Известия вузов Математика
2009, № 3, с. 3–36

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

Посвящается 50-летию журнала

Л. Н. ШЕВРИН, Б. М. ВЕРНИКОВ, М. В. ВОЛКОВ

РЕШЕТКИ МНОГООБРАЗИЙ ПОЛУГРУПП

Аннотация. В статье дан обзор большого массива результатов, полученных на протяжении четырех десятилетий в исследованиях по решеткам многообразий полугрупп. Приведен ряд открытых проблем.

Ключевые слова: полугруппа, многообразие, решетка.

УДК: 512.532.2

Abstract. We survey a great number of results obtained in investigations on lattices of varieties of semigroups during four decades. A number of unsolved problems are formulated.

Keywords: semigroup, variety, lattice.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Поступила 16.05.2008

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 06-01-00613).

§ 0. Введение

0.1. Вступительные замечания. Теория многообразий полугрупп интенсивно развивается в течение уже более четырех с половиной десятилетий, и здесь накоплен огромный и очень разнообразный материал. Довольно давно возникла потребность его обозрения и систематизации. Это привело первого из авторов к замыслу написать совместно с сотрудниками цикл обзорных статей. Первая из них, [46], посвящена эквациональным аспектам теории полугрупповых многообразий[1]. Темой второй статьи, [47], были вопросы, связанные с рассмотрением структурных свойств полугрупп в многообразиях – условий локальной конечности и финитной аппроксимируемости, разложений в связки и вложений. Настоящая статья – третья в задуманном цикле[2]. Ее подготовка, к сожалению, отодвинулась на много лет, зато появилась возможность отразить в ней и достижения последних двух десятилетий в данной области.

К настоящему времени опубликовано более 200 работ, посвященных (полностью или частично) решеткам полугрупповых многообразий. Рамки статьи служили определенным ограничительным фактором при отборе обозреваемого материала. В этом отборе мы руководствовались желанием представить основные линии развития обсуждаемой области и очертить границу между достигнутыми на сегодняшний день продвижениями и остающимися открытыми проблемами. Мы воспроизводим наиболее существенные из фактов о решетках полугрупповых многообразий, отраженных в ранних обзорах [55] и [3], но подавляющая часть содержания предлагаемой статьи базируется на результатах, полученных за последние 30 лет, т. е. после выхода второго из этих обзоров. В список литературы включены только те источники, на которые есть ссылки в тексте, и, как правило, мы не упоминаем о работах, результаты которых перекрыты последующими публикациями.

В исследованиях по теории многообразий немало внимания уделяется и *унарным полугруппам*, т. е. полугруппам с дополнительной унарной операцией. Два важнейших типа унарных полугрупп – инверсные полугруппы с операцией взятия инверсного элемента и вполне регулярные полугруппы с операцией взятия обратного элемента в максимальной подгруппе. Класс всех инверсных полугрупп и класс всех вполне регулярных полугрупп в соответствующей сигнатуре суть многообразия, включающие в качестве подмногообразия многообразие всех групп. Многообразия инверсных полугрупп занимают заметное место в монографии [97], где, в частности, достаточно полно трактуются вопросы о решетке таких многообразий. Многообразиям вполне регулярных полугрупп уделено достаточное внимание, в том числе с точки зрения решеток многообразий, в монографии [102]. Отметим, что в основной текст обзоров [46] и [47], посвященный обычным полугрупповым многообразиям, были вплетены также сведения, относящиеся к соответствующим вопросам для многообразий инверсных и вполне регулярных полугрупп. В последние годы стал рассматриваться еще один тип унарных полугрупп – эпигруппы. Напомним, что *эпигруппой* называется полугруппа, в которой некоторая степень любого элемента лежит в подгруппе данной полугруппы. Эпигруппа естественным образом превращается в унарную полугруппу (см. ниже п. 2.1); унарные вполне регулярные полугруппы оказываются при этом специальным типом эпигрупп. Идея рассматривать эпигруппы как унарные полугруппы была определяющей для работы [45]. Взгляд на эпигруппы как на унарные полугруппы позволяет ставить для них разнообразные вопросы и в русле теории многообразий. В [45] приведены отправные

[1]Отметим, что в развернутом введении к [46] приведены довольно подробные исторические комментарии и дана характеристика общей картины исследований по многообразиям полугрупп на середину 1980-х годов.

