

Вар.: **90697301**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Бенко А.А.**

1. Даны три вектора $\vec{a} = (5, 4)$, $\vec{b} = (-1, 2)$ и $\vec{c} = (-3, 6)$. Найти разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису \vec{a} , \vec{b} .

2. Даны две вершины $A(8, -7)$, $B(7, 4)$ и точка пересечения медиан $M(8, -9)$ треугольника ABC . Найти координаты третьей вершины C .

3. Найти ортогональную составляющую вектора $\vec{b} = (-1, 2, -2)$ относительно вектора $\vec{a} = (-2, -2, 1)$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (6, 4, -3)$.

5. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 3$, вычислить $\left| (-5\vec{a} + 1\vec{b}) \times (-2\vec{a} - 4\vec{b}) \right|^2$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (4, 4, 5)$, $\vec{b} = (-1, -4, 1)$ и $\vec{c} = (-1, -1, -3)$. Найти ориентацию тройки векторов \vec{a} , $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{c} .

7. Объем тетраэдра $V = 12$, три его вершины находятся в точках $A(8, -36, 36)$, $B(10, -32, 35)$ и $C(5, -40, 40)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Ox .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-1, -1, -1)$, $\vec{b} = (3, 3, 2)$ и $\vec{c} = (-18, 14, 4)$. Найти \vec{x} такой, что $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x}) = \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(3, 3)$ и $(-1, 2)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = 4\vec{b}_1 + \vec{b}_2$ в первом базисе.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{x} \times \vec{y}) = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a}\vec{x} & \vec{b}\vec{x} & \vec{c}\vec{x} \\ \vec{a}\vec{y} & \vec{b}\vec{y} & \vec{c}\vec{y} \end{vmatrix}.$$

Вар.: **90697302**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Богданова А.А.**

1. Найти вектор \vec{x} , являющийся проекцией вектора $\vec{y} = (-105, 1, 23)$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a} = (-3, -3, -10)$ и $\vec{b} = (-3, 4, -6)$ при проектировании параллельно вектору $\vec{c} = (-9, -5, 7)$.

2. Даны две точки $A(-7, 3, 8)$ и $B(-6, 6, 6)$. На прямой AB найти такую точку M , чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был в 6 раз длиннее отрезка AB .

3. Найти ортогональную составляющую вектора $\vec{b} = (3, -1, 2)$ относительно вектора $\vec{a} = (1, -2, 2)$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (4, -3, -6)$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 15$ и $\vec{a}\vec{b} = 5$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-3, -1, -3)$, $\vec{b} = (-3, -2, 3)$ и $\vec{c} = (-2, -2, 2)$. Найти вектор \vec{d} длины $6\sqrt{134}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка \vec{d} , \vec{b} , \vec{c} — правая.

7. Установить, лежат ли точки $A(-8, -8, -7)$, $B(-6, -3, -3)$, $C(-9, -3, -9)$ и $D(-11, -3, -3)$ в одной плоскости. Если нет, то найти объем тетраэдра $ABCD$.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (0, -2, -2)$, $\vec{b} = (3, 3, 0)$ и $\vec{c} = (3, -2, -1)$. Используя следствие формулы «БАЦ минус ЦАБ», найти $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(-2, -1)$ и $(-3, -3)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = -23\vec{a}_1 - 19\vec{a}_2$ во втором базисе.

10. Доказать тождество

$$((\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})) \cdot ((\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})) \cdot ((\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^4.$$

Вар.: **90697303**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: Водолазский А.А.

1. Даны четыре вектора $\vec{a} = (-7, 8, 9)$, $\vec{b} = (6, -8, 7)$, $\vec{c} = (-1, -7, -3)$ и $\vec{d} = (-74, 2, 67)$. Подобрать числа α , β и γ так, чтобы векторы $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ и \vec{d} образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

2. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC : $A(-6, -7)$, $B(-3, -11)$, $C(2, -1)$.

3. Найти ортогональную компоненту вектора $\vec{b} = (3, -3, 1)$ на вектор $\vec{a} = (1, 2, -2)$.

4. Найти проекцию вектора $\vec{b} = (2, 1, -1)$ на вектор $\vec{a} = (2, -1, 2)$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 14$, $|\vec{b}| = 13$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 23$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 1, -3)$, $\vec{b} = (-1, 2, 1)$ и $\vec{c} = (-2, 3, 1)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{915}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка \vec{d} , \vec{b} , \vec{c} — правая.

7. Объем тетраэдра $V = 80$, три его вершины находятся в точках $A(-32, -16, -7)$, $B(-28, -20, -5)$ и $C(-37, -15, -4)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Oz .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-2, -3, 2)$, $\vec{b} = (-3, 0, 1)$ и $\vec{c} = (6, 0, 6)$. Найти \vec{x} такой, что $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x}) = \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(-1, 2)$ и $(-2, 3)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = -3\vec{a}_1 + 3\vec{a}_2$ во втором базисе.

10. Доказать тождество

$$((\vec{a} \times \vec{b}) \times (\vec{b} \times \vec{c})) \cdot ((\vec{b} \times \vec{c}) \times (\vec{c} \times \vec{a})) \cdot ((\vec{c} \times \vec{a}) \times (\vec{a} \times \vec{b})) = (\vec{a}\vec{b}\vec{c})^4.$$

Вар.: **90697304**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: Гудов И.А.

1. Даны три вектора $\vec{a} = (-5, -3)$, $\vec{b} = (-7, -1)$ и $\vec{c} = (25, -17)$. Найти разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису \vec{a} , \vec{b} .

2. Отрезок, ограниченный точками $A(2, -9)$ и $B(-2, 4)$, разделен на 6 равных частей. Найти координаты точек деления.

3. Найти ортогональную составляющую вектора $\vec{b} = (2, -1, -3)$ относительно вектора $\vec{a} = (4, 3, -6)$.

4. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 1$, вычислить $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})^2$, где $\alpha = 5$, $\beta = -2$, $\gamma = 1$.

5. Даны вершины треугольника $A(7, 1, -3)$, $B(5, 4, -2)$ и $C(6, -2, -2)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC , не используя формулу Герона.

6. Даны векторы $\vec{a} = (2, 5, 2)$, $\vec{b} = (-2, 2, 5)$ и $\vec{c} = (-2, 1, -5)$. Найти ориентацию тройки векторов \vec{a} , $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{c} .

7. Объем тетраэдра $V = 25$, три его вершины находятся в точках $A(15, 10, -7)$, $B(17, 7, -2)$ и $C(16, 6, -8)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Oz .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (3, 2, -3)$, $\vec{b} = (2, 2, 0)$ и $\vec{c} = (-3, 3, 1)$. Используя следствие формулы «БАЦ минус ЦАБ», найти $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

9. Прямоугольную систему координат плоскости заменили на новую, перенесли начало координат в точку $P(4, -1)$ и повернув координатные оси на угол 45° против часовой стрелки. Записать формулы замены координат.

10. Даны произвольные векторы \vec{p} , \vec{q} , \vec{r} , \vec{n} . Доказать, что для $\vec{a} = \vec{p} \times \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{q} \times \vec{n}$, $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{n}$ выполняется $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Вар.: **90697305**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: Делягин Ф.О.

1. Найти вектор \vec{x} , являющийся проекцией вектора $\vec{y} = (63, -14, -25)$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a} = (-9, 5, 7)$ и $\vec{b} = (-4, -3, 9)$ при проектировании параллельно вектору $\vec{c} = (4, 10, -1)$.

