, x)$ – произвольная формула со свободными вхождениями x, $A(x, y)$ – получена заменой некоторых вхождений $x$ на $y$, так, чтобы $y$ было свободно для заменяемых $x$.

Теорема. Во всякой теории первого порядка с равенством выполняется:

(1) $\vdash t = t$, для любого терма $t$.

(2) $\vdash x = y \to y = x$.

(3) $\vdash x = y \to (y = z \to x = z)$.

Теорема. Теория **S** является теорией первого порядка с равенством, т.е. $\vdash F_{рефл} \overset{def}{=} (\forall x)x = x$ и $\vdash F_{подст} \overset{def}{=} x = y \to (A(x,x) \to A(x,y))$.

Доказательство $\vdash F_{рефл}$:

1. $x + 0 = x$, аксиома (S5);
2. $x + 0 = x \to (x + 0 = x \to x = x)$, аксиома (S1);
3. $x + 0 = x \to x = x$, из 1 и 2 по ($mp$);
4. $x = x$, из 1 и 3 по ($mp$);
5. $(\forall x)x = x$, ($gen$): $\dfrac{F}{(\forall x)F}$;

Лемма. Для любых термов $t$, $r$, $s$ теоремами являются формулы, полученные из аксиом (S1) – (S8) заменой $x, x_1, x_2$ на $t$, $r$, $s$.

Доказательство $\vdash t+0=t$:

1. $x+0=x$, аксиома (S5);
2. $(\forall x)x+0=x$, $(gen)$: $\dfrac{F}{(\forall x)F}$;
3. $(\forall x)x+0=x \to t+0=t$, аксиома (A5) $(\forall x)F(x) \to F(t)$;
4. $t+0=t$, из 2 и 3 по $(mp)$.

Следствия. Для любых термов $t$, $r$ и $s$ выполняются:

1) $\vdash t=t$; (2) $\vdash t=r \to r=t$. (3) $\vdash t=r \to (r=s \to t=s)$.

Теорема. Для любых термов $t$, $r$, $s$ теоремами являются формулы:

(1) $t+r=r+t$;

(2) $t \cdot r=r \cdot t$;

(3) $(t+r)+s=t+(r+s)$;

(4) $(t \cdot r) \cdot s=t \cdot (r \cdot s)$;

(5) $t \cdot (r+s)=t \cdot r+t \cdot s$.

Доказательство $\vdash x+y=y+x$:

а) Сначала покажем, что $\vdash x=0+x$.

Пусть $A(x) \overset{def}{=} x=0+x$.

(БИ) $\vdash A(0)$.

1. $0+0=0$, аксиома (S5);
2. $0=0+0$, по следствию 2 и ($mp$).

(ШИ) $\vdash A(x) \to A(x')$.

Покажем, что $A(x) \vdash A(x')$, затем применим теорему о дедукции*.

1. $x = 0 + x$, гипотеза $A(x)$;
2. $0 + x' = (0 + x)'$, аксиома (S6);
3. $x = 0 + x \to x' = (0 + x)'$, аксиома (S2) с заменой на термы;
4. $x' = (0 + x)'$, из 1 и 3 по ($mp$);
5. $(0 + x)' = x'$, по следствию 2 и ($mp$);
6. $0 + x' = (0 + x)' \to ((0 + x)' = x' \to 0 + x' = x')$, по следствию 3;
7. $x' = 0 + x'$, по следствию 2 и ($mp$) – это $A(x')$.

Из (БИ) и (ШИ) по аксиоме (S9) с применением правила ($gen$) получаем $x = 0 + x$.

*Теорема (о дедукции обобщенная).
Пусть $\{\Gamma, F\} \vdash G$ и существует такой вывод, в котором ни при каком применении правила обобщения к формулам, зависящим от $F$, не связывается квантором никакая свободная переменная в $F$.
Тогда $\Gamma \vdash (F \to G)$.

б) Покажем $\vdash x + y = y + x$.

Пусть $A(y) \overset{def}{=} x + y = y + x$.

(БИ) $\vdash A(0)$.

1. $x + 0 = x$, аксиома (S5);
2. $x = 0 + x$, доказано в а);
3. $x + 0 = 0 + x$, по следствию 3 и (*mp*).

(ШИ) $\vdash A(y) \to A(y')$.

Покажем, что $A(y) \vdash A(y')$, затем применим теорему о дедукции*.

1. $x + y = y + x$, гипотеза $A(y)$;
2. $x + y' = (x + y)'$, аксиома (S6);
3. $(x + y)' = (y + x)'$, из 1 и аксиомы (S2) по ($mp$);
4. $x + y' = (y + x)'$, из 2 и 3 по следствию 3 и ($mp$);

5. $y' + x = (y + x)'$, (доказательство с применением индукции);

6. $(y + x)' = y' + x$, из 5 по следствию 2 и ($mp$);
7. $x + y' = y' + x$, из 4 и 6 по следствию 3 и ($mp$).

Из (БИ) и (ШИ) по аксиоме (S9) с применением правила (*gen*) получаем $x+y=y+x$.

Опр. Стандартной моделью теории **S** называется интерпретация, совпадающая с арифметикой на множестве $\mathbb{N}\cup\{0\}$.

## §4. Первая теорема Гёделя о неполноте

Теорема (первая теорема Гёделя о неполноте).
В любой непротиворечивой формальной системе, содержащей минимум арифметики (т.е. операции $+$, $\cdot$, $\forall$, $\exists$, и правила действий с ними) найдётся неразрешимая формула.

Любая непротиворечивая формальная система арифметики неразрешима.

