Основы высшей математики

Тема 4. Дифференциальное исчисление

Белов А.И.

Уральский федеральный университет

Екатеринбург, 2019

Определение.

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ и Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$.

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ и Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$. Величина Δx называется **приращением аргумента**,

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ и Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$. Величина Δx называется приращением аргумента, а величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции (при заданном приращении аргумента).

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ и Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$. Величина Δx называется приращением аргумента, а величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции (при заданном приращении аргумента).

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ и Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$. Величина Δx называется приращением аргумента, а величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции (при заданном приращении аргумента).

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$,

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ и Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$. Величина Δx называется приращением аргумента, а величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции (при заданном приращении аргумента).

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, а функция f называется дифференцируемой в точке x_0.

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ и Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$. Величина Δx называется приращением аргумента, а величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции (при заданном приращении аргумента).

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, а функция f называется дифференцируемой в точке x_0.

Если функция f дифференцируема в каждой точке множества M, то говорят, что f дифференцируема на множестве M

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ и Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$. Величина Δx называется приращением аргумента, а величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции (при заданном приращении аргумента).

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначается $f'(x_0)$, а функция f называется дифференцируемой в точке x_0.

Если функция f дифференцируема в каждой точке множества M, то говорят, что f дифференцируема на множестве M и можно говорит о производной, как о функции $f'(x)$.

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ и Δx такое, что $x_0 + \Delta x \in O(x_0)$. Величина Δx называется **приращением аргумента**, а величина $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется **приращением функции** (при заданном приращении аргумента).

Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

то он называется **производной функции $y = f(x)$ в точке x_0** и обозначается $f'(x_0)$, а функция f называется **дифференцируемой в точке x_0**.

Если функция f дифференцируема в каждой точке множества M, то говорят, что **f дифференцируема на множестве M** и можно говорит о производной, как о функции $f'(x)$.

Другие обозначения производной $\dot{f}$, $\dfrac{df}{dx}$, f'_x, y', y'_x.

Примеры.

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x}$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0 + \Delta x)$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Тем самым $(x^2)' = 2x$.

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x) = 2x_0.$$

Тем самым $(x^2)' = 2x$.

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

   Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$.

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем
$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$
Тем самым $(x^2)' = 2x$.
2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

   Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x) = 2x_0.$$

   Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x}$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x) = 2x_0.$$

   Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x - x_0}{\Delta x}$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

   Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

   Аналогично, для $x_0 < 0$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

   Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

   Аналогично, для $x_0 < 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично, для $x_0 < 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x}$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично, для $x_0 < 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-x_0 - \Delta x + x_0}{\Delta x}$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично, для $x_0 < 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-x_0 - \Delta x + x_0}{\Delta x} = -1.$$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x) = 2x_0.$$

   Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

   Аналогично, для $x_0 < 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-x_0-\Delta x + x_0}{\Delta x} = -1.$$

   Для $x_0 = 0$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0 \Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} (2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

   Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

   Аналогично, для $x_0 < 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-x_0 - \Delta x + x_0}{\Delta x} = -1.$$

   Для $x_0 = 0$ очевидно $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = 1$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

Аналогично, для $x_0 < 0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{|x_0 + \Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-x_0 - \Delta x + x_0}{\Delta x} = -1.$$

Для $x_0 = 0$ очевидно $\lim\limits_{\Delta x \to +0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $\lim\limits_{\Delta x \to -0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0+\Delta x) = 2x_0.$$

   Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

   Аналогично, для $x_0 < 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-x_0-\Delta x + x_0}{\Delta x} = -1.$$

   Для $x_0 = 0$ очевидно $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, т. е. общего предела не существует.

Примеры.

1. Рассмотрим $y = x^2$. Имеем

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x_0+\Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}(2x_0 + \Delta x) = 2x_0.$$

   Тем самым $(x^2)' = 2x$.

2. Пусть $y = |x|$. Тогда для $x_0 > 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{x_0+\Delta x - x_0}{\Delta x} = 1.$$

   Аналогично, для $x_0 < 0$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{|x_0+\Delta x| - |x_0|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-x_0-\Delta x + x_0}{\Delta x} = -1.$$

Для $x_0 = 0$ очевидно $\lim\limits_{\Delta x\to +0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$, $\lim\limits_{\Delta x\to -0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$, т. е. общего предела не существует. Значит функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x_0 = 0$.

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0.

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)\right)=0$.

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$.

Т. е. $\varepsilon(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$.

Т. е. $\varepsilon(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)\right)=0$.

Т. е. $\varepsilon(\Delta x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$ — бесконечно малая при $\Delta x\to 0$. Отсюда

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Очевидно, что Δy тоже бесконечно малая при $\Delta x\to 0$,

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)\right)=0$.

Т. е. $\varepsilon(\Delta x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$ — бесконечно малая при $\Delta x\to 0$. Отсюда

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Очевидно, что Δy тоже бесконечно малая при $\Delta x\to 0$, значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$.

Т. е. $\varepsilon(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Очевидно, что Δy тоже бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$.

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$.

Т. е. $\varepsilon(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Очевидно, что Δy тоже бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$.
Если $x = x_0 + \Delta x$, то $\Delta x \to 0$ означает, что $x \to x_0$.

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)\right) = 0$.

Т. е. $\varepsilon(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Очевидно, что Δy тоже бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x) - f(x_0)) = 0$.

Если $x = x_0 + \Delta x$, то $\Delta x \to 0$ означает, что $x \to x_0$. Это дает $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$,

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)\right)=0$.

Т. е. $\varepsilon(\Delta x)=\dfrac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$ — бесконечно малая при $\Delta x\to 0$. Отсюда

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

Очевидно, что Δy тоже бесконечно малая при $\Delta x\to 0$, значит, $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$ или $\lim\limits_{\Delta x\to 0}(f(x_0+\Delta x)-f(x_0))=0$.
Если $x=x_0+\Delta x$, то $\Delta x\to 0$ означает, что $x\to x_0$. Это дает $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$, т. е. f непрерывна в точке x_0. $\square$

Теорема 28.

Если f дифференцируема в точке x_0, то f непрерывна в точке x_0.

Доказательство.

Пусть f дифференцируема в точке x_0. Тогда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0) \right) = 0$.

Т. е. $\varepsilon(\Delta x) = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} - f'(x_0)$ — бесконечно малая при $\Delta x \to 0$. Отсюда

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x.$$

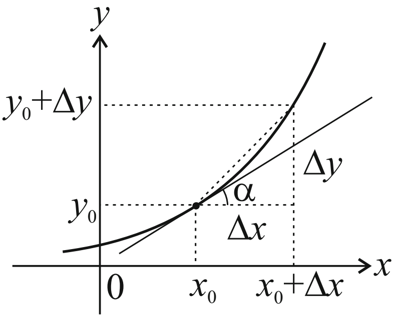
Очевидно, что Δy тоже бесконечно малая при $\Delta x \to 0$, значит, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$ или $\lim\limits_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0$.
Если $x = x_0 + \Delta x$, то $\Delta x \to 0$ означает, что $x \to x_0$. Это дает $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, т. е. f непрерывна в точке x_0. □

Следствие.