2. Даны две точки $A(2, -5, -2)$ и $B(-2, -5, -6)$. На прямой AB найти такую точку M , чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был в 13 раз длиннее отрезка AB .

3. Даны два вектора $\vec{a} = (1, 8, -6)$ и $\vec{b} = (3, 5, -1)$. Найти вектор \vec{x} , перпендикулярный к оси Oy и удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = -34$, $\vec{x}\vec{b} = -17$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (6, -4, -3)$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 13$, $|\vec{b}| = 9$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 10$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

6. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 135° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — левая. Зная, что $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 9$, $|\vec{c}| = 3\sqrt{2}$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

7. Объем тетраэдра $V = 21$, три его вершины находятся в точках $A(42, 10, -63)$, $B(38, 12, -60)$ и $C(39, 6, -66)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Oy .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-3, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, 3)$ и $\vec{c} = (2, 1, 3)$. Найти \vec{x} такой, что $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x}) = \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(-2, -1)$ и $(-3, 2)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = -9\vec{a}_1 - \vec{a}_2$ во втором базисе.

10. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Доказать, что $|\vec{AM}|^2 + |\vec{BM}|^2 + |\vec{CM}|^2 = (|\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + |\vec{AC}|^2)/3$.

Вар.: **90697306**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: Кайгородов В.Н.

1. Найти вектор \vec{x} , являющийся проекцией вектора $\vec{y} = (23, -59, -29)$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a} = (-1, -8, -8)$ и $\vec{b} = (2, -7, -2)$ при проектировании параллельно вектору $\vec{c} = (7, -5, 5)$.

2. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC : $A(-2, 6)$, $B(1, 10)$, $C(-10, 0)$.

3. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (-2, 7, -1)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a} = 540$.

4. Найти проекцию вектора $\vec{b} = (6, 8, 4)$ на вектор $\vec{a} = (-1, 2, 2)$.

5. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{3\pi}{4}$. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 3$, вычислить $\left| (-3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (-2\vec{a} - 2\vec{b}) \right|^2$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (3, 1, -2)$, $\vec{b} = (-2, 1, 1)$ и $\vec{c} = (-2, 1, -1)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{110}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — левая.

7. Даны координаты вершин тетраэдра $OABC$: $O(5, 2, 6)$, $A(3, -1, 11)$, $B(1, -1, 7)$, $C(3, -2, 8)$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах, соединяющих вершину O с серединами ребер AB , AC и BC .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-1, 3, -3)$, $\vec{b} = (2, 0, 3)$ и $\vec{c} = (2, 1, -2)$. Используя следствие формулы «БАЦ минус ЦАБ», найти $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(1, -3)$ и $(1, -2)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = 3\vec{a}_1 - 4\vec{a}_2$ во втором базисе.

10. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}|\vec{AC} \times \vec{BD}|$.

Вар.: **90697307**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Каро Вальверде А.**

1. Даны три вектора $\vec{a} = (4, 3)$, $\vec{b} = (5, -2)$ и $\vec{c} = (-42, 3)$. Найти разложение вектора $\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису \vec{a} , \vec{b} .

2. Даны две точки $A(-2, 9, -3)$ и $B(3, -1, -3)$. На прямой AB найти такую точку M , чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был в 6 раз длиннее отрезка AB .

3. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (1, 7, -9)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a} = -131$.

4. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 10$, $|\vec{c}| = 4$, вычислить $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})^2$, где $\alpha = -2$, $\beta = 3$, $\gamma = -2$.

5. Даны вершины треугольника $A(-10, 3, -4)$, $B(-13, 4, -1)$ и $C(-7, 0, -2)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC , не используя формулу Герона.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-3, 1, -2)$, $\vec{b} = (-3, -4, -4)$ и $\vec{c} = (-1, 2, 2)$. Найти ориентацию тройки векторов \vec{a} , $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{c} .

7. Объем тетраэдра $V = 30$, три его вершины находятся в точках $A(-20, 10, 10)$, $B(-22, 14, 11)$ и $C(-18, 11, 14)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Oy .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (1, 2, -2)$, $\vec{b} = (2, 3, 1)$ и $\vec{c} = (-1, -2, 3)$. Используя формулу «БАЦ минус ЦАБ», найти $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

9. Прямоугольную систему координат плоскости заменили на новую, перенеся начало координат в точку $P(-3, 5)$ и повернув координатные оси на угол 210° против часовой стрелки. Записать формулы замены координат.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 + |(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}|^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \cdot |\vec{c}|^2.$$

Вар.: **90697308**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Каткова Л.С.**

1. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся, как 9:7. Принимая за базисные векторы \vec{AC} и \vec{BD} , найти в этом базисе координаты векторов \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} и \vec{DA} .

2. Даны две точки $A(4, -10, 3)$ и $B(-8, 1, -8)$. На прямой AB найти такую точку M , чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был в 20 раз длиннее отрезка AB .

3. Найти ортогональную составляющую вектора $\vec{b} = (-1, 2, 1)$ относительно вектора $\vec{a} = (2, -1, -2)$.

4. Найти проекцию вектора $\vec{b} = (1, 3, -4)$ на вектор $\vec{a} = (-3, -4, -6)$.

5. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{\pi}{4}$. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 4$, вычислить $\left| (2\vec{a} + 4\vec{b}) \times (-6\vec{a} - 6\vec{b}) \right|^2$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-1, -1, 1)$, $\vec{b} = (-2, 3, -1)$ и $\vec{c} = (1, -2, 3)$. Найти вектор \vec{d} длины $2\sqrt{38}$, перпендикулярный векторам \vec{a} и \vec{b} и направленный так, чтобы тройки \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{a} , \vec{b} , \vec{d} имели одинаковую ориентацию.

7. Даны координаты вершин тетраэдра $OABC$: $O(-3, 2, -6)$, $A(-5, -2, -4)$, $B(-2, 0, -11)$, $C(-5, -3, -11)$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах, соединяющих вершину O с серединами ребер AB , AC и BC .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-3, 2, 1)$, $\vec{b} = (1, -2, 1)$ и $\vec{c} = (3, 3, -1)$. Используя формулу «БАЦ минус ЦАБ», найти $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

9. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-2, 11)$, $B(4, 19)$, $C(-5, -2)$ приобретают новые координаты $(-3, -1)$, $(-5, -5)$, $(1, 4)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

10. Точка O является центром тяжести треугольника ABC , т. е. точкой пересечения медиан. Доказать, что $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.

Вар.: **90697309**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Коновалов Н.В.**

1. Даны три вектора $\vec{a} = (-10, 4)$, $\vec{b} = (-10, -5)$ и $\vec{c} = (-10, 22)$. Найти разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису \vec{a}, \vec{b} .

2. Отрезок, ограниченный точками $A(-1, 9)$ и $B(-7, -4)$, разделен на 6 равных частей. Найти координаты точек деления.

3. Найти ортогональную составляющую вектора $\vec{b} = (-2, -3, -3)$ относительно вектора $\vec{a} = (2, -1, 2)$.

4. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$, $|\vec{c}| = 2$, вычислить $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})^2$, где $\alpha = -5$, $\beta = -4$, $\gamma = 1$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 10$, $|\vec{b}| = 15$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 83$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

6. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 135° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — левая. Зная, что $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 6\sqrt{2}$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

7. Объем тетраэдра $V = 32$, три его вершины находятся в точках $A(96, -10, -64)$, $B(92, -11, -60)$ и $C(101, -9, -61)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Oy .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (3, 2, 2)$, $\vec{b} = (-3, -2, 1)$ и $\vec{c} = (-3, 1, -1)$. Используя формулу «БАЦ минус ЦАБ», найти $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(2, 2)$ и $(2, -3)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{b}_1 + 2\vec{b}_2$ в первом базисе.