[2]Уместно отметить здесь, что еще один круг вопросов – алгоритмические проблемы (причем применительно не только к многообразиям полугрупп, но также к многообразиям групп, ассоциативных и лиевых алгебр и, в известной степени, к многообразиям произвольных универсальных алгебр) – стал темой фундаментального обзора [72], написанного по инициативе первого автора его учениками.

факты, относящиеся к многообразиям эпигрупп, и поставлен целый ряд вопросов, касающихся возможного дальнейшего развития в этом плане; соответствующая информация в основном воспроизведена в обзоре [116], где отражены также продвижения, достигнутые за последующие годы. В настоящем обзоре мы затрагиваем часть этой информации, которая относится к решеткам многообразий. В обзор включены также некоторые важные сведения о решетках многообразий вполне регулярных полугрупп, не нашедшие отражения в монографии [102], и несколько фактов о решетках многообразий инверсных полугрупп.

Достаточно ясное представление о содержании статьи дает ее оглавление. В общих чертах можно сказать, что обозреваемый материал относится главным образом к трем аспектам: исследование свойств решетки всех многообразий полугрупп и тех или иных ее важных подрешеток; характеризация многообразий с заданными свойствами решетки их подмногообразий; выделение многообразий, являющихся в том или ином смысле особыми элементами решетки всех полугрупповых многообразий. В задачах описания тех или иных рассматриваемых решеток в ряде случаев искомое описание удается получить в терминах точных теоретико-решеточных конструкций, вплоть до указания диаграмм (ситуации такого типа встретятся в § 1 и § 4), в других случаях получаемое описание удается сформулировать, указывая редукцию к каким-либо производным решеткам некоторых алгебраических структур, которые представляются «более ясными» и более удобными для дальнейших рассмотрений (ситуации такого типа встретятся в § 5–7 и § 12).

Отметим, что подчас наиболее принципиальные результаты в обсуждаемой области (например, дающие исчерпывающую классификацию рассматриваемых многообразий) имеют весьма пространные формулировки. В таких случаях мы по соображениям экономии места ограничиваемся описанием сути соответствующего результата, отсылая заинтересованного читателя за деталями к первоисточнику.

0.2. О терминологии и обозначениях. Предполагается, что читатель знаком с используемыми в статье стандартными общеалгебраическими сведениями, равно как и с хрестоматийными понятиями теории полугрупп, теории решеток и теории многообразий универсальных алгебр. В качестве основных источников для справок можно назвать монографии [29], [25], [33] и, в особенности, справочные книги [36] и [118]. В терминологии мы в основном следуем упомянутым источникам[3]. Мы продолжаем следовать принятой в [46] и [47] договоренности о том, что прилагательное, которое указывает свойство, присущее всем полугруппам данного многообразия, мы относим к самому многообразию; именно в таком смысле понимаются выражения «коммутативное многообразие», «периодическое многообразие», «нильмногообразие» и т. п. В этой связи стоит отметить разницу трактовок терминов «вполне регулярное многообразие полугрупп» и «многообразие вполне регулярных полугрупп»: первый означает многообразие, состоящее из вполне регулярных полугрупп в обычной полугрупповой сигнатуре, второй подразумевает, что речь идет об унарных полугруппах.

Напомним определения некоторых типов полугрупповых многообразий и тождеств. Многообразие, отличное от многообразия всех полугрупп, называется *собственным.* Тождество $u = v$ называется *уравновешенным*, если всякая буква входит в слова u и v одинаковое число раз. *Длиной* уравновешенного тождества называется длина каждой из его частей.

[3] Отметим в этой связи, что во многих работах (начиная, видимо, с книги [65]) и, в частности, в предыдущих обзорах [46] и [47] вполне регулярные полугруппы, т. е. объединения групп, назывались *клиффордовыми.* Вместе с тем, в ряде работ термин «клиффордова полугруппа» стал, по нашему мнению, менее удачно использоваться для специального типа вполне регулярных полугрупп – полурешеток групп (см. по этому поводу терминологические комментарии в п. 2.1 обзора [116] или, более подробные, в п. I.2 монографии [117]). Перейдя к термину «вполне регулярная полугруппа», мы приняли во внимание, что он стал более употребительным.