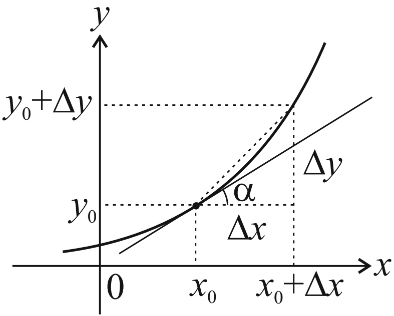
$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Геометрический смысл производной

Геометрический смысл производной

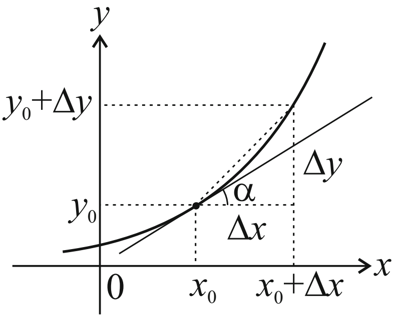


Геометрический смысл производной



$\frac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла наклона секущей.

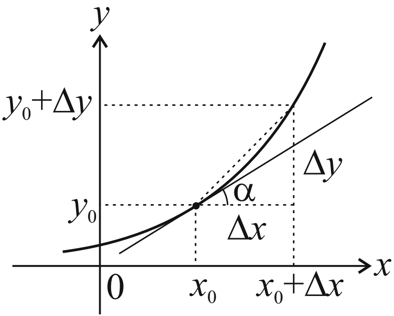
Геометрический смысл производной



$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла наклона секущей.

При $\Delta x \to 0$ получим $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ — тангенс угла наклона касательной.

Геометрический смысл производной

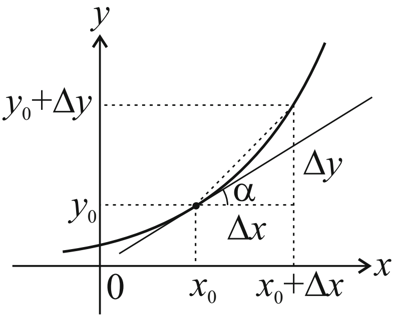


$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла наклона секущей.

При $\Delta x \to 0$ получим $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ — тангенс угла наклона касательной.

Значение производной в точке равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Геометрический смысл производной



$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ — тангенс угла наклона секущей.

При $\Delta x \to 0$ получим $f'(x_0) = \operatorname{tg}\alpha$ — тангенс угла наклона касательной.

Значение производной в точке равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в этой точке.

Уравнение касательной, проведенной к графику функции в точке $(x_0; y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Теорема 29 (свойства производной).

Теорема 29 (свойства производной).

Пусть u и v — функции. Тогда

Теорема 29 (свойства производной).

Пусть u и v — функции. Тогда

1. $(u+v)' = u' + v'$;

Теорема 29 (свойства производной).

Пусть u и v — функции. Тогда

1. $(u+v)' = u' + v'$;
2. $(Cu)' = Cu'$, где $C \in \mathbb{R}$;

Теорема 29 (свойства производной).

Пусть u и v — функции. Тогда

1. $(u+v)' = u' + v'$;
2. $(Cu)' = Cu'$, где $C \in \mathbb{R}$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$;

Теорема 29 (свойства производной).

Пусть u и v — функции. Тогда

1. $(u+v)' = u' + v'$;
2. $(Cu)' = Cu'$, где $C \in \mathbb{R}$;
3. $(uv)' = u'v + uv'$;
4. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ в точках, где $v \neq 0$.

Производная сложной функции

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0,

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$,

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$, то сложная функция $y(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t_0,

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$, то сложная функция $y(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$y'_t(t_0) = f'_x(x_0)g'_t(t_0).$$

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$, то сложная функция $y(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$y'_t(t_0) = f'_x(x_0) g'_t(t_0).$$

Доказательство.

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$, то сложная функция $y(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$y'_t(t_0) = f'_x(x_0)g'_t(t_0).$$

Доказательство.

Рассмотрим $y = f(x)$.

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$, то сложная функция $y(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$y'_t(t_0) = f'_x(x_0)g'_t(t_0).$$

Доказательство.

Рассмотрим $y = f(x)$. Тогда $\Delta y = f'_x(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$.

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$, то сложная функция $y(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$y'_t(t_0) = f'_x(x_0)g'_t(t_0).$$

Доказательство.

Рассмотрим $y = f(x)$. Тогда $\Delta y = f'_x(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$.

Теперь, если $x = g(t)$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x_0)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta x)\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$, то сложная функция $y(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$y'_t(t_0) = f'_x(x_0)g'_t(t_0).$$

Доказательство.

Рассмотрим $y = f(x)$. Тогда $\Delta y = f'_x(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$.

Теперь, если $x = g(t)$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x_0)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta x)\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Отсюда

$$y'_t(t_0)$$

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$, то сложная функция $y(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$y'_t(t_0) = f'_x(x_0)g'_t(t_0).$$

Доказательство.

Рассмотрим $y = f(x)$. Тогда $\Delta y = f'_x(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$.

Теперь, если $x = g(t)$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x_0)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta x)\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Отсюда

$$y'_t(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t}$$

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$, то сложная функция $y(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$y'_t(t_0) = f'_x(x_0)g'_t(t_0).$$

Доказательство.

Рассмотрим $y = f(x)$. Тогда $\Delta y = f'_x(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$.

Теперь, если $x = g(t)$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x_0)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta x)\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Отсюда

$$y'_t(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x_0)\underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{x'_t(t_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\varepsilon(\Delta x)}_{0}\underbrace{\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta t}}_{x'_t(t_0)}$$

Производная сложной функции

Теорема 30 (производная сложной функции)

Если функция $g(t)$ дифференцируема в точке t_0, а функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x_0 = g(t_0)$, то сложная функция $y(t) = f(g(t))$ дифференцируема в точке t_0, причем

$$y'_t(t_0) = f'_x(x_0)g'_t(t_0).$$

Доказательство.

Рассмотрим $y = f(x)$. Тогда $\Delta y = f'_x(x_0)\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\Delta x$.

Теперь, если $x = g(t)$, то $\dfrac{\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x_0)\dfrac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon(\Delta x)\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$.

Отсюда

$$y'_t(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta t} = f'_x(x_0)\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}_{x'_t(t_0)} + \underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \varepsilon(\Delta x)}_{0}\underbrace{\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}}_{x'_t(t_0)} = f'_x(x_0)x'_t(t_0). \qquad \square$$

Производная обратной функции

Производная обратной функции

Теорема 31 (производная обратной функции)

Производная обратной функции

Теорема 31 (производная обратной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$.

