Глава IV. Философия, формальные системы, арифметика, …

§1. Парадоксы в логических рассуждениях

Парадоксос – с древнегреческого «неожиданный», «странный».

(пара – «около», докса – «мнение, суждение, слава»)

Утверждение, резко расходящееся с общепринятым мнением, или не имеющее логического объяснения.

«Антиномия»

Опр. Софизм – умышленно ложное умозаключение с замаскированной ошибкой.

Парадокс – ситуация, когда в теории доказаны два взаимно исключающие друг друга суждения, причем каждое выведено убедительными (в данной теории) средствами.

(Т.е. наличие парадокса показывает, что теория противоречивая.)

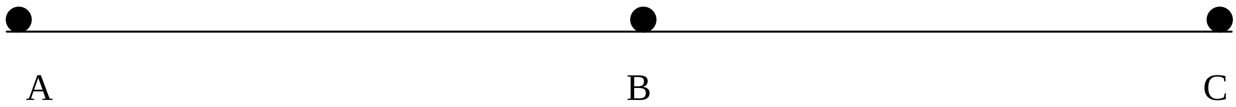
В античной философии обсуждалось несколько парадоксов, известных под названием «апории».
(апория = вопрос)

1. Апории Зенона Элейского.
«Ахиллес и черепаха»
«Дихотомия»
«Куча»
«Летящая стрела»
«Стадион»

Существование 40 апорий.

В современной литературе – 9 апорий.

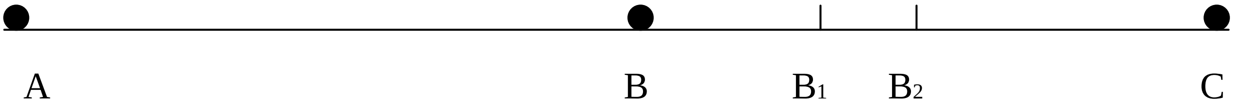
«Ахиллес и черепаха»



Ахиллес и черепаха стартуют одновременно, Ахиллес в пункте A, черепаха в пункте B на расстоянии 100 м, двигаясь в направлении пункта C. Скорость черепахи в 100 раз меньше скорости Ахиллеса.

Ахиллес никогда не догонит черепаху?

Когда Ахиллес добежит до точки B, черепаха будет в точке B_1.
Когда Ахиллес добежит до точки B_1, черепаха будет в точке B_2.
И так далее, до бесконечности.



Ахиллес никогда не догонит черепаху?

«Дихотомия»
Чтобы преодолеть путь, нужно сначала преодолеть половину пути. А чтобы преодолеть половину пути, нужно сначала преодолеть половину половины пути, и так до бесконечности.

Движение никогда не начнётся?

«Куча»
Одна песчинка не является кучей. Если *n* песчинок не куча, то ($n + 1$) – тоже не куча.

Никакое число песчинок не образует кучу?

Объёмно неопределённое понятие «куча».

«Летящая стрела»
Летящая стрела в каждый момент времени покоится, а значит, покоится всегда.

Летящая стрела неподвижна?

В каждый отдельно взятый момент стрела занимает в пространстве место, равное себе же.

«Стадион»

Половина равна целому?

2. Парадокс Рассела. Антиномия Кантора.

Эти парадоксы используют понятие «множество всех множеств».

Парадокс Рассела. Пусть Т – множество всех множеств, не содержащих себя в качестве элемента.

$T = \{ X \mid X \notin X \}$.

Тогда, если $T \in T$, то $T \notin T$. $\Rightarrow$ $\boxed{T \notin T}$

Но, если $T \notin T$, то $T \in T$. $\Rightarrow$ $\boxed{T \in T}$

Антиномия Кантора.

Пусть T – множество всех множеств. Тогда $2^T \subseteq T$. Тогда $|2^T| \leq |T|$. Но по теореме Кантора $|2^T| > |T|$. Противоречие.

3. Парадокс «Деревенский парикмахер».

Парикмахер, живущий в деревне, бреет всех тех и только тех жителей деревни, кто не бреет самого себя.

Вопрос: бреет ли парикмахер сам себя?

Если парикмахер бреет сам себя, то он не может брить себя.

Если парикмахер не бреет сам себя, то он обязан брить себя.

