

Смешанное произведение

Опр. **Смешанным** произведением векторов \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} называется число, равное $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = [\vec{a}, \vec{b}] \cdot \vec{c}$

Обозначение: $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$.

Смешанное произведение

СВОЙСТВА.

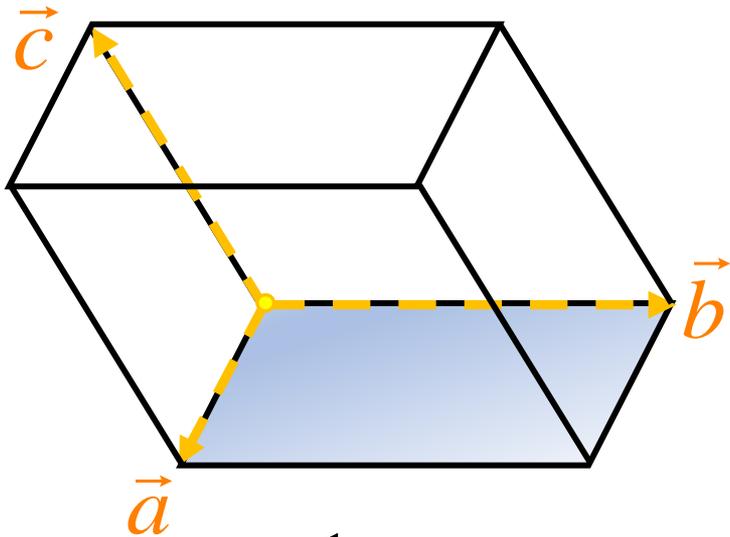
$$1. (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}).$$

$$2. \vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{cases} V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}, & \text{если } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ правая;} \\ -V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}}, & \text{если } (\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) \text{ левая;} \\ 0, & \text{если } \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \text{ компланарны.} \end{cases}$$

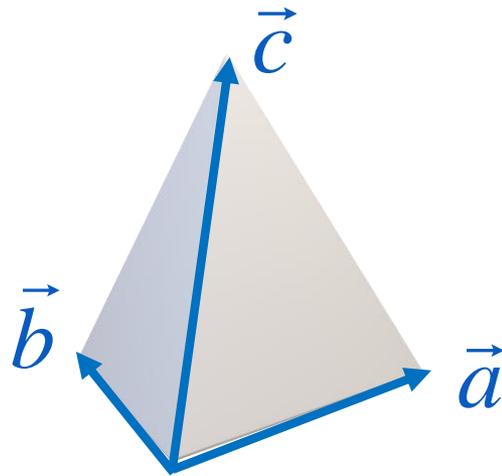
$$3. \text{Объем параллелепипеда: } V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|.$$

Смешанное произведение

3. Объем параллелепипеда: $V_{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}} = |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$.



4. $V_{тетр.} = \frac{1}{6} |\vec{a} \vec{b} \vec{c}|$



Смешанное произведение

5. При перестановке двух сомножителей в смешанном произведении знак смешанного произведения меняется на противоположный.
6. При циклической перестановке сомножителей смешанное произведение не меняется.
7. Векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ компланарны тогда и только тогда, когда $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.
8. Тройка $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – правая $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} > 0$,
 $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ – левая $\Leftrightarrow \vec{a}\vec{b}\vec{c} < 0$.

Смешанное произведение

Теорема. Если $\vec{a} = (x_1, y_1, z_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2, z_2)$,
 $\vec{c} = (x_3, y_3, z_3)$ в ОНБ, то

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Смешанное произведение

Пример. Пусть $A(-1,1,0)$, $B(-2,1,-1)$,
 $C(3,1,0)$, $D(-2,2,1)$ в $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Найти объем
тетраэдра $ABCD$.

$$\vec{a} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-2,1,-1) - (-1,1,0) = (-1,0,-1),$$

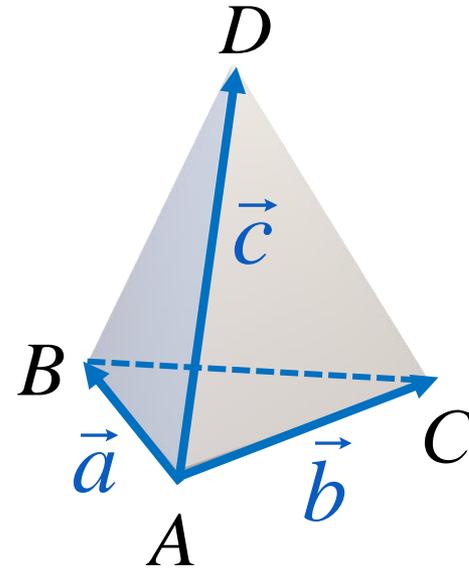
$$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = C - A = (3,1,0) - (-1,1,0) = (4,0,0),$$

$$\vec{c} = \overrightarrow{AD} = D - A = (-2,2,1) - (-1,1,0) = (-1,1,1),$$

Смешанное произведение

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} \left| \vec{a} \vec{b} \vec{c} \right|$$

$$\vec{a} \vec{b} \vec{c} = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 4 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$$



$$= (-1) \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -4$$

$$V_{\text{тетр.}} = \frac{1}{6} \left| -4 \right| = \frac{2}{3}$$