Производная обратной функции

Теорема 31 (производная обратной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$. Тогда

$$\left(f^{-1}\right)'_y = \frac{1}{f'_x}.$$

Производная обратной функции

Теорема 31 (производная обратной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$. Тогда

$$\left(f^{-1}\right)'_y = \frac{1}{f'_x}.$$

Доказательство.

$$\left(f^{-1}\right)'_y(y_0)$$

Производная обратной функции

Теорема 31 (производная обратной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$. Тогда

$$\left(f^{-1}\right)'_y = \frac{1}{f'_x}.$$

Доказательство.

$$\left(f^{-1}\right)'_y(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}$$

Производная обратной функции

Теорема 31 (производная обратной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$. Тогда

$$\left(f^{-1}\right)'_y = \frac{1}{f'_x}.$$

Доказательство.

$$\left(f^{-1}\right)'_y (y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}}$$

Производная обратной функции

Теорема 31 (производная обратной функции)

Пусть функция $y = f(x)$ имеет обратную функцию $x = f^{-1}(y)$. Тогда

$$\left(f^{-1}\right)'_y = \frac{1}{f'_x}.$$

Доказательство.

$$\left(f^{-1}\right)'_y(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\frac{\Delta y}{\Delta x}} = \frac{1}{f'_x(x_0)}. \qquad \square$$

Таблица производных

Таблица производных

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;

Таблица производных

1. $C' = 0 \ (C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1} \ (n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;

Таблица производных

1. $C' = 0 \ (C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1} \ (n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;

Таблица производных

1. $C' = 0 \ (C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1} \ (n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
   в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
   в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
8. $(a^x)' = a^x \ln a$,

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
   в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
8. $(a^x)' = a^x \ln a$,
   в частности, $(e^x)' = e^x$;

Таблица производных

1. $C' = 0 \ (C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1} \ (n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1} \ (x > 0, \ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
   в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
8. $(a^x)' = a^x \ln a$,
   в частности, $(e^x)' = e^x$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
   в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
8. $(a^x)' = a^x \ln a$,
   в частности, $(e^x)' = e^x$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
   в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
8. $(a^x)' = a^x \ln a$,
   в частности, $(e^x)' = e^x$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

Таблица производных

1. $C' = 0$ $(C \in \mathbb{R})$;
2. $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(n \in \mathbb{Z})$,
   $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ $(x > 0,\ \alpha \in \mathbb{R})$;
3. $(\sin x)' = \cos x$;
4. $(\cos x)' = -\sin x$;
5. $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$;
6. $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;
7. $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$,
   в частности, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$;
8. $(a^x)' = a^x \ln a$,
   в частности, $(e^x)' = e^x$;
9. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
10. $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$;
11. $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;
12. $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

$$y' = y(\ln y)'.$$

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

$$y' = y(\ln y)'.$$

Доказательство.

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

$$y' = y(\ln y)'.$$

Доказательство.

По теореме о производной сложной функции $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y y'_x = \dfrac{y'_x}{y}$,

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

$$y' = y(\ln y)'.$$

Доказательство.

По теореме о производной сложной функции $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y y'_x = \dfrac{y'_x}{y}$, откуда $y'_x = y(\ln y)'_x$. $\square$

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

$$y' = y(\ln y)'.$$

Доказательство.

По теореме о производной сложной функции $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y y'_x = \dfrac{y'_x}{y}$, откуда $y'_x = y(\ln y)'_x$. □

Следствие.

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

$$y' = y(\ln y)'.$$

Доказательство.

По теореме о производной сложной функции $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y y'_x = \dfrac{y'_x}{y}$, откуда $y'_x = y(\ln y)'_x$. $\square$

Следствие.

$$(u^v)' = u^v\left(\frac{v}{u}u' + v'\ln u\right).$$

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

$$y' = y(\ln y)'.$$

Доказательство.

По теореме о производной сложной функции $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y y'_x = \dfrac{y'_x}{y}$, откуда $y'_x = y(\ln y)'_x$. $\square$

Следствие.

$$(u^v)' = u^v\left(\frac{v}{u}u' + v'\ln u\right).$$

Доказательство.

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

$$y' = y(\ln y)'.$$

Доказательство.

По теореме о производной сложной функции $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y y'_x = \dfrac{y'_x}{y}$, откуда $y'_x = y(\ln y)'_x$. □

Следствие.

$$(u^v)' = u^v\left(\frac{v}{u}u' + v'\ln u\right).$$

Доказательство.

Пусть $y = u^v = e^{v\ln u}$.

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

$$y' = y(\ln y)'.$$

Доказательство.

По теореме о производной сложной функции $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y y'_x = \dfrac{y'_x}{y}$, откуда $y'_x = y(\ln y)'_x$. □

Следствие.

$$(u^v)' = u^v \left(\frac{v}{u} u' + v' \ln u \right).$$

Доказательство.

Пусть $y = u^v = e^{v \ln u}$. Тогда $\ln y = v \ln u$,

Теорема 32 (формула логарифмической производной)

$$y' = y(\ln y)'.$$

Доказательство.

По теореме о производной сложной функции $(\ln y)'_x = (\ln y)'_y y'_x = \dfrac{y'_x}{y}$, откуда $y'_x = y(\ln y)'_x$. □

Следствие.

$$(u^v)' = u^v \left(\frac{v}{u} u' + v' \ln u \right).$$

Доказательство.

Пусть $y = u^v = e^{v \ln u}$. Тогда $\ln y = v \ln u$, и по формуле логарифмической производной $(u^v)' = u^v (v \ln u)' = u^v \left(v' \ln u + \dfrac{v}{u} u' \right)$. □

Пример.

Пример. $y = x^x$.

Пример. $y = x^x$.

$$(u^v)' = u^v \left(\frac{v}{u} u' + v' \ln u \right).$$

Пример. $y = x^x$.

$$(u^v)' = u^v \left(\frac{v}{u} u' + v' \ln u \right).$$

$u = v = x$.

Пример. $y = x^x$.

$$(u^v)' = u^v \left(\frac{v}{u}u' + v'\ln u\right).$$

$u = v = x$.

$$(x^x)' = x^x(1 + \ln x).$$

Дифференциал функции

Дифференциал функции

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Дифференциал функции

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда приращение функции

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Дифференциал функции

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда приращение функции

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Дифференциалом независимого аргумента называется его приращение Δx и обозначается dx.

Дифференциал функции

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда приращение функции

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Дифференциалом независимого аргумента называется его приращение Δx и обозначается dx.
Дифференциалом функции называется линейная часть приращения функции $f'(x_0)\Delta x$ и обозначается dy.

Дифференциал функции

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда приращение функции

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Дифференциалом независимого аргумента называется его приращение Δx и обозначается dx.
Дифференциалом функции называется линейная часть приращения функции $f'(x_0)\Delta x$ и обозначается dy.

В обозначениях дифференциалов мы получаем

$$dy = f'(x)dx.$$

Дифференциал функции

Определение.