10. Даны произвольные векторы $\vec{p}, \vec{q}, \vec{r}, \vec{n}$. Доказать, что для $\vec{a} = \vec{p} \times \vec{n}$, $\vec{b} = \vec{q} \times \vec{n}$, $\vec{c} = \vec{r} \times \vec{n}$ выполняется $\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0$.

Вар.: **90697310**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Круглов А.В.**

1. Найти вектор \vec{x} , являющийся проекцией вектора $\vec{y} = (-163, 91, -74)$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a} = (8, -9, 9)$ и $\vec{b} = (-7, -3, 7)$ при проектировании параллельно вектору $\vec{c} = (7, -4, 5)$.

2. Даны две вершины $A(7, 7)$, $B(-5, 3)$ и точка пересечения медиан $M(4, 4)$ треугольника ABC . Найти координаты третьей вершины C .

3. Найти ортогональную компоненту вектора $\vec{b} = (3, 2, -2)$ на вектор $\vec{a} = (-3, -6, 4)$.

4. Найти проекцию вектора $\vec{b} = (8, -1, 7)$ на вектор $\vec{a} = (-4, 3, -6)$.

5. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{5\pi}{6}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить $\left| (-3\vec{a} + 2\vec{b}) \times (4\vec{a} - 2\vec{b}) \right|^2$.

6. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 45° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — правая. Зная, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 6\sqrt{2}$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

7. Установить, лежат ли точки $A(5, -2, -3)$, $B(0, 1, -4)$, $C(7, -5, 0)$ и $D(2, 3, -8)$ в одной плоскости. Если нет, то найти объем тетраэдра $ABCD$.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (1, -1, 2)$, $\vec{b} = (-1, 0, 0)$ и $\vec{c} = (0, 2, -3)$. Найти \vec{x} такой, что $(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{c}$.

9. Прямоугольную систему координат плоскости заменили на новую, перенесли начало координат в точку $P(1, -1)$ и повернув координатные оси на угол 300° против часовой стрелки. Записать формулы замены координат.

10. Пусть M — точка пересечения медиан треугольника ABC . Доказать, что $|\vec{AM}|^2 + |\vec{BM}|^2 + |\vec{CM}|^2 = (|\vec{AB}|^2 + |\vec{BC}|^2 + |\vec{AC}|^2)/3$.

Вар.: **90697311**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Кулигин Д.И.**

1. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся, как 14:5. Принимая за базисные векторы \vec{AC} и \vec{BD} , найти в этом базисе координаты векторов \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} и \vec{DA} .

2. Даны две вершины $A(-5, 7)$, $B(8, 5)$ и точка пересечения медиан $M(2, -3)$ треугольника ABC . Найти координаты третьей вершины C .

3. Найти ортогональную компоненту вектора $\vec{b} = (3, 3, 3)$ на вектор $\vec{a} = (-6, -4, -3)$.

4. Может ли какой-нибудь вектор образовывать с осями прямоугольной декартовой системы координат углы 135° , 120° , 45° ? Ответ надо обосновать.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 13$ и $\vec{a}\vec{b} = -11$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-1, 2, 3)$, $\vec{b} = (-3, -3, 3)$ и $\vec{c} = (1, -2, -1)$. Найти вектор \vec{d} длины $24\sqrt{3}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} — левая.

7. Объем тетраэдра $V = 57$, три его вершины находятся в точках $A(38, -19, 10)$, $B(36, -16, 15)$ и $C(41, -14, 15)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, что она лежит на оси Oz .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-3, 1, 2)$, $\vec{b} = (-2, 0, 0)$ и $\vec{c} = (0, -8, -4)$. Найти \vec{x} такой, что $(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(-3, -3)$ и $(3, 2)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = -\vec{b}_1 + 4\vec{b}_2$ в первом базисе.

10. Доказать, что а) если векторы $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ и $\vec{c} \times \vec{a}$ компланарны, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны; б) если векторы $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ и $\vec{c} \times \vec{a}$ компланарны, то они коллинеарны.

Вар.: **90697312**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Лазуков Н.В.**

1. Даны три вершины параллелограмма $A(-1, 7, -8)$, $B(-10, 3, -8)$ и $C(10, 5, -8)$. Найти координаты четвертой вершины D .

2. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC : $A(-9, -3)$, $B(-12, -7)$, $C(-1, 3)$.

3. Найти ортогональную составляющую вектора $\vec{b} = (-3, 2, 3)$ относительно вектора $\vec{a} = (2, -1, -2)$.

4. Может ли какой-нибудь вектор образовывать с осями прямоугольной декартовой системы координат углы 60° , 90° , 150° ? Ответ надо обосновать.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 6$ и $\vec{a}\vec{b} = -4$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (2, -3, 1)$, $\vec{b} = (-2, 2, 3)$ и $\vec{c} = (-3, -3, 1)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{566}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} — правая.

7. Даны вершины тетраэдра $A(-3, -4, -6)$, $B(-2, -6, -9)$, $C(-2, -3, -5)$ и $D(-1, -7, -5)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D , не используя формулу Герона.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (1, -3, -3)$, $\vec{b} = (0, 3, 1)$ и $\vec{c} = (-3, -1, -1)$. Используя следствие формулы «БАЦ минус ЦАБ», найти $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

9. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-3, -16)$, $B(2, -11)$, $C(-4, 1)$ приобретают новые координаты $(-3, 5)$, $(-5, 4)$, $(1, -2)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{x}\vec{y}\vec{z}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{x} & \vec{b}\vec{x} & \vec{c}\vec{x} \\ \vec{a}\vec{y} & \vec{b}\vec{y} & \vec{c}\vec{y} \\ \vec{a}\vec{z} & \vec{b}\vec{z} & \vec{c}\vec{z} \end{vmatrix}.$$

Вар.: **90697313**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Матаев И.Н.**

1. Даны три вершины параллелограмма $A(5, -8, -2)$, $B(-3, -4, -4)$ и $C(-7, -8, -1)$. Найти координаты четвертой вершины D .

2. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC : $A(-6, 7)$, $B(-10, 10)$, $C(0, -1)$.

3. Найти ортогональную компоненту вектора $\vec{b} = (-2, 2, -1)$ на вектор $\vec{a} = (-1, -2, 2)$.

4. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 1$, $|\vec{c}| = 3$, вычислить $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})^2$, где $\alpha = -3$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$.

5. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{\pi}{4}$. Зная, что $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить $\left|(-4\vec{a} + \vec{b}) \times (-6\vec{a} - 6\vec{b})\right|^2$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (2, -3, -2)$, $\vec{b} = (3, -2, 1)$ и $\vec{c} = (2, 2, -2)$. Найти вектор \vec{d} длины $2\sqrt{138}$, перпендикулярный векторам \vec{a} и \vec{b} и направленный так, чтобы тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

7. Установить, лежат ли точки $A(-10, -4, -10)$, $B(-8, -9, -15)$, $C(-13, -5, -9)$ и $D(-8, -7, -14)$ в одной плоскости. Если нет, то найти объем тетраэдра $ABCD$.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-3, -1, -2)$, $\vec{b} = (-3, -3, 2)$ и $\vec{c} = (-24, 8, -24)$. Найти \vec{x} такой, что $(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(2, 3)$ и $(1, 2)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = 5\vec{b}_1 + 4\vec{b}_2$ в первом базисе.