Тождество вида $x_1x_2\cdots x_n = x_{1\pi}x_{2\pi}\cdots x_{n\pi}$, где π – нетривиальная перестановка на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$, называется *перестановочным.* *Перестановочное многообразие* – это многообразие, удовлетворяющее некоторому перестановочному тождеству. Пару тождеств $wx = xw = w$, где буква x не входит в слово w, принято заменять символическим тождеством $w = 0$. (Такая запись оправданна, поскольку полугруппа с такими тождествами имеет нуль и все значения слова w в ней равны нулю.) Тождество вида $w = 0$, а также всякое многообразие, задаваемое тождествами такого вида, называется 0-*приведенным.* Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ называется многообразием *конечной ступени*, если все нильполугруппы в $\mathcal{V}$ нильпотентны; при этом $\mathcal{V}$ есть многообразие *ступени* n, если ступени нильпотентности нильполугрупп из $\mathcal{V}$ ограничены числом n, причем n – наименьшее число с таким свойством[4]. Многообразие полугрупп называют *конечно порожденным*, если оно порождается конечной полугруппой.

Напомним теперь определения ряда типов решеток и их элементов. Говорят, что элемент x частично упорядоченного множества $\langle S; \leq\rangle$ *покрывает* элемент $y \in S$, если $y < x$ и не существует элемента $z \in S$ такого, что $y < z < x$. Решетка $\langle L; \vee, \wedge\rangle$ называется [*слабо*] *полумодулярной вверх*, если для любых $x, y \in L$ из того, что x покрывает $x \wedge y$ [соответственно x и y покрывают $x \wedge y$] вытекает, что $x \vee y$ покрывает y. Двойственным образом определяются [*слабо*] *полумодулярные вниз* решетки. Решетка называется *полудистрибутивной вверх*, если она удовлетворяет квазитождеству $x \vee y = x \vee z \longrightarrow x \vee y = x \vee (y \wedge z)$. *Полудистрибутивные вниз* решетки определяются двойственно. Элемент x решетки L называется *нейтральным*, если для любых $y, z \in L$ элементы x, y и z порождают дистрибутивную подрешетку в L. Элемент x решетки L называется *модулярным*, если $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee y$ для всех $y, z \in L$ таких, что $y \leq z$, и *верхне-модулярным*, если $(z \wedge x) \vee y = (z \vee y) \wedge x$ для всех $y, z \in L$ таких, что $y \leq x$. *Нижне-модулярные* элементы определяются двойственно к верхне-модулярным.

Напомним еще, что *идеалом* [*коидеалом*] решетки называется всякая ее подрешетка, содержащая нижние [верхние] грани любого ее элемента. Через $[a)$ будет обозначаться *главный коидеал* данной решетки L, порожденный элементом $a \in L$; в силу определения, $[a) = \{x \in L \mid x \geq a\}$.

Многообразие полугрупп, заданное системой тождеств Σ, обозначается $\operatorname{var}\Sigma$. Зафиксируем обозначения для нескольких конкретных многообразий полугрупп, которые будут неоднократно встречаться в дальнейшем: $\mathcal{SEM}$ – многообразие всех полугрупп, $\mathcal{COM} = \operatorname{var}\{xy = yx\}$ – многообразие всех коммутативных полугрупп, $\mathcal{A}_n = \operatorname{var}\{x^ny = y, xy = yx\}$ – многообразие всех абелевых групп экспоненты, делящей n, $\mathcal{SL} = \operatorname{var}\{x^2 = x, xy = yx\}$ – многообразие всех полурешеток, $\mathcal{LZ} = \operatorname{var}\{xy = x\}$ – многообразие всех полугрупп левых нулей, $\mathcal{RZ} = \operatorname{var}\{xy = y\}$ – многообразие всех полугрупп правых нулей, $\mathcal{ZM} = \operatorname{var}\{xy = 0\}$ – многообразие всех полугрупп с нулевым умножением, $\mathcal{T}$ – тривиальное многообразие.

Через $L(\mathcal{K})$ обозначается решетка всех многообразий, содержащихся в классе алгебраических систем $\mathcal{K}$. Решетка $L(\mathcal{SEM})$ будет всюду обозначаться $\mathbf{SEM}$.

