Математическая логика

Щербакова Валентина Александровна

экзамен

Глава I. Логика высказываний.

Глава II. Логика предикатов.

Глава III. Расширения логики предикатов и неклассические логики.

Глава IV. Философия, формальные системы, арифметика, …

Литература

1. Замятин А.П. Математическая логика.

2. Мендельсон Элиот. Введение в математическую логику.

Глава I. Логика высказываний

§1. Высказывания и операции с ними. Формулы логики высказываний

Опр. Высказывание – повествовательное предложение, о котором можно сказать: истинно оно или ложно.

Опр. Значение истинности высказывания – истина или ложь.

и	л
1	0

Высказывания делятся на простые и составные.

Опр. Составное высказывание получено из простых при помощи операций (связок).

Операции:

конъюнкция	$X \,\&\, Y$	$X \wedge Y$	
дизъюнкция	$X \vee Y$		
отрицание	$\neg X$	$\overline{X}$	
импликация	$X \rightarrow Y$	$X \Rightarrow Y$	$X \supset Y$
эквиваленция	$X \leftrightarrow Y$		$X \equiv Y$

Опр. Конъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «и», т.е. «…X... и …Y…».

$X \mathbin{\&} Y$

Опр. Дизъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «или», т.е. «…X... или …Y…».

$X \vee Y$

Опр. Конъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «и», т.е. «…X... и …Y…».
$X \& Y$

Опр. Дизъюнкция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи союза «или», т.е. «…X... или …Y…».
$X \vee Y$

Опр. Отрицание высказывания X – высказывание, полученное при помощи приставки «не», т.е. «не …X...».
$\neg X$

Опр. Импликация высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «Если …X..., то …Y…».

$X \to Y$

Опр. Импликация высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «Если …X..., то …Y…».
$X \to Y$

Опр. Эквиваленция высказываний X и Y – высказывание, полученное при помощи конструкции «…X..., если и только если …Y…».
$X \leftrightarrow Y$

Таблицы истинности операций

X	Y	$X \& Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$
0	0				
0	1				
1	0				
1	1				

Таблицы истинности операций

X	Y	$X \,\&\, Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$
0	0	0			
0	1	0			
1	0	0			
1	1	1			

Правило: конъюнкция истинна, только если истинны оба высказывания X и Y.

X	Y	$X \& Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$
0	0	0	0		
0	1	0	1		
1	0	0	1		
1	1	1	1		

Правило: дизъюнкция истинна, если истинно хотя бы одно из высказываний X и Y.

X	$\neg X$
0	1
1	0

X	Y	$X \& Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$
0	0	0	0	1	
0	1	0	1	1	
1	0	0	1	0	
1	1	1	1	1	

Правило:
1) из ложной посылки можно вывести что угодно;
2) импликация ложна, только если из истинной посылки получается ложное заключение.

X	Y	$X \mathbin{\&} Y$	$X \vee Y$	$X \to Y$	$X \leftrightarrow Y$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

Замечание: операция «исключающее или»:

X	Y	X xor Y
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Она совпадает с конструкцией $(X \,\&\, \neg Y) \vee (\neg X \,\&\, Y)$.

Сложение по модулю 2: $X \oplus Y$

Опр. Атомарная формула логики высказываний – заглавная буква латинского алфавита, с индексом или без, а также символ 0 или 1.

Опр. Формула логики высказываний – выражение одного из двух видов:

1) атомарная формула;
2) $(F \mathbin{\&} G)$, $(F \vee G)$, $(\neg F)$, $(F \to G)$, $(F \leftrightarrow G)$,

где F и G – формулы логики высказываний.

Для уменьшения количества скобок договоримся о приоритетах операций:

$\neg$	наивысший
&	
$\vee$	
$\rightarrow$	
$\leftrightarrow$	низший

Пример:

Формула $\neg X \,\&\, \mathrm{Y} \rightarrow Z$ означает $(((\neg X) \,\&\, \mathrm{Y}) \rightarrow Z)$.

§2. Интерпретация, равносильность. Законы логики высказываний

Опр. Интерпретация формулы F в широком смысле – отображение

$$\varphi : \Omega_F \to W$$

из множества Ω_F всех атомарных формул, входящих в F,
в множество W всех высказываний.
(0 – ложное высказывание, 1 – истинное высказывание).

При этом $\varphi(F)$ является составным высказыванием,
соответствующим формуле F при этой интерпретации.

Опр. Интерпретация формулы F в узком смысле – отображение

$$\varphi: \ (\Omega_F \setminus \{0,1\}) \ \to \{0,1\}$$

из множества $(\Omega_F \setminus \{0,1\})$ всех атомарных формул, входящих в F, кроме 0 и 1, в множество значений истинности.

При этом $\varphi(F)$ является значением истинности формулы F при этой интерпретации.

Опр. Формулы F и G называются равносильными, если для любой интерпретации φ (в узком смысле) значения истинности $\varphi(F)$ и $\varphi(G)$ совпадают.

$F \equiv G$ или $F = G$

Опр. Формула F называется тождественно истинной (тавтологией), если для любой интерпретации φ (в узком смысле) значение истинности $\varphi(F)$ равно 1.

$$F \equiv 1$$

Теорема.

$$F \equiv G \iff F \leftrightarrow G \equiv 1.$$

Законы логики высказываний:

1) $F \& 1 \equiv F$

2) $F \vee 1 \equiv 1$

3) $F \& 0 \equiv 0$

4) $F \vee 0 \equiv F$

5) $F \,\&\, F \equiv F$ 6) $F \vee F \equiv F$ Идемпотентность

7) $F \mathbin{\&} G \equiv G \mathbin{\&} F$ 8) $F \vee G \equiv G \vee F$ Коммутативность

9) $(F \mathbin{\&} G) \mathbin{\&} H \equiv F \mathbin{\&} (G \mathbin{\&} H)$

Ассоциативность

10) $(F \vee G) \vee H \equiv F \vee (G \vee H)$

11) $F \mathbin{\&} (G \vee H) \equiv (F \mathbin{\&} G) \vee (F \mathbin{\&} H)$

12) $F \vee (G \mathbin{\&} H) \equiv (F \vee G) \mathbin{\&} (F \vee H)$

Дистрибутивность

13) $F \mathbin{\&} (F \vee H) \equiv F$

14) $F \vee (F \mathbin{\&} H) \equiv F$

Законы поглощения

15) $F \ \& \ \neg F \equiv 0$ Закон противоречия

16) $F \vee \neg F \equiv 1$ Закон исключенного третьего

17) $\neg(F \,\&\, G) \equiv \neg F \vee \neg G$

Законы де Моргана

18) $\neg(F \vee G) \equiv \neg F \,\&\, \neg G$

19) $\neg\neg F \equiv F$ — Закон двойного отрицания

20) $F \to G \equiv \neg F \vee G$ — Выражение импликации

21) $F \leftrightarrow G \equiv (F \to G)\ \&\ (G \to F)$ — Выражение эквиваленции

Пример доказательства равносильности формул:

F	G	$F \to G$	$\neg F \vee G$
0	0	1	
0	1	1	
1	0	0	
1	1	1	

Пример доказательства равносильности формул:

F	G	$F \to G$	$\neg F \vee G$
0	0	1	1
0	1	1	1
1	0	0	0
1	1	1	1