10. Доказать, что сумма векторов, перпендикулярных к граням произвольного тетраэдра, равных по длине площадям этих граней и направленных в сторону вершин, противоположащих этим граням, равна нулю.

Вар.: **90697314**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Мустафина С.С.**

1. Даны три вектора $\vec{a} = (5, 2)$, $\vec{b} = (-5, 9)$ и $\vec{c} = (-30, -67)$. Найти разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису \vec{a}, \vec{b} .

2. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC : $A(-3, -4)$, $B(0, 0)$, $C(-11, -10)$.

3. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (-10, -5, 10)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a} = -450$.

4. Может ли какой-нибудь вектор образовывать с осями прямоугольной декартовой системы координат углы 30° , 60° , 90° ? Ответ надо обосновать.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 9$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 16$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-3, -3, 2)$, $\vec{b} = (-1, -2, -1)$ и $\vec{c} = (-3, -1, -3)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{83}$, перпендикулярный векторам \vec{a} и \vec{b} и направленный так, чтобы тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

7. Даны вершины тетраэдра $A(-2, -2, 5)$, $B(-1, 0, 8)$, $C(0, 1, 8)$ и $D(-3, -4, 8)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D , не используя формулу Герона.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (0, -3, -1)$, $\vec{b} = (0, 3, -3)$ и $\vec{c} = (-2, 3, 1)$. Используя формулу «БАЦ минус ЦАБ», найти $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(2, 3)$ и $(2, -1)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = -5\vec{b}_1 - 2\vec{b}_2$ в первом базисе.

10. Доказать, что если векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны, то $(\vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})))) = (\vec{a}^2)^2\vec{b}$.

Вар.: **90697315**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Птушко В.А.**

1. Даны четыре вектора $\vec{a} = (7, -8, -8)$, $\vec{b} = (3, 9, -2)$, $\vec{c} = (7, -2, 3)$ и $\vec{d} = (-58, 80, 6)$. Подобрать числа α , β и γ так, чтобы векторы $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ и \vec{d} образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

2. Даны две точки $A(-5, 5, -10)$ и $B(-6, -7, -7)$. На прямой AB найти такую точку M , чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был в 10 раз длиннее отрезка AB .

3. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (-5, -3, -8)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a} = -784$.

4. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 7$, $|\vec{c}| = 8$, вычислить $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})^2$, где $\alpha = -2$, $\beta = -4$, $\gamma = 3$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 10$ и $\vec{a}\vec{b} = -10$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-4, 5, -1)$, $\vec{b} = (-5, 2, 3)$ и $\vec{c} = (-5, -1, 4)$. Найти ориентацию тройки векторов \vec{a} , $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{c} .

7. Даны вершины тетраэдра $A(6, -6, 4)$, $B(8, -8, 2)$, $C(8, -3, 7)$ и $D(8, -5, 3)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D , не используя формулу Герона.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-1, -1, 1)$, $\vec{b} = (2, 1, 0)$ и $\vec{c} = (-2, -1, -1)$. Используя следствие формулы «БАЦ минус ЦАБ», найти $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(-3, 1)$ и $(2, -3)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = 4\vec{b}_1 - 3\vec{b}_2$ в первом базисе.

10. Доказать тождество $\vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}\vec{c}\vec{d}) + \vec{b}(\vec{c}\vec{a}\vec{d}) + \vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d})$.

Вар.: **90697316**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Рощин К.К.**

1. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся, как 19:4. Принимая за базисные векторы \vec{AC} и \vec{BD} , найти в этом базисе координаты векторов \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} и \vec{DA} .

2. Даны две вершины $A(7, -4)$, $B(8, -1)$ и точка пересечения медиан $M(-7, 6)$ треугольника ABC . Найти координаты третьей вершины C .

3. Даны два вектора $\vec{a} = (1, 3, -6)$ и $\vec{b} = (7, 3, 2)$. Найти вектор \vec{x} , перпендикулярный к оси Oz и удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = -8$, $\vec{x}\vec{b} = -38$.

4. Может ли какой-нибудь вектор образовывать с осями прямоугольной декартовой системы координат углы 30° , 120° , 30° ? Ответ надо обосновать.

5. Даны вершины треугольника $A(9, -8, 5)$, $B(10, -7, 6)$ и $C(6, -10, 3)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC , не используя формулу Герона.

6. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 60° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — левая. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 9$, $|\vec{c}| = 8\sqrt{3}$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

7. Установить, лежат ли точки $A(6, -7, 2)$, $B(7, -3, 0)$, $C(4, -11, -3)$ и $D(2, -9, -2)$ в одной плоскости. Если нет, то найти объем тетраэдра $ABCD$.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-1, 1, -2)$, $\vec{b} = (1, -3, 1)$ и $\vec{c} = (3, 2, -3)$. Используя формулу «БАЦ минус ЦАБ», найти $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

9. Прямоугольную систему координат плоскости заменили на новую, перенесли начало координат в точку $P(2, -1)$ и повернув координатные оси на угол 225° против часовой стрелки. Записать формулы замены координат.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{x}\vec{y}\vec{z}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{x} & \vec{b}\vec{x} & \vec{c}\vec{x} \\ \vec{a}\vec{y} & \vec{b}\vec{y} & \vec{c}\vec{y} \\ \vec{a}\vec{z} & \vec{b}\vec{z} & \vec{c}\vec{z} \end{vmatrix}.$$

Вар.: **90697317**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Рылова Е.В.**

1. Даны четыре вектора $\vec{a} = (-6, -8, -4)$, $\vec{b} = (-6, -8, -6)$, $\vec{c} = (10, 5, 7)$ и $\vec{d} = (-204, -197, -157)$. Подобрать числа α , β и γ так, чтобы векторы $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ и \vec{d} образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

2. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC : $A(5, -7)$, $B(8, -11)$, $C(-3, -13)$.

3. Даны два вектора $\vec{a} = (-1, -3, -6)$ и $\vec{b} = (-5, -1, 2)$. Найти вектор \vec{x} , перпендикулярный к оси Ox и удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = 3$, $\vec{x}\vec{b} = -7$.

4. Найти проекцию вектора $\vec{b} = (1, -6, 9)$ на вектор $\vec{a} = (-3, -6, -4)$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 13$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 10$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-2, 2, 2)$, $\vec{b} = (-2, 3, -1)$ и $\vec{c} = (-1, 1, 2)$. Найти вектор \vec{d} длины $2\sqrt{155}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка \vec{d} , \vec{b} , \vec{c} — правая.

7. Объем тетраэдра $V = 13$, три его вершины находятся в точках $A(-13, 1, -39)$, $B(-17, 6, -42)$ и $C(-10, 5, -40)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Oy .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (1, 3, 0)$, $\vec{b} = (2, -1, -2)$ и $\vec{c} = (2, 8, -2)$. Найти \vec{x} такой, что $(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{c}$.

9. Прямоугольную систему координат плоскости заменили на новую, перенеся начало координат в точку $P(5, 3)$ и повернув координатные оси на угол 60° против часовой стрелки. Записать формулы замены координат.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a}\vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{a}\vec{c})(\vec{d} \times \vec{b}) + (\vec{a}\vec{d})(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}\vec{c}\vec{d}).$$

Вар.: **90697318**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Садрисламов Р.Р.**

1. Даны четыре вектора $\vec{a} = (6, -5, -2)$, $\vec{b} = (-9, 5, 7)$, $\vec{c} = (-4, 4, -7)$ и $\vec{d} = (-43, 53, -64)$. Подобрать числа α , β и γ так, чтобы векторы $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ и \vec{d} образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

2. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC : $A(3, 8)$, $B(6, 4)$, $C(-5, 14)$.