Пусть функция $y = f(x)$ дифференцируема в точке x_0. Тогда приращение функции

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x).$$

Дифференциалом независимого аргумента называется его приращение Δx и обозначается dx. Дифференциалом функции называется линейная часть приращения функции $f'(x_0)\Delta x$ и обозначается dy.

В обозначениях дифференциалов мы получаем

$$dy = f'(x)dx.$$

Это оправдывает обозначение производной $f'(x) = \dfrac{dy}{dx}$.

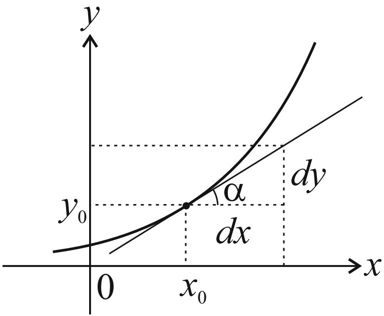
Геометрический смысл дифференциала

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции в точке — это приращение ординаты касательной к графику функции в этой точке.

Геометрический смысл дифференциала

Дифференциал функции в точке — это приращение ординаты касательной к графику функции в этой точке.



Свойства дифференциала

Свойства дифференциала

1. $d(C) = 0$, где $C \in \mathbb{R}$;

Свойства дифференциала

1. $d(C) = 0$, где $C \in \mathbb{R}$;
2. $d(u + v) = du + dv$;

Свойства дифференциала

1. $d(C) = 0$, где $C \in \mathbb{R}$;
2. $d(u + v) = du + dv$;
3. $d(Cu) = Cdu$, где $C \in \mathbb{R}$;

Свойства дифференциала

1. $d(C) = 0$, где $C \in \mathbb{R}$;
2. $d(u + v) = du + dv$;
3. $d(Cu) = Cdu$, где $C \in \mathbb{R}$;
4. $d(uv) = vdu + udv$;

Свойства дифференциала

1. $d(C) = 0$, где $C \in \mathbb{R}$;
2. $d(u + v) = du + dv$;
3. $d(Cu) = Cdu$, где $C \in \mathbb{R}$;
4. $d(uv) = vdu + udv$;
5. $d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vdu - udv}{v^2}$, где $v \neq 0$.

Приближенное вычисление значений функции

Приближенное вычисление значений функции

Дифференциал используют для приближенного вычисления значений функции, отбрасывая $o(\Delta x)$ и считая $\Delta y \approx dy$

Приближенное вычисление значений функции

Дифференциал используют для приближенного вычисления значений функции, отбрасывая $o(\Delta x)$ и считая $\Delta y \approx dy$, т. е.

$$y(x_0 + \Delta x) \approx y(x_0) + f'(x_0)\Delta x.$$

Локальные экстремумы

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума),

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и достигает в ней локального экстремума,

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и достигает в ней локального экстремума, то $f'(c) = 0$.

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и достигает в ней локального экстремума, то $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Пусть c — точка минимума.

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и достигает в ней локального экстремума, то $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Пусть c — точка минимума.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

□

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и достигает в ней локального экстремума, то $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Пусть c — точка минимума.

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to c+0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$\square$

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и достигает в ней локального экстремума, то $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Пусть c — точка минимума.

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to c+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to c-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

□

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и достигает в ней локального экстремума, то $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Пусть c — точка минимума.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to c+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to c-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В некоторой $O(c)$ всегда $\Delta y \geqslant 0$, т. е.

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и достигает в ней локального экстремума, то $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Пусть c — точка минимума.

$$f'(c) = \lim_{x \to c} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to c+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x \to c-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В некоторой $O(c)$ всегда $\Delta y \geqslant 0$, т. е. $f'(c) = \lim\limits_{x \to c+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$;

$\square$

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и достигает в ней локального экстремума, то $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Пусть c — точка минимума.

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to c+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to c-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В некоторой $O(c)$ всегда $\Delta y \geqslant 0$, т. е. $f'(c) = \lim\limits_{x\to c+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$; $f'(c) = \lim\limits_{x\to c-0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0$,

$\square$

Локальные экстремумы

Определение.

Говорят, что функция $f(x)$ достигает в точке $x = c$ локального минимума (максимума), если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f(x) \geqslant f(c)$ (соответственно, $f(x) \leqslant f(c)$).
Точки минимума или максимума называются точками локального экстремума.

Теорема 33 (Ферма).

Если $y = f(x)$ дифференцируема в точке c и достигает в ней локального экстремума, то $f'(c) = 0$.

Доказательство.

Пусть c — точка минимума.

$$f'(c) = \lim_{x\to c} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to c+0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to c-0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

В некоторой $O(c)$ всегда $\Delta y \geqslant 0$, т. е. $f'(c) = \lim\limits_{x\to c+0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$; $f'(c) = \lim\limits_{x\to c-0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0$,

значит $f'(c) = 0$. $\square$

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются **стационарными точками функции** f.

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$,

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b)

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$,

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство.

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство.

Если $f(x)$ — константа, то очевидно.

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство.

Если $f(x)$ — константа, то очевидно.
Если нет, то в силу непрерывности она достигает своих наибольшего и наименьшего значений на $[a, b]$, причем эти значения различны.

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство.

Если $f(x)$ — константа, то очевидно.
Если нет, то в силу непрерывности она достигает своих наибольшего и наименьшего значений на $[a, b]$, причем эти значения различны. Поскольку $f(a) = f(b)$, то одно из них достигается в некоторой точке $c \in (a, b)$.

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство.

Если $f(x)$ — константа, то очевидно.
Если нет, то в силу непрерывности она достигает своих наибольшего и наименьшего значений на $[a, b]$, причем эти значения различны. Поскольку $f(a) = f(b)$, то одно из них достигается в некоторой точке $c \in (a, b)$. Значит, c — точка локального экстремума,

Определение.

Точки, в которых $f'(x) = 0$ называются стационарными точками функции f.

Теорема 34 (Ролля).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$, дифференцируема на (a, b) и $f(a) = f(b)$, то $\exists c \in (a, b) : f'(c) = 0$.

Доказательство.

Если $f(x)$ — константа, то очевидно.
Если нет, то в силу непрерывности она достигает своих наибольшего и наименьшего значений на $[a, b]$, причем эти значения различны. Поскольку $f(a) = f(b)$, то одно из них достигается в некоторой точке $c \in (a, b)$. Значит, c — точка локального экстремума, и по теореме Ферма $f'(c) = 0$. □

Теорема 35 (Коши)

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$,

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b)

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b),

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Поскольку $h(b) = h(a) = 0$,

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Поскольку $h(b) = h(a) = 0$, то по теореме Ролля $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$.