Гёделевы номера в системе **S**:

Пусть $g$(символ алфавита) – нечётное число, называемое гёделевым номером символа.

| | |
|---|---|
| $g(\,(\,) = 3$ | $g(x_k) = 5 + 8k$ |
| $g(\,)\,) = 5$ | $g(a_k) = 7 + 8k$ |
| $g(\,,\,) = 7$ | $g(\,f_k(x_1,\ldots,x_n)\,) = 9 + 8 \cdot 2^n 3^k$ |
| $g(\neg) = 9$ | $g(\,A_k(x_1,\ldots,x_n)\,) = 11 + 8 \cdot 2^n 3^k$ |
| $g(\rightarrow) = 11$ | |

Пусть $u = u_1 \dots u_r$ – слово длины $r$ над алфавитом.

$g(u) = p_1^{g(u_1)} \cdot \ldots \cdot p_r^{g(u_r)}$ – гёделев номер слова $u$, где

$p_1 = 2,\ p_2 = 3,\ \dots,\ p_i$ = $i$-ое простое число.

Пример. Гёделев номер формулы в системе **S**.

$f_1(x) = x' = x+1 \ \Rightarrow\ g(\,'\,) = 9 + 8 \cdot 2^1 3^1 = 57$.

$f_2(x,y) = x + y \ \Rightarrow\ g(+) = 9 + 8 \cdot 2^2 3^2 = 297$.

$f_3(x,y) = x \cdot y \ \Rightarrow\ g(\bullet) = 9 + 8 \cdot 2^2 3^3 = 873$.

$0 = a_1$ – первая константа $\Rightarrow\ g(0) = 7 + 8 \cdot 1 = 15$.

$\forall$ – первый предикатный символ местности 1

$\Rightarrow \; g(\forall) = 11 + 8 \cdot 2^1 3^1 = 59$.

= – второй предикатный символ местности 2

$\Rightarrow \; g(=) = 11 + 8 \cdot 2^2 3^2 = 299$.

Пусть $F \overset{def}{=} (\forall x_1)\,(x_1 = 0 \rightarrow x_1' = 0')$.

$g(\;F\;) = ?$

Опр. Гёделев номер последовательности формул $F_1, \ldots, F_r$ определяется $g(F_1, \ldots, F_r) = p_1^{g(F_1)} \cdot \ldots \cdot p_r^{g(F_r)}$, где $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $\ldots$, $p_i$ = $i$-ое простое число.

Замечание: гёделев номер – инъекция (не биекция) из множества всех формул и множества всех выводов формул в $\mathbb{N}$.

Опр. Цифрами в системе **S** называются 0, $0' = \widetilde{1}$, $0'' = \widetilde{2}$, …, $0\underbrace{''\cdots}_{m} = \widetilde{m}$.

Опр. Бинарное отношение $W_1(u, y)$ «$u$ есть гёделев номер формулы $A(x_1)$, и $y$ есть гёделев номер вывода в **S** формулы $A(\widetilde{u})$.

Лемма. Существует формула, выводимая в **S**, выражающая отношение $W_1(u, y)$.

$$F(x_1) = (\forall x_2) \neg W_1(x_1, x_2).$$

Пусть $m$ есть гёделев номер формулы $F(x_1)$.

$$F_W = F(\widetilde{m}) = (\forall x_2) \neg W_1(\widetilde{m}, x_2).$$

Опр. Теория называется ω-непротиворечивой, если для всякой формулы $A(x)$ из того, что при любом $\tilde{n}$ теоремой является $A(\tilde{n})$ следует невозможность того, что $(\exists x)\neg A(x)$ теорема.

Теорема Гёделя для системы **S**.

(1) Если система **S** непротиворечива, то формула $F_W$ невыводима в **S**.

(2) Если система **S** ω-непротиворечива, то формула $\neg F_W$ невыводима в **S**.

Доказательство:
(1) Предположим, что **S** непротиворечива и формула $F_W = F(\tilde{m}) = (\forall x_2)\neg W_1(\tilde{m}, x_2)$ выводима в **S**.

$\vdash (\forall x_2)\neg W_1(\tilde{m}, x_2)$. Обозначим $k$ гёделев номер вывода этой формулы. Тогда отношение $W_1(m, k)$ выполняется.

Следовательно, $\vdash W_1(\tilde{m}, \tilde{k})$.

По аксиоме (A5) $(\forall x)F(x) \to F(t)$, из $(\forall x_2)\neg W_1(\tilde{m}, x_2)$ по (*mp*)

получаем $\vdash \neg W_1(\tilde{m}, \tilde{k})$. Противоречие.

(2) Предположим, что **S** ω-непротиворечива и формула

$\neg F_W = \neg F(\tilde{m}) = \neg(\forall x_2)\neg W_1(\tilde{m}, x_2)$ выводима в **S**.

$\vdash \neg(\forall x_2)\neg W_1(\tilde{m}, x_2)$

Лемма. Если **S** ω-непротиворечива, то **S** непротиворечива.

Следовательно, не выполняется $\vdash (\forall x_2)\neg W_1(\tilde{m}, x_2)$.

Т.е. Для любого номера *n*, *n* не является номером вывода формулы $(\forall x_2)\neg W_1(\tilde{m}, x_2)$, а значит отношение $W_1(m, n)$ не выполняется.

Формула $W_1(\tilde{m}, \tilde{n})$ ложна при любом $\tilde{n}$ $\Rightarrow \neg W_1(\tilde{m}, \tilde{n})$ истинна при любом $\tilde{n}$.

По определению ω-непротиворечивости, из того, что при любом $\tilde{n}$ выполняется $\vdash \neg W_1(\tilde{m}, \tilde{n})$, следует невозможность того, что $\vdash (\exists x_2) \neg\neg W_1(\tilde{m}, x_2)$.

Невозможность $\vdash \neg(\forall x_2) \neg W_1(\tilde{m}, x_2)$. Противоречие.