3. Найти ортогональную компоненту вектора $\vec{b} = (-2, 1, 2)$ на вектор $\vec{a} = (1, 2, 2)$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (2, -1, -2)$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 14$, $|\vec{b}| = 11$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 16$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (1, 3, 4)$, $\vec{b} = (2, 1, -5)$ и $\vec{c} = (1, -1, -5)$. Найти ориентацию тройки векторов \vec{a} , $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{c} .

7. Объем тетраэдра $V = 165$, три его вершины находятся в точках $A(-9, 33, -66)$, $B(-4, 37, -71)$ и $C(-10, 38, -64)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Ox .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (3, 0, 2)$, $\vec{b} = (2, 1, -3)$ и $\vec{c} = (2, 0, -2)$. Используя следствие формулы «БАЦ минус ЦАБ», найти $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(3, 1)$ и $(-2, -2)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = -9\vec{a}_1 - 7\vec{a}_2$ во втором базисе.

10. Доказать, что а) если векторы $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ и $\vec{c} \times \vec{a}$ компланарны, то векторы \vec{a} , \vec{b} и \vec{c} компланарны; б) если векторы $\vec{a} \times \vec{b}$, $\vec{b} \times \vec{c}$ и $\vec{c} \times \vec{a}$ компланарны, то они коллинеарны.

Вар.: **90697319**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: Семериков Р.А.

1. Даны четыре вектора $\vec{a} = (-10, 7, -7)$, $\vec{b} = (-3, -6, 9)$, $\vec{c} = (-3, -3, 1)$ и $\vec{d} = (-47, -16, 3)$. Подобрать числа α , β и γ так, чтобы векторы $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ и \vec{d} образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

2. Даны две вершины $A(3, -3)$, $B(-4, -7)$ и точка пересечения медиан $M(5, -5)$ треугольника ABC . Найти координаты третьей вершины C .

3. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (4, 9, -10)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a} = 985$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (-2, 2, 1)$.

5. Даны вершины треугольника $A(4, -4, -8)$, $B(1, -3, -7)$ и $C(6, -6, -11)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC , не используя формулу Герона.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-3, 3, -2)$, $\vec{b} = (2, -1, -1)$ и $\vec{c} = (-2, -3, -1)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{6}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} — левая.

7. Даны координаты вершин тетраэдра $OABC$: $O(-8, -1, 4)$, $A(-12, 1, 9)$, $B(-10, -5, 9)$, $C(-13, -5, 9)$. Вычислить объем параллелипипеда, построенного на векторах, соединяющих вершину O с серединами ребер AB , AC и BC .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (1, 2, 1)$, $\vec{b} = (3, 0, 3)$ и $\vec{c} = (-1, 2, -3)$. Используя следствие формулы «БАЦ минус ЦАБ», найти $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

9. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-18, 10)$, $B(-14, 4)$, $C(10, 28)$ приобретают новые координаты $(5, -3)$, $(3, -3)$, $(3, 5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

10. Точка O является центром тяжести треугольника ABC , т. е. точкой пересечения медиан. Доказать, что $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$.

Вар.: **90697320**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: Сизько А.В.

1. Найти вектор \vec{x} , являющийся проекцией вектора $\vec{y} = (54, -46, -79)$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a} = (-4, -2, -9)$ и $\vec{b} = (5, 10, -1)$ при проектировании параллельно вектору $\vec{c} = (8, -7, -4)$.

2. Даны две вершины $A(-9, 7)$, $B(-2, -6)$ и точка пересечения медиан $M(2, -6)$ треугольника ABC . Найти координаты третьей вершины C .

3. Даны два вектора $\vec{a} = (-7, 1, 3)$ и $\vec{b} = (7, -5, 2)$. Найти вектор \vec{x} , перпендикулярный к оси Oy и удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = -44$, $\vec{x}\vec{b} = 29$.

4. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 2$, вычислить $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})^2$, где $\alpha = 1$, $\beta = -5$, $\gamma = -5$.

5. Даны вершины треугольника $A(-8, -6, -7)$, $B(-11, -7, -9)$ и $C(-10, -4, -10)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC , не используя формулу Герона.

6. Даны векторы $\vec{a} = (2, -3, -2)$, $\vec{b} = (-2, -1, -3)$ и $\vec{c} = (-3, -1, 1)$. Найти вектор \vec{d} длины $2\sqrt{213}$, перпендикулярный векторам \vec{a} и \vec{b} и направленный так, чтобы тройки \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} и \vec{a} , \vec{b} , \vec{d} имели одинаковую ориентацию.

7. Даны координаты вершин тетраэдра $OABC$: $O(-1, -7, -7)$, $A(-3, -12, -10)$, $B(-2, -5, -12)$, $C(-5, -3, -9)$. Вычислить объем параллелипипеда, построенного на векторах, соединяющих вершину O с серединами ребер AB , AC и BC .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (0, 3, -2)$, $\vec{b} = (2, -3, -3)$ и $\vec{c} = (16, -12, -18)$. Найти \vec{x} такой, что $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x}) = \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(3, 3)$ и $(-1, -3)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = -11\vec{a}_1 - 15\vec{a}_2$ во втором базисе.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a}\vec{b})(\vec{c} \times \vec{d}) + (\vec{a}\vec{c})(\vec{d} \times \vec{b}) + (\vec{a}\vec{d})(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}\vec{c}\vec{d}).$$

Вар.: **90697321**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: Стерхов Д.Ю.

1. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся, как 7:3. Принимая за базисные векторы \vec{AC} и \vec{BD} , найти в этом базисе координаты векторов \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} и \vec{DA} .

2. Даны две точки $A(-3, 5, 8)$ и $B(-7, 9, -3)$. На прямой AB найти такую точку M , чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был в 12 раз длиннее отрезка AB .

3. Найти ортогональную составляющую вектора $\vec{b} = (1, 3, -1)$ относительно вектора $\vec{a} = (-2, 1, 2)$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (-2, 1, -2)$.

5. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{2\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 5$, $|\vec{b}| = 7$, вычислить $\left|(-2\vec{a} + 3\vec{b}) \times (4\vec{a} - 4\vec{b})\right|^2$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (3, 3, -3)$, $\vec{b} = (-1, -3, 2)$ и $\vec{c} = (2, 1, 3)$. Найти вектор \vec{d} длины $2\sqrt{6}$, перпендикулярный векторам \vec{a} и \vec{b} и направленный так, чтобы тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

7. Объем тетраэдра $V = 55$, три его вершины находятся в точках $A(33, 6, -33)$, $B(32, 9, -35)$ и $C(29, 10, -30)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Oy .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (3, 1, 3)$, $\vec{b} = (-2, 0, 1)$ и $\vec{c} = (-2, 1, 3)$. Используя формулу «БАЦ минус ЦАБ», найти $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

9. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-9, -15)$, $B(14, 24)$, $C(5, 11)$ приобретают новые координаты $(3, -5)$, $(-4, 4)$, $(1, 5)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}))) = (\vec{a} \times \vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a} \times \vec{d})(\vec{b}\vec{c}).$$

Вар.: **90697322**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: Ступников М.М.