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Поскольку $h(b) = h(a) = 0$, то по теореме Ролля $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$. Но

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x),$$

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a, b]$, дифференцируемы на (a, b) и $g'(x) \neq 0$ на (a, b), то

$$\exists c \in (a, b) : \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$h(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(x) - g(a)).$$

Поскольку $h(b) = h(a) = 0$, то по теореме Ролля $\exists c \in (a, b) : h'(c) = 0$. Но

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x), \text{откуда } f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c)$$

$\square$

Теорема 35 (Коши)

Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на $[a,b]$, дифференцируемы на (a,b) и $g'(x)\neq 0$ на (a,b), то

$$\exists c\in(a,b):\ \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Доказательство.

Рассмотрим функцию

$$h(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}(g(x)-g(a)).$$

Поскольку $h(b)=h(a)=0$, то по теореме Ролля $\exists c\in(a,b):h'(c)=0$. Но

$$h'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(x),\text{откуда } f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}g'(c)=0.$$

$\square$

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b),

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то
$\exists c \in (a,b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b-a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. $\square$

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. □

Следствие.

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. $\square$

Следствие.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b)

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. □

Следствие.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$,

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. □

Следствие.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$, то $f(x)$ — постоянная на (a, b).

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. □

Следствие.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$, то $f(x)$ — постоянная на (a, b).

Доказательство.

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то
$\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. $\square$

Следствие.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$, то $f(x)$ — постоянная на (a, b).

Доказательство.

По теореме о непрерывности дифференцируемой функции $f(x)$ непрерывна на (a, b).

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. □

Следствие.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$, то $f(x)$ — постоянная на (a, b).

Доказательство.

По теореме о непрерывности дифференцируемой функции $f(x)$ непрерывна на (a, b).
Если $x_1, x_2 \in (a, b)$, то $f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$ и дифференцируема на (x_1, x_2).

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то $\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. □

Следствие.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$, то $f(x)$ — постоянная на (a, b).

Доказательство.

По теореме о непрерывности дифференцируемой функции $f(x)$ непрерывна на (a, b).
Если $x_1, x_2 \in (a, b)$, то $f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$ и дифференцируема на (x_1, x_2).
Следовательно по теореме Лагранжа о среднем

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то
$\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. □

Следствие.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$, то $f(x)$ — постоянная на (a, b).

Доказательство.

По теореме о непрерывности дифференцируемой функции $f(x)$ непрерывна на (a, b).
Если $x_1, x_2 \in (a, b)$, то $f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$ и дифференцируема на (x_1, x_2).
Следовательно по теореме Лагранжа о среднем $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$,

Теорема 36 (Лагранжа о среднем).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b), то
$\exists c \in (a, b) : f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Доказательство.

Очевидно следует из теоремы Коши при $g(x) = x$. □

Следствие.

Если $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) = 0$, то $f(x)$ — постоянная на (a, b).

Доказательство.

По теореме о непрерывности дифференцируемой функции $f(x)$ непрерывна на (a, b).
Если $x_1, x_2 \in (a, b)$, то $f(x)$ непрерывна на $[x_1, x_2]$ и дифференцируема на (x_1, x_2).
Следовательно по теореме Лагранжа о среднем $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) = 0$,
т. е. $f(x_2) = f(x_1)$. □

Возрастание и убывание функции

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную,

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную,

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную)

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b),

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает,

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает,

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)\ f'(x) > 0$.

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$.

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$ получим,

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$ получим, что $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$,

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$ получим, что $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$ получим, что $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.
Остальные случаи рассматриваются аналогично. $\square$

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$ получим, что $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.
Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Следствие (критерий локального экстремума).

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$ получим, что $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Следствие (критерий локального экстремума).

Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a, b)

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$ получим, что $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.
Остальные случаи рассматриваются аналогично. $\square$

Следствие (критерий локального экстремума).

Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $c \in (a, b)$ — стационарная точка.
Тогда если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)$ $f'(x) < 0$ для $x < c$ и $f'(x) > 0$ для $x > c$,

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$ получим, что $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$. Остальные случаи рассматриваются аналогично. $\square$

Следствие (критерий локального экстремума).

Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $c \in (a, b)$ — стационарная точка.
Тогда если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)$ $f'(x) < 0$ для $x < c$ и $f'(x) > 0$ для $x > c$, то c — точка локального минимума.

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)$ $f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$ получим, что $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.
Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Следствие (критерий локального экстремума).

Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $c \in (a, b)$ — стационарная точка.
Тогда если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)$ $f'(x) < 0$ для $x < c$ и $f'(x) > 0$ для $x > c$, то c — точка локального минимума.
Аналогично, если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)$ $f'(x) > 0$ для $x < c$ и $f'(x) < 0$ для $x > c$,

Возрастание и убывание функции

Теорема 37 (критерий монотонности).

Если $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и имеет положительную (неотрицательную, отрицательную, неположительную) производную на (a, b), то $f(x)$ возрастает (соответственно неубывает, убывает, невозрастает) на $[a, b]$.

Доказательство.

Пусть $\forall x \in (a, b)\ f'(x) > 0$. Рассмотрим $a \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b$. Применяя теорему Лагранжа к отрезку $[x_1, x_2]$ получим, что $\exists c \in (x_1, x_2) : f(x_2) - f(x_1) = f'(c)(x_2 - x_1) > 0$, т. е. $f(x_1) < f(x_2)$.
Остальные случаи рассматриваются аналогично. □

Следствие (критерий локального экстремума).

Пусть $f(x)$ дифференцируема на (a, b) и $c \in (a, b)$ — стационарная точка.
Тогда если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f'(x) < 0$ для $x < c$ и $f'(x) > 0$ для $x > c$, то c — точка локального минимума.
Аналогично, если $\exists O(c) : \forall x \in O(c)\ f'(x) > 0$ для $x < c$ и $f'(x) < 0$ для $x > c$, то c — точка локального максимума.

Правило Лопиталя

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$,

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$,

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$,

$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$,

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)\ g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доопределим $f(a) = g(a) = 0$.

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a.

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a. Пусть $x \in \check{O}(a)$.

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a. Пусть $x \in \check{O}(a)$. Без ограничения общности будем считать, что $x > a$.

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)\ g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a. Пусть $x \in \check{O}(a)$. Без ограничения общности будем считать, что $x > a$. Тогда можно применить теорему Коши к отрезку $[a, x]$.

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a. Пусть $x \in \check{O}(a)$. Без ограничения общности будем считать, что $x > a$. Тогда можно применить теорему Коши к отрезку $[a, x]$. Тем самым $\exists c \in (a, x) : \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$.