Пусть $D(x)$ = «Человек x живет в деревне»;
$B(x, y)$ = «Человек x бреет человека y» – предикаты на множестве людей. Константа a = парикмахер.

$$D(a) \,\&\, (\forall x)(\, D(x) \,\&\, \neg B(x,x) \leftrightarrow B(a,x) \,) \equiv .$$

$$\equiv D(a) \,\&\, (\forall x)\Big(\; (D(x) \,\&\, \neg B(x,x) \,\&\, B(a,x)) \vee (\neg B(a,x) \,\&$$
$$\& \,(\neg D(x) \vee B(x,x))) \;\Big) \equiv$$

$$\equiv D(a) \,\&\, (\forall x)\Big(\; (D(x) \,\&\, \neg B(x,x) \,\&\, B(a,x)) \vee (\neg B(a,x) \,\&\, \neg D(x)) \vee$$
$$\vee (\neg B(a,x) \,\&\, B(x,x)) \;\Big) \equiv 0.$$

4. Парадокс лжеца.

«Высказывание, которое я сейчас произношу – ложно»

Если это высказывание истинно, то оно ложно.
Если оно ложно, то оно истинно.

$$F \overset{def}{=} (F = 0)$$

§2. Формальные системы (аксиоматические теории)

Опр. Алфавитом формальной системы называется конечное множество.

Формулами теории называются слова над алфавитом, возможно, построенные по определенным правилам.

Аксиомами теории называются некоторые формулы.

Правилом вывода в теории называется правило: из формул $F_1, \ldots, F_k$ непосредственным следствием является формула G.

$$\frac{F_1, \ldots, F_k}{G}$$

Опр. Формальной системой называется набор из алфавита, множества всех возможных формул, множества аксиом, множества правил вывода.

Опр. Пусть Г – подмножество формул теории. Формула F_n выводится из Г, если существует последовательность формул $F_1, F_2, \ldots, F_n$, такая, что каждая F_i либо является аксиомой, либо принадлежит Г, либо получена по правилу вывода из формул среди $F_1, F_2, \ldots, F_{i-1}$.

Обозначение: $\Gamma \vdash F_n$.

Опр. Формула F_n называется теоремой, если она выводится из пустого множества гипотез.

Обозначение: $\vdash F_n$.

Опр. Формальная система называется разрешимой, если существует алгоритм, проверяющий для любой формулы P, является ли P теоремой.

Опр. Формальная система, в алфавите которой есть символ операции отрицания $\neg$, называется непротиворечивой, если не существует формулы P, такой, что и P и $\neg P$ являются теоремами.

Пример.
Геометрия Лобачевского – теория, в которой используется система аксиом Евклида (геометрия на плоскости), кроме аксиомы о параллельных прямых, с добавлением отрицания этой аксиомы.

Если прямая, падающая на две другие, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых (углов), то продолженные неограниченно эти прямые встретятся с этой же стороны.

В плоскости через точку, не лежащую на прямой, можно провести одну и только одну прямую, параллельную данной.

Теорема. Геометрия Лобачевского непротиворечива $\Leftrightarrow$ непротиворечива евклидова геометрия.

Теорема. Пусть теория Т включает в себя алфавит, аксиомы и правило вывода исчисления высказываний, и эта теория противоречивая. Тогда любая формула в ней является теоремой.

Доказательство:
Пусть Т противоречивая. Существует формула P, такая, что $\vdash P$ и $\vdash \neg P$.
Для любой формулы F можно построить последовательность:

$$\underbrace{\cdots,\neg P}_{вывод \neg P},\ \underbrace{\cdots,P}_{вывод P},\cdots,P\to(\neg P\to F),\ \underset{(mp)}{\neg P\to F},\ \underset{(mp)}{F}.$$

(Формула $P\to(\neg P\to F)\equiv 1$, а значит теорема.)

$\vdash F$. Теорема доказана.

Опр. Интерпретацией теории называется отображение φ, ставящее в соответствие символам алфавита теории смысловые значения.
Если при этом выполняются (то есть истинны) все аксиомы теории, то результат называют моделью теории.

«Теория имеет модель»

Независимость аксиом

Опр. Пусть S множество аксиом, $A \in S$. Аксиома A называется независящей от остальных аксиом, если не существует вывода A из $S \setminus A$.

Лемма. Аксиома A является независящей от остальных аксиом $\Leftrightarrow$ исключение A уменьшает множество теорем теории.

Доказательством того, что аксиома A является независящей от остальных аксиом, может служить построение модели в системе аксиом $S \setminus A$, которая не является моделью в S.

Пример: геометрия Лобачевского.

Опр. Система аксиом S называется независимой, если каждая аксиома в S не зависит от остальных.

Опр. Формальная система, в алфавите которой есть символ операции отрицания $\neg$, называется полной, если для любой формулы P, теоремой является или P, или $\neg P$.

Логику высказываний и логику предикатов называют полными, учитывая существование признака для проверки, когда формула является теоремой.

Логика второго порядка – не полная.