1. Даны четыре вектора $\vec{a} = (4, 4, 10)$, $\vec{b} = (-9, -4, -9)$, $\vec{c} = (-5, 7, -2)$ и $\vec{d} = (-156, 14, -150)$. Подобрать числа α , β и γ так, чтобы векторы $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ и \vec{d} образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

2. Даны две точки $A(-5, 2, -3)$ и $B(6, -6, 7)$. На прямой AB найти такую точку M , чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был в 20 раз длиннее отрезка AB .

3. Найти ортогональную составляющую вектора $\vec{b} = (1, 3, 3)$ относительно вектора $\vec{a} = (-6, -4, -3)$.

4. Может ли какой-нибудь вектор образовывать с осями прямоугольной декартовой системы координат углы 135° , 45° , 30° ? Ответ надо обосновать.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 8$ и $\vec{a}\vec{b} = -17$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-3, -2, -2)$, $\vec{b} = (-3, -1, 1)$ и $\vec{c} = (-1, 1, -1)$. Найти вектор \vec{d} длины $\sqrt{106}$, перпендикулярный векторам \vec{a} и \vec{b} и направленный так, чтобы тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

7. Даны координаты вершин тетраэдра $OABC$: $O(6, -3, -2)$, $A(10, 0, 3)$, $B(7, -2, -3)$, $C(2, 2, 0)$. Вычислить объем параллелипипеда, построенного на векторах, соединяющих вершину O с серединами ребер AB , AC и BC .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-2, 3, -2)$, $\vec{b} = (3, 0, 2)$ и $\vec{c} = (16, 16, -24)$. Найти \vec{x} такой, что $(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(-1, 1)$ и $(-1, 2)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = 5\vec{b}_1 + 3\vec{b}_2$ в первом базисе.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{x} \times \vec{y}) = \begin{vmatrix} \vec{a} & \vec{b} & \vec{c} \\ \vec{a}\vec{x} & \vec{b}\vec{x} & \vec{c}\vec{x} \\ \vec{a}\vec{y} & \vec{b}\vec{y} & \vec{c}\vec{y} \end{vmatrix}.$$

Вар.: **90697323**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Суворов И.А.**

1. Даны три вершины параллелограмма $A(-6, -8, -1)$, $B(-5, -1, -4)$ и $C(-6, -8, -5)$. Найти координаты четвертой вершины D .

2. Даны две точки $A(-7, -10, 8)$ и $B(-3, 10, -1)$. На прямой AB найти такую точку M , чтобы точки B и M были расположены по разные стороны от точки A и чтобы отрезок AM был в 19 раз длиннее отрезка AB .

3. Найти ортогональную компоненту вектора $\vec{b} = (1, 3, -3)$ на вектор $\vec{a} = (-3, -4, 6)$.

4. Найти проекцию вектора $\vec{b} = (-6, 7, -5)$ на вектор $\vec{a} = (1, 2, 2)$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 5$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 3$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-5, 1, -2)$, $\vec{b} = (1, 3, -4)$ и $\vec{c} = (-3, 2, 4)$. Найти ориентацию тройки векторов \vec{a} , $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{c} .

7. Даны вершины тетраэдра $A(-7, -3, -5)$, $B(-9, -6, -2)$, $C(-9, -2, -8)$ и $D(-9, -5, -2)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D , не используя формулу Герона.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (3, 0, -1)$, $\vec{b} = (3, -3, -3)$ и $\vec{c} = (33, 12, 21)$. Найти \vec{x} такой, что $(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(-2, 1)$ и $(-1, 2)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = -10\vec{a}_1 + 8\vec{a}_2$ во втором базисе.

10. Доказать, что любая плоскость, проходящая через середины двух скрещивающихся ребер тетраэдра, делит этот тетраэдр на две одинаковые по объему части.

Вар.: **90697324**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Таскаев Т.Д.**

1. Даны три вершины параллелограмма $A(-9, -9, -3)$, $B(-7, 8, -2)$ и $C(-7, 9, -9)$. Найти координаты четвертой вершины D .

2. Отрезок, ограниченный точками $A(3, 5)$ и $B(4, -3)$, разделен на 5 равных частей. Найти координаты точек деления.

3. Даны два вектора $\vec{a} = (4, 4, 8)$ и $\vec{b} = (5, 10, -1)$. Найти вектор \vec{x} , перпендикулярный к оси Oz и удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = -24$, $\vec{x}\vec{b} = -45$.

4. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 9$, $|\vec{c}| = 5$, вычислить $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})^2$, где $\alpha = -2$, $\beta = -5$, $\gamma = 2$.

5. Даны вершины треугольника $A(-9, -6, 5)$, $B(-8, -8, 3)$ и $C(-8, -4, 3)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC , не используя формулу Герона.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-1, -2, 3)$, $\vec{b} = (-3, -2, -1)$ и $\vec{c} = (-1, 3, -3)$. Найти вектор \vec{d} длины $14\sqrt{14}$, компланарный векторам \vec{a} и \vec{b} , ортогональный вектору \vec{c} и направленный так, что тройка \vec{d} , \vec{b} , \vec{c} — левая.

7. Даны вершины тетраэдра $A(-3, -8, -7)$, $B(0, -5, -10)$, $C(-1, -9, -9)$ и $D(0, -11, -4)$. Найти длину его высоты, опущенной из вершины D , не используя формулу Герона.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-1, 0, 0)$, $\vec{b} = (0, -2, -2)$ и $\vec{c} = (0, -2, -2)$. Найти \vec{x} такой, что $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x}) = \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(2, 2)$ и $(-3, -1)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = -2\vec{b}_1 - 5\vec{b}_2$ в первом базисе.

10. Доказать, что для произвольного прямоугольника $ABCD$ и произвольной точки M , лежащей или не лежащей в плоскости прямоугольника, имеют места равенства: а) $(\vec{MA}, \vec{MC}) = (\vec{MB}, \vec{MD})$; б) $|\vec{MA}|^2 + |\vec{MC}|^2 = |\vec{MB}|^2 + |\vec{MD}|^2$.

Вар.: **90697325**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Федорова В.П.**

1. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся, как 20:9. Принимая за базисные векторы \vec{AC} и \vec{BD} , найти в этом базисе координаты векторов \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} и \vec{DA} .

2. Отрезок, ограниченный точками $A(-9, -2)$ и $B(8, -7)$, разделен на 3 равные части. Найти координаты точек деления.

3. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (-1, -5, -4)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a} = 42$.

4. Может ли какой-нибудь вектор образовывать с осями прямоугольной декартовой системы координат углы 45° , 150° , 135° ? Ответ надо обосновать.

5. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{\pi}{4}$. Зная, что $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 3$, вычислить $\left| (5\vec{a} + 3\vec{b}) \times (-4\vec{a} - 6\vec{b}) \right|^2$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-1, -3, -3)$, $\vec{b} = (-1, -2, 1)$ и $\vec{c} = (2, -2, 3)$. Найти вектор \vec{d} длины $7\sqrt{2}$, перпендикулярный векторам \vec{a} и \vec{b} и направленный так, чтобы тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

7. Установить, лежат ли точки $A(6, 7, 5)$, $B(3, 10, 6)$, $C(1, 6, 6)$ и $D(5, 6, 10)$ в одной плоскости. Если нет, то найти объем тетраэдра $ABCD$.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-3, -1, 2)$, $\vec{b} = (0, 0, -3)$ и $\vec{c} = (3, -1, 1)$. Используя следствие формулы «БАЦ минус ЦАБ», найти $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$.

9. Прямоугольную систему координат плоскости заменили на новую, перенеся начало координат в точку $P(-3, 1)$ и повернув координатные оси на угол 135° против часовой стрелки. Записать формулы замены координат.