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)\ g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a. Пусть $x \in \check{O}(a)$. Без ограничения общности будем считать, что $x > a$. Тогда можно применить теорему Коши к отрезку $[a, x]$. Тем самым $\exists c \in (a, x) : \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Переходя к пределу $x \to a$ мы получим утверждение теоремы. $\square$

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a. Пусть $x \in \check{O}(a)$. Без ограничения общности будем считать, что $x > a$. Тогда можно применить теорему Коши к отрезку $[a, x]$. Тем самым $\exists c \in (a, x) : \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Переходя к пределу $x \to a$ мы получим утверждение теоремы. $\square$

Пример.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x}$$

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a. Пусть $x \in \check{O}(a)$. Без ограничения общности будем считать, что $x > a$. Тогда можно применить теорему Коши к отрезку $[a, x]$. Тем самым $\exists c \in (a, x) : \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Переходя к пределу $x \to a$ мы получим утверждение теоремы. $\square$

Пример.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(1+2x)\cos x}$$

Правило Лопиталя

Теорема 38 (правило Лопиталя).

Если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в $\check{O}(a)$, $\forall x \in \check{O}(a)$ $g'(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и существует $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, то $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$.

Доказательство.

Доопределим $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ станут непрерывными в точке a. Пусть $x \in \check{O}(a)$. Без ограничения общности будем считать, что $x > a$. Тогда можно применить теорему Коши к отрезку $[a, x]$. Тем самым $\exists c \in (a, x) : \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f'(c)}{g'(c)}$. Переходя к пределу $x \to a$ мы получим утверждение теоремы. $\square$

Пример.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+2x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{(1+2x)\cos x} = 2.$$

Производные высших порядков

Производные высших порядков

Определение.

Производная $f'(x)$ называется производной первого порядка.

Производные высших порядков

Определение.

Производная $f'(x)$ называется производной первого порядка.
Пусть определена производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$.

Производные высших порядков

Определение.

Производная $f'(x)$ называется производной первого порядка.
Пусть определена производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$. Производной функции $f(x)$ n-го порядка называется

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Производные высших порядков

Определение.

Производная $f'(x)$ называется производной первого порядка.
Пусть определена производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$. Производной функции $f(x)$ n-го порядка называется

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Производные высших порядков обозначаются штрихами $f''(x), f'''(x)$, римскими цифрами $f^{IV}(x), f^{V}(x)$ или порядком в скобках $f^{(n)}(x)$.

Производные высших порядков

Определение.

Производная $f'(x)$ называется производной первого порядка.
Пусть определена производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$. Производной функции $f(x)$ n-го порядка называется

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Производные высших порядков обозначаются штрихами $f''(x), f'''(x)$, римскими цифрами $f^{IV}(x), f^{V}(x)$ или порядком в скобках $f^{(n)}(x)$.

Пример. Пусть $y = \sin x$.

Производные высших порядков

Определение.

Производная $f'(x)$ называется производной первого порядка.
Пусть определена производная $(n-1)$-го порядка $f^{(n-1)}(x)$. Производной функции $f(x)$ n-го порядка называется

$$f^{(n)}(x) = \left(f^{(n-1)}(x)\right)'.$$

Производные высших порядков обозначаются штрихами $f''(x), f'''(x)$, римскими цифрами $f^{IV}(x), f^{V}(x)$ или порядком в скобках $f^{(n)}(x)$.

Пример. Пусть $y = \sin x$.
Тогда $y' = \cos x$, $y'' = -\sin x$, $y''' = -\cos x$, $y^{IV} = \sin x$ и т. д.

Теорема 39 (формула Лейбница).

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Теорема 39 (формула Лейбница).

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Без доказательства.

Теорема 39 (формула Лейбница).

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Без доказательства.
Под производной нулевого порядка понимается сама функция.

Теорема 39 (формула Лейбница).

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Без доказательства.

Под производной нулевого порядка понимается сама функция.

Пример. Пусть $y = x^3 \cos x$. Требуется найти y'''.

Теорема 39 (формула Лейбница).

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Без доказательства.
Под производной нулевого порядка понимается сама функция.

Пример. Пусть $y = x^3 \cos x$. Требуется найти y'''.

$u = x^3$, $u' = 3x^2$, $u'' = 6x$, $u''' = 6$.

Теорема 39 (формула Лейбница).

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Без доказательства.
Под производной нулевого порядка понимается сама функция.

Пример. Пусть $y = x^3 \cos x$. Требуется найти y'''.

$u = x^3,\ u' = 3x^2,\ u'' = 6x,\ u''' = 6.$

$v = \cos x,\ v' = -\sin x,\ v'' = -\cos x,\ v''' = \sin x.$

Теорема 39 (формула Лейбница).

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Без доказательства.
Под производной нулевого порядка понимается сама функция.

Пример. Пусть $y = x^3 \cos x$. Требуется найти y'''.

$u = x^3,\ u' = 3x^2,\ u'' = 6x,\ u''' = 6.$

$v = \cos x,\ v' = -\sin x,\ v'' = -\cos x,\ v''' = \sin x.$

$y''' = (uv)''' = uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v$

Теорема 39 (формула Лейбница).

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Без доказательства.
Под производной нулевого порядка понимается сама функция.

Пример. Пусть $y = x^3 \cos x$. Требуется найти y'''.

$u = x^3,\ u' = 3x^2,\ u'' = 6x,\ u''' = 6.$

$v = \cos x,\ v' = -\sin x,\ v'' = -\cos x,\ v''' = \sin x.$

$y''' = (uv)''' = uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v = x^3 \sin x - 9x^2 \cos x - 18x \sin x + 6 \cos x =$

Теорема 39 (формула Лейбница).

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}.$$

Без доказательства.
Под производной нулевого порядка понимается сама функция.

Пример. Пусть $y = x^3 \cos x$. Требуется найти y'''.

$u = x^3,\ u' = 3x^2,\ u'' = 6x,\ u''' = 6.$

$v = \cos x,\ v' = -\sin x,\ v'' = -\cos x,\ v''' = \sin x.$

$y''' = (uv)''' = uv''' + 3u'v'' + 3u''v' + u'''v = x^3 \sin x - 9x^2 \cos x - 18x \sin x + 6 \cos x =$
$=(-9x^2 + 6)\cos x + (x^3 - 18x)\sin x$

Теорема 40 (формула Тейлора).

Теорема 40 (формула Тейлора).

Если $f(x)$ имеет в некоторой $O(x_0)$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка,

Теорема 40 (формула Тейлора).

Если $f(x)$ имеет в некоторой $O(x_0)$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка, то

$$\forall x \in O(x_0)\ \exists c \in (x_0, x) : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Теорема 40 (формула Тейлора).

Если $f(x)$ имеет в некоторой $O(x_0)$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка, то

$$\forall x \in O(x_0)\ \exists c \in (x_0, x) : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Без доказательства.

Теорема 40 (формула Тейлора).

Если $f(x)$ имеет в некоторой $O(x_0)$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка, то

$$\forall x \in O(x_0)\ \exists c \in (x_0, x) : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Без доказательства.

Эту формулу называют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Теорема 40 (формула Тейлора).

Если $f(x)$ имеет в некоторой $O(x_0)$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка, то

$$\forall x \in O(x_0)\ \exists c \in (x_0, x) : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}.$$

Без доказательства.