10. Доказать, что модуль проекции вектора \vec{b} на прямую, перпендикулярную вектору \vec{a} , равен $\frac{|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})|}{|\vec{a}|^2}$.

Вар.: **90697326**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Цыпуклов Е.П.**

1. В трапеции $ABCD$ длины оснований AD и BC относятся, как 18:16. Принимая за базисные векторы \vec{AC} и \vec{BD} , найти в этом базисе координаты векторов \vec{AB} , \vec{BC} , \vec{CD} и \vec{DA} .

2. Отрезок, ограниченный точками $A(-4, -1)$ и $B(1, 7)$, разделен на 6 равных частей. Найти координаты точек деления.

3. Даны два вектора $\vec{a} = (10, -6, -10)$ и $\vec{b} = (-4, -6, 9)$. Найти вектор \vec{x} , перпендикулярный к оси Oz и удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = 56$, $\vec{x}\vec{b} = -14$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (-2, -2, 1)$.

5. Векторы \vec{a} и \vec{b} образуют угол $\frac{\pi}{2}$. Зная, что $|\vec{a}| = 7$, $|\vec{b}| = 2$, вычислить $\left| (1\vec{a} + 3\vec{b}) \times (-2\vec{a} - 4\vec{b}) \right|^2$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (3, 3, -2)$, $\vec{b} = (1, 1, 1)$ и $\vec{c} = (1, -2, -2)$. Найти вектор \vec{d} длины $3\sqrt{2}$, перпендикулярный векторам \vec{a} и \vec{b} и направленный так, чтобы тройки $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ и $\vec{a}, \vec{b}, \vec{d}$ имели одинаковую ориентацию.

7. Объем тетраэдра $V = 32$, три его вершины находятся в точках $A(1, -48, -32)$, $B(-4, -44, -28)$ и $C(0, -50, -30)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Ox .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-1, -1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 2, 0)$ и $\vec{c} = (3, -3, 0)$. Найти \vec{x} такой, что $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x}) = \vec{c}$.

9. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-3, 6)$, $B(-7, -6)$, $C(-3, -6)$ приобретают новые координаты $(-5, -4)$, $(-1, -4)$, $(1, 2)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

10. Доказать тождество $\vec{d}(\vec{a}\vec{b}\vec{c}) = \vec{a}(\vec{b}\vec{c}\vec{d}) + \vec{b}(\vec{c}\vec{a}\vec{d}) + \vec{c}(\vec{a}\vec{b}\vec{d})$.

Вар.: **90697327**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Чепуштанов В.М.**

1. Даны четыре вектора $\vec{a} = (5, -9, 8)$, $\vec{b} = (3, 5, 3)$, $\vec{c} = (7, -1, 7)$ и $\vec{d} = (-3, 25, -6)$. Подобрать числа α , β и γ так, чтобы векторы $\alpha\vec{a}$, $\beta\vec{b}$, $\gamma\vec{c}$ и \vec{d} образовывали замкнутую ломаную линию, если начало каждого последующего вектора совместить с концом предыдущего.

2. Отрезок, ограниченный точками $A(7, 2)$ и $B(4, -8)$, разделен на 3 равные части. Найти координаты точек деления.

3. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (-9, 4, -6)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a} = 798$.

4. Может ли какой-нибудь вектор образовывать с осями прямоугольной декартовой системы координат углы 120° , 45° , 90° ? Ответ надо обосновать.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 6$ и $|\vec{a} \times \vec{b}| = 39$. Вычислить $\vec{a}\vec{b}$.

6. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 60° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — правая. Зная, что $|\vec{a}| = 9$, $|\vec{b}| = 4$, $|\vec{c}| = 6\sqrt{3}$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

7. Объем тетраэдра $V = 56$, три его вершины находятся в точках $A(-4, -56, -28)$, $B(0, -60, -24)$ и $C(-8, -54, -23)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, что она лежит на оси Ox .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (1, -2, 0)$, $\vec{b} = (0, 2, -3)$ и $\vec{c} = (0, -2, -2)$. Используя формулу «БАЦ минус ЦАБ», найти $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

9. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(1, -19)$, $B(-2, 14)$, $C(31, -1)$ приобретают новые координаты $(3, 4)$, $(-3, -1)$, $(5, -4)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

10. Доказать, что если векторы \vec{a} и \vec{b} перпендикулярны, то $(\vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})))) = (\vec{a}^2)^2 \vec{b}$.

Вар.: **90697328**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Черненко И.Д.**

1. Найти вектор \vec{x} , являющийся проекцией вектора $\vec{y} = (-108, 0, -124)$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a} = (-8, 9, -2)$ и $\vec{b} = (-5, -3, -9)$ при проектировании параллельно вектору $\vec{c} = (4, 6, 8)$.

2. Отрезок, ограниченный точками $A(5, -5)$ и $B(1, 9)$, разделен на 5 равных частей. Найти координаты точек деления.

3. Даны два вектора $\vec{a} = (2, 8, -4)$ и $\vec{b} = (-5, 3, -4)$. Найти вектор \vec{x} , перпендикулярный к оси Ox и удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = -4$, $\vec{x}\vec{b} = -14$.

4. Найти направляющие косинусы вектора $\vec{a} = (6, 4, 3)$.

5. Даны вершины треугольника $A(5, 5, -9)$, $B(3, 8, -11)$ и $C(4, 2, -12)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC , не используя формулу Герона.

6. Даны векторы $\vec{a} = (1, 3, 4)$, $\vec{b} = (2, 3, -2)$ и $\vec{c} = (5, 4, -3)$. Найти ориентацию тройки векторов \vec{a} , $\vec{a} \times \vec{b}$, \vec{c} .

7. Объем тетраэдра $V = 36$, три его вершины находятся в точках $A(36, -36, 8)$, $B(35, -32, 11)$ и $C(32, -38, 10)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, что она лежит на оси Oz .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-3, 1, 0)$, $\vec{b} = (3, -3, -2)$ и $\vec{c} = (-1, 0, -3)$. Используя формулу «БАЦ минус ЦАБ», найти $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$.

9. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(-21, -27)$, $B(18, 14)$, $C(-4, -14)$ приобретают новые координаты $(-4, 5)$, $(3, -4)$, $(1, 4)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})^2 + |(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}|^2 = |\vec{a} \times \vec{b}|^2 \cdot |\vec{c}|^2.$$

Вар.: **90697329**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Чугунова Е.В.**

1. Даны три вершины параллелограмма $A(-7, -5, 8)$, $B(-10, 10, -7)$ и $C(-7, -4, -10)$. Найти координаты четвертой вершины D .

2. Отрезок, ограниченный точками $A(6, -5)$ и $B(-6, 5)$, разделен на 6 равных частей. Найти координаты точек деления.

3. Даны два вектора $\vec{a} = (-8, -5, 8)$ и $\vec{b} = (2, 1, -3)$. Найти вектор \vec{x} , перпендикулярный к оси Ox и удовлетворяющий условиям: $\vec{x}\vec{a} = -52$, $\vec{x}\vec{b} = 16$.

4. Найти проекцию вектора $\vec{b} = (7, -2, 6)$ на вектор $\vec{a} = (4, 3, -6)$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 11$, $|\vec{b}| = 7$ и $\vec{a}\vec{b} = 18$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

6. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 150° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — правая. Зная, что $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 5$, $|\vec{c}| = 12$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

7. Объем тетраэдра $V = 24$, три его вершины находятся в точках $A(-6, -6, 5)$, $B(-4, -8, 4)$ и $C(-2, -7, 7)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Oz .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-2, -1, 1)$, $\vec{b} = (-1, 0, 0)$ и $\vec{c} = (0, 6, 4)$. Найти \vec{x} такой, что $(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{c}$.