Эту формулу называют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Поскольку $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} = o\left((x-x_0)^n\right)$,

Теорема 40 (формула Тейлора).

Если $f(x)$ имеет в некоторой $O(x_0)$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка, то

$$\forall x \in O(x_0)\ \exists c \in (x_0, x) : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Без доказательства.

Эту формулу называют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Поскольку $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = o\left((x - x_0)^n\right)$, то формулу Тейлора можно записать

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

Теорема 40 (формула Тейлора).

Если $f(x)$ имеет в некоторой $O(x_0)$ непрерывную производную $(n+1)$-го порядка, то

$$\forall x \in O(x_0)\ \exists c \in (x_0, x) : f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Без доказательства.

Эту формулу называют формулой Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

Поскольку $\dfrac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} = o\left((x - x_0)^n\right)$, то формулу Тейлора можно записать

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + o\left((x - x_0)^n\right)$$

(формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

В случае $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

В случае $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Формулы Маклорена для некоторых элементарных функций:

В случае $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Формулы Маклорена для некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

В случае $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Формулы Маклорена для некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

В случае $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Формулы Маклорена для некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

В случае $x_0 = 0$ формулу Тейлора называют формулой Маклорена.

Формулы Маклорена для некоторых элементарных функций:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^{n+1}).$$

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$ и в некоторой $O(x_0)$ существует непрерывная вторая производная $f''(x)$.

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$ и в некоторой $O(x_0)$ существует непрерывная вторая производная $f''(x)$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$ и в некоторой $O(x_0)$ существует непрерывная вторая производная $f''(x)$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.
Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$ и в некоторой $O(x_0)$ существует непрерывная вторая производная $f''(x)$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.
Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$.

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$ и в некоторой $O(x_0)$ существует непрерывная вторая производная $f''(x)$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.
Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ можно считать, что $\forall x \in O(x_0)$ $f''(x) > 0$.

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$ и в некоторой $O(x_0)$ существует непрерывная вторая производная $f''(x)$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.
Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ можно считать, что $\forall x \in O(x_0)$ $f''(x) > 0$.
Т. к. x_0 — стационарная точка, то $f'(x_0) = 0$.

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$ и в некоторой $O(x_0)$ существует непрерывная вторая производная $f''(x)$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.
Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ можно считать, что $\forall x \in O(x_0)$ $f''(x) > 0$.
Т. к. x_0 — стационарная точка, то $f'(x_0) = 0$. Разложим $f(x)$ в $O(x_0)$ по формуле Тейлора.

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$ и в некоторой $O(x_0)$ существует непрерывная вторая производная $f''(x)$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.
Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ можно считать, что $\forall x \in O(x_0)$ $f''(x) > 0$.
Т. к. x_0 — стационарная точка, то $f'(x_0) = 0$. Разложим $f(x)$ в $O(x_0)$ по формуле Тейлора.
Для некоторого $c \in (x_0, x)$ и $\forall x \neq x_0$

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$ и в некоторой $O(x_0)$ существует непрерывная вторая производная $f''(x)$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.
Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ можно считать, что $\forall x \in O(x_0)$ $f''(x) > 0$.
Т. к. x_0 — стационарная точка, то $f'(x_0) = 0$. Разложим $f(x)$ в $O(x_0)$ по формуле Тейлора.
Для некоторого $c \in (x_0, x)$ и $\forall x \neq x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2}_{>0} > f(x_0).$$

Теорема 41 (критерий локального экстремума).

Пусть x_0 — стационарная точка $f(x)$ и в некоторой $O(x_0)$ существует непрерывная вторая производная $f''(x)$.
Если $f''(x_0) > 0$, то x_0 — точка локального минимума.
Если $f''(x_0) < 0$, то x_0 — точка локального максимума.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ можно считать, что $\forall x \in O(x_0)$ $f''(x) > 0$.
Т. к. x_0 — стационарная точка, то $f'(x_0) = 0$. Разложим $f(x)$ в $O(x_0)$ по формуле Тейлора.
Для некоторого $c \in (x_0, x)$ и $\forall x \neq x_0$

$$f(x) = f(x_0) + \underbrace{\frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)}_{=0} + \underbrace{\frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2}_{>0} > f(x_0).$$

Случай $f''(x_0) < 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Выпуклость и точки перегиба

Выпуклость и точки перегиба

Определение.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.

Выпуклость и точки перегиба

Определение.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Говорят, что график функции выпуклый вниз в точке x_0,

Выпуклость и точки перегиба

Определение.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Говорят, что график функции выпуклый вниз в точке x_0, если в некоторой $O(x_0)$ график $f(x)$ лежит выше касательной к графику в точке x_0.

Выпуклость и точки перегиба

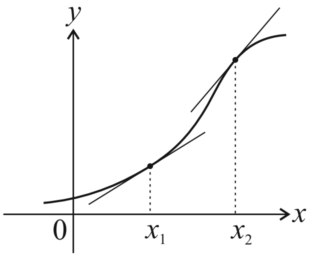
Определение.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Говорят, что график функции выпуклый вниз в точке x_0, если в некоторой $O(x_0)$ график $f(x)$ лежит выше касательной к графику в точке x_0.
Аналогично, выпуклый вверх, если график лежит ниже касательной.

Выпуклость и точки перегиба

Определение.

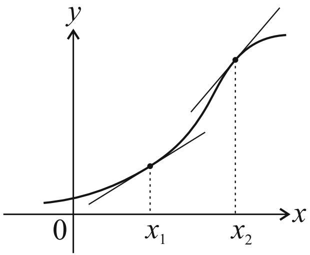
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Говорят, что график функции выпуклый вниз в точке x_0, если в некоторой $O(x_0)$ график $f(x)$ лежит выше касательной к графику в точке x_0.
Аналогично, выпуклый вверх, если график лежит ниже касательной.



Выпуклость и точки перегиба

Определение.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Говорят, что график функции выпуклый вниз в точке x_0, если в некоторой $O(x_0)$ график $f(x)$ лежит выше касательной к графику в точке x_0.
Аналогично, выпуклый вверх, если график лежит ниже касательной.

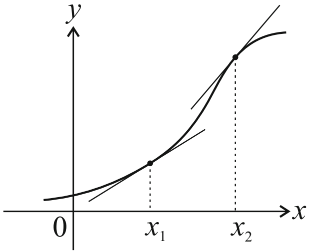


В точке x_1 график функции выпуклый вниз,

Выпуклость и точки перегиба

Определение.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
Говорят, что график функции выпуклый вниз в точке x_0, если в некоторой $O(x_0)$ график $f(x)$ лежит выше касательной к графику в точке x_0.
Аналогично, выпуклый вверх, если график лежит ниже касательной.



В точке x_1 график функции выпуклый вниз, а в точке x_2 — выпуклый вверх.

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$,

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$,

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то ее график выпуклый вверх в точке x_0.

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то ее график выпуклый вверх в точке x_0.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$.