9. Прямоугольную систему координат плоскости заменили на новую, перенеся начало координат в точку $P(-4, -2)$ и повернув координатные оси на угол 60° против часовой стрелки. Записать формулы замены координат.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a}\vec{b}\vec{c})(\vec{a}\vec{d}\vec{e}) = \begin{vmatrix} \vec{a}\vec{b}\vec{d} & \vec{a}\vec{b}\vec{e} \\ \vec{a}\vec{c}\vec{d} & \vec{a}\vec{c}\vec{e} \end{vmatrix}.$$

Вар.: **90697330**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Шевченко И.А.**

1. Даны три вершины параллелограмма $A(-8, -4, 1)$, $B(-1, -1, -1)$ и $C(2, 6, -9)$. Найти координаты четвертой вершины D .

2. Найти длину биссектрисы AD треугольника ABC : $A(7, -7)$, $B(4, -11)$, $C(-1, -13)$.

3. Найти ортогональную компоненту вектора $\vec{b} = (1, 2, 2)$ на вектор $\vec{a} = (4, -3, 6)$.

4. Найти проекцию вектора $\vec{b} = (-4, -8, 5)$ на вектор $\vec{a} = (4, -3, -6)$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 13$ и $\vec{a}\vec{b} = 28$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

6. Даны векторы $\vec{a} = (-3, -5, -2)$, $\vec{b} = (-3, -1, 1)$ и $\vec{c} = (2, 2, -5)$. Найти ориентацию тройки векторов $\vec{a}, \vec{a} \times \vec{b}, \vec{c}$.

7. Даны координаты вершин тетраэдра $OABC$: $O(9, 5, -4)$, $A(13, 3, -9)$, $B(12, 7, -7)$, $C(13, 8, -6)$. Вычислить объем параллелепипеда, построенного на векторах, соединяющих вершину O с серединами ребер AB , AC и BC .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (0, -3, -1)$, $\vec{b} = (3, 3, -2)$ и $\vec{c} = (-7, -5, -18)$. Найти \vec{x} такой, что $(\vec{a} \times \vec{x}) \times \vec{b} = \vec{c}$.

9. На плоскости даны два базиса: (\vec{a}_1, \vec{a}_2) и (\vec{b}_1, \vec{b}_2) . Векторы второго базиса \vec{b}_1 и \vec{b}_2 имеют в первом базисе координаты $(2, 1)$ и $(1, 2)$ соответственно. Записать формулы преобразования координат. Найти координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a}_1 - 2\vec{a}_2$ во втором базисе.

10. Доказать, что модуль проекции вектора \vec{b} на прямую, перпендикулярную вектору \vec{a} , равен $\frac{|\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{a})|}{|\vec{a}|^2}$.

Вар.: **90697331**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Шестаков К.Г.**

1. Даны три вектора $\vec{a} = (-6, 9)$, $\vec{b} = (5, 3)$ и $\vec{c} = (16, -66)$. Найти разложение вектора $\vec{p} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ по базису \vec{a}, \vec{b} .

2. Даны две вершины $A(7, 7)$, $B(8, -1)$ и точка пересечения медиан $M(2, -6)$ треугольника ABC . Найти координаты третьей вершины C .

3. Найти вектор \vec{x} , коллинеарный вектору $\vec{a} = (9, -1, -7)$ и удовлетворяющий условию $\vec{x}\vec{a} = -393$.

4. Может ли какой-нибудь вектор образовывать с осями прямоугольной декартовой системы координат углы 120° , 120° , 120° ? Ответ надо обосновать.

5. Даны вершины треугольника $A(7, 9, 4)$, $B(9, 6, 6)$ и $C(10, 11, 5)$. Вычислить длину его высоты, опущенной из вершины B на сторону AC , не используя формулу Герона.

6. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 135° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — правая. Зная, что $|\vec{a}| = 8$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 12\sqrt{2}$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

7. Объем тетраэдра $V = 120$, три его вершины находятся в точках $A(2, 60, 60)$, $B(-3, 55, 63)$ и $C(0, 55, 57)$. Найти координаты четвертой вершины тетраэдра D , если известно, то она лежит на оси Ox .

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-1, -1, 3)$, $\vec{b} = (1, 1, 2)$ и $\vec{c} = (6, 18, 8)$. Найти \vec{x} такой, что $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x}) = \vec{c}$.

9. Прямоугольную систему координат плоскости заменили на новую, перенеся начало координат в точку $P(-4, -1)$ и повернув координатные оси на угол 60° против часовой стрелки. Записать формулы замены координат.

10. Доказать, что площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$ равна $\frac{1}{2}|\vec{AC} \times \vec{BD}|$.

Вар.: **90697332**. Группа: МЕН-130705 Число/Мес./Год:
15/11/2023

Ф.И.О.: **Шредер К.А.**

1. Найти вектор \vec{x} , являющийся проекцией вектора $\vec{y} = (82, 4, 21)$ на плоскость, определяемую векторами $\vec{a} = (7, -5, 9)$ и $\vec{b} = (-5, 7, -9)$ при проектировании параллельно вектору $\vec{c} = (10, 4, -3)$.

2. Даны две вершины $A(-6, 2)$, $B(-7, -8)$ и точка пересечения медиан $M(4, -4)$ треугольника ABC . Найти координаты третьей вершины C .

3. Найти ортогональную компоненту вектора $\vec{b} = (-3, 3, 3)$ на вектор $\vec{a} = (1, -2, -2)$.

4. Векторы \vec{a} и \vec{b} взаимно перпендикулярны. Вектор \vec{c} образует с ними углы, равные $\frac{\pi}{3}$. Зная, что $|\vec{a}| = 6$, $|\vec{b}| = 6$, $|\vec{c}| = 4$, вычислить $(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c})^2$, где $\alpha = 2$, $\beta = 2$, $\gamma = -1$.

5. Известно, что $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 6$ и $\vec{a}\vec{b} = -13$. Вычислить $|\vec{a} \times \vec{b}|$.

6. Вектор \vec{c} ортогонален векторам \vec{a} и \vec{b} , угол между векторами \vec{a} и \vec{b} равен 90° . Тройка $(\vec{b}, \vec{a}, \vec{c})$ — правая. Зная, что $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 8$, $|\vec{c}| = 12$, вычислить $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$.

7. Установить, лежат ли точки $A(-1, -4, -8)$, $B(3, -2, -3)$, $C(4, -7, -4)$ и $D(3, -8, -11)$ в одной плоскости. Если нет, то найти объем тетраэдра $ABCD$.

8. В прямоугольной системе координат заданы векторы $\vec{a} = (-2, 3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 2, 0)$ и $\vec{c} = (-20, 0, -20)$. Найти \vec{x} такой, что $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{x}) = \vec{c}$.

9. Известно, что при изменении системы координат на плоскости точки $A(17, -11)$, $B(20, -5)$, $C(14, -9)$ приобретают новые координаты $(-1, -5)$, $(1, -4)$, $(-1, -4)$ соответственно. Найти формулы преобразования координат при таком изменении.

10. Доказать тождество

$$(\vec{a} \times (\vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{d}))) = (\vec{a} \times \vec{c})(\vec{b}\vec{d}) - (\vec{a} \times \vec{d})(\vec{b}\vec{c}).$$