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то ее график выпуклый вверх в точке x_0.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 $\exists O(x_0) : \forall x \in O(x_0)$ $f''(x) > 0$.

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то ее график выпуклый вверх в точке x_0.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 $\exists O(x_0) : \forall x \in O(x_0)\ f''(x) > 0$.
По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c)}_{>0},$$

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то ее график выпуклый вверх в точке x_0.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 $\exists O(x_0) : \forall x \in O(x_0)\ f''(x) > 0$.
По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c)}_{>0},$$

т.е. $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то ее график выпуклый вверх в точке x_0.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 $\exists O(x_0) : \forall x \in O(x_0)$ $f''(x) > 0$.
По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c)}_{>0},$$

т.е. $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Пусть точка (x, y) лежит на касательной к графику $f(x)$ в точке x_0.

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то ее график выпуклый вверх в точке x_0.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 $\exists O(x_0) : \forall x \in O(x_0)$ $f''(x) > 0$.
По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c)}_{>0},$$

т.е. $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Пусть точка (x, y) лежит на касательной к графику $f(x)$ в точке x_0.
Из уравнения касательной следует, что $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, т. е. $f(x) > y$.

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то ее график выпуклый вверх в точке x_0.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 $\exists O(x_0) : \forall x \in O(x_0)$ $f''(x) > 0$.
По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c)}_{>0},$$

т.е. $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Пусть точка (x, y) лежит на касательной к графику $f(x)$ в точке x_0.
Из уравнения касательной следует, что $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, т. е. $f(x) > y$.
Значит, график лежит выше касательной.

Теорема 42.

Если функция $f(x)$ имеет в точке x_0 непрерывную вторую производную и $f''(x_0) > 0$, то ее график выпуклый вниз в точке x_0.
Если $f''(x_0) < 0$, то ее график выпуклый вверх в точке x_0.

Доказательство.

Пусть $f''(x_0) > 0$. В силу непрерывности $f''(x)$ в точке x_0 $\exists O(x_0) : \forall x \in O(x_0)\ f''(x) > 0$.
По формуле Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \underbrace{\frac{(x - x_0)^2}{2} f''(c)}_{>0},$$

т.е. $f(x) > f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.
Пусть точка (x, y) лежит на касательной к графику $f(x)$ в точке x_0.
Из уравнения касательной следует, что $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$, т. е. $f(x) > y$.
Значит, график лежит выше касательной.

Случай $f''(x_0) < 0$ рассматривается аналогично. $\square$

Точки перегиба

Точки перегиба

Определение.

Если слева и справа от точки x_0 график $f(x)$ имеет разную выпуклость, то точка x_0 называется точкой перегиба.

Точки перегиба

Определение.

Если слева и справа от точки x_0 график $f(x)$ имеет разную выпуклость, то точка x_0 называется точкой перегиба.

Следствие.

Если в x_0 функция $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную и x_0 — точка перегиба, то $f''(x_0) = 0$.

Асимптоты

Асимптоты

Определение.

Если существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \infty$,

Асимптоты

Определение.

Если существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x)=\infty$, то говорят, что прямая $x=a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$.

Асимптоты

Определение.

Если существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \infty$, то говорят, что прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$.

Пример. График функции $y = \ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ потому, что $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$.

Асимптоты

Определение.

Если существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \infty$, то говорят, что прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$.

Пример. График функции $y = \ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ потому, что $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$.

Определение.

Говорят, что прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$,

Асимптоты

Определение.

Если существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \infty$, то говорят, что прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$.

Пример. График функции $y = \ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ потому, что $\lim\limits_{x\to +0} \ln x = -\infty$.

Определение.

Говорят, что прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$,

Асимптоты

Определение.

Если существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \infty$, то говорят, что прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$.

Пример. График функции $y = \ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ потому, что $\lim\limits_{x\to +0} \ln x = -\infty$.

Определение.

Говорят, что прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Асимптоты

Определение.

Если существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x\to a\pm 0} f(x) = \infty$, то говорят, что прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $f(x)$.

Пример. График функции $y = \ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ потому, что $\lim\limits_{x\to +0} \ln x = -\infty$.

Определение.

Говорят, что прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$.

Асимптоты

Определение.

Если существует хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a \pm 0} f(x) = \infty$, то говорят, что прямая $x = a$ является вертикальной асимптотой графика функции $f(x)$.

Пример. График функции $y = \ln x$ имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ потому, что $\lim\limits_{x \to +0} \ln x = -\infty$.

Определение.

Говорят, что прямая $y = kx + b$ является наклонной асимптотой графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$, если $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to +\infty$.

Аналогично определяется наклонная асимптота при $x \to -\infty$.

Если $k = 0$, то асимптота $y = b$ называется горизонтальной.

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Для определенности пусть $x \to +\infty$.

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Для определенности пусть $x \to +\infty$.
Необходимость.

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Для определенности пусть $x \to +\infty$.
Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика $f(x)$.

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Для определенности пусть $x \to +\infty$.

Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика $f(x)$. Тогда по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$.

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Для определенности пусть $x \to +\infty$.
Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика $f(x)$. Тогда по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Для определенности пусть $x \to +\infty$.
Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика $f(x)$. Тогда по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\alpha(x)}{x}}_{\to 0} \right)$$

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Для определенности пусть $x \to +\infty$.
Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика $f(x)$. Тогда по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\alpha(x)}{x}}_{\to 0} \right) = k,$$

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Для определенности пусть $x \to +\infty$.
Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика $f(x)$. Тогда по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\alpha(x)}{x}}_{\to 0} \right) = k, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx)$$

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Для определенности пусть $x \to +\infty$.
Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика $f(x)$. Тогда по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\alpha(x)}{x}}_{\to 0} \right) = k, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (kx + b + \alpha(x) - kx)$$

Теорема 43.

Для того, чтобы прямая $y = kx + b$ была наклонной асимптотой к графику функции $f(x)$ при $x \to \pm\infty$ необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x} = k \qquad \text{и} \qquad \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - kx) = b$$

(везде выбирается один и тот же определенный знак бесконечности).

Доказательство

Для определенности пусть $x \to +\infty$.
Необходимость. Пусть $y = kx + b$ — наклонная асимптота графика $f(x)$. Тогда по определению $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$. Имеем

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(k + \underbrace{\frac{b}{x}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{\alpha(x)}{x}}_{\to 0} \right) = k, \qquad \lim_{x\to+\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to+\infty} (kx + b + \alpha(x) - kx) = b.$$

Доказательство.

Достаточность. Запишем $f(x) = kx + b + \alpha(x)$.

Доказательство.

Достаточность. Запишем $f(x) = kx + b + \alpha(x)$.
Тогда $\alpha(x) = f(x) - kx - b$.

Доказательство.

Достаточность. Запишем $f(x) = kx + b + \alpha(x)$.
Тогда $\alpha(x) = f(x) - kx - b$.
Откуда $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - kx) - b = 0$. $\square$