[4]Отметим, что ранее в ряде работ, в том числе в обзоре [47], многообразия с такими свойствами назывались многообразиями конечного индекса и, соответственно, многообразиями индекса n. Это, однако, противоречит общепринятому употреблению термина «индекс» в совершенно другом значении при рассмотрении эпигрупп и, в частности, периодических полугрупп (см. п. 2.1). С другой стороны, термин «ступень многообразия» в приведенном выше смысле полностью согласуется с понятием ступени нильпотентности полугруппы. Все эти соображения и объясняют наше решение по выбору термина в данном случае.

ГЛАВА I. Первый слой информации

§ 1. Решетка всех полугрупповых многообразий

Решетка **SEM** обладает всеми хрестоматийными свойствами решеток подмногообразий многообразий универсальных алгебр: она полна, атомна и коалгебраична, причем ее кокомпактными элементами являются в точности конечно базируемые многообразия. Еще в 1955 году в работе Калицкого и Скотта [71] были описаны атомы решетки **SEM**: это многообразия $\mathcal{A}_p$ для всех простых p, $\mathcal{LZ}$, $\mathcal{RZ}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$ и только они. Многообразия $\mathcal{SL}$ и $\mathcal{ZM}$ обладают еще одним примечательным свойством: они являются нейтральными элементами решетки **SEM** (см. теорему 14.2). Из результатов работы [2] вытекает, что если многообразия полугрупп $\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y}$ не содержат некоторый атом $\mathcal{A}$ решетки **SEM**, то и $\mathcal{X} \vee \mathcal{Y} \not\supseteq \mathcal{A}$. Отсюда следует, что решетка **SEM** 0-*дистрибутивна*, т. е. удовлетворяет следующему условию: $x \wedge z = y \wedge z = 0 \longrightarrow (x \vee y) \wedge z = 0$. Коатомов в решетке **SEM** нет (см. теорему 3.4), более того, несложно проверить, что каждый ее коидеал континуален.

Если $\mathcal{V}$ – многообразие полугрупп, то многообразие, состоящее из полугрупп, двойственных (т. е. антиизоморфных) полугруппам из $\mathcal{V}$, обозначается $\overleftarrow{\mathcal{V}}$. Очевидно, что отображение δ решетки **SEM** в себя, задаваемое правилом $\delta(\mathcal{V}) = \overleftarrow{\mathcal{V}}$ для всякого многообразия $\mathcal{V}$, является автоморфизмом решетки **SEM**. Следующий вопрос остается пока открытым.

Вопрос 1.1. *Существуют ли нетривиальные автоморфизмы решетки* **SEM**, *отличные от* δ?

Отметим, что существует бесконечно много нетривиальных инъективных эндоморфизмов решетки **SEM**. А именно, пусть $\mathcal{V} = \operatorname{var}\{u_i = v_i \mid i \in I\}$, m и n – натуральные числа, а $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n$ – буквы, не входящие в запись ни одного из слов u_i и v_i. Положим $\mathcal{V}^{m,n} = \operatorname{var}\{x_1 \cdots x_m u_i y_1 \cdots y_n = x_1 \cdots x_m v_i y_1 \cdots y_n \mid i \in I\}$. Как проверено в работе Копаму [76], многообразие $\mathcal{V}^{m,n}$ не зависит от выбора базиса тождеств многообразия $\mathcal{V}$ и отображение $\mathcal{V} \longmapsto \mathcal{V}^{m,n}$ задает инъективный эндоморфизм решетки **SEM**. С этими эндоморфизмами мы еще встретимся в п. 10.1. Мы будем называть их *эндоморфизмами Копаму.*

В целом решетка **SEM** устроена чрезвычайно сложно. Достаточно упомянуть, что она содержит интервал, антиизоморфный решетке разбиений счетного множества [51, 66]. Отсюда, в силу известных свойств решеток разбиений, немедленно вытекает, что решетка подмногообразий произвольного многообразия алгебр не более чем счетного типа вложима в **SEM**, что **SEM** не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному квазитождеству и что решетка **SEM** континуальна. Одним из немногих «позитивных» свойств этой решетки является свойство покрываемости (см. теорему 3.1).

На рис. 1 указаны наиболее важные подрешетки решетки **SEM** и их взаимное расположение. Прежде всего, **SEM** разбивается на две большие подрешетки с существенно различными свойствами: коидеал **OC** всех *надкоммутативных* многообразий (т. е. многообразий, содержащих $\mathcal{COM}$) и идеал **Per** всех периодических многообразий.

Решетка **OC** допускает относительно простое и прозрачное описание в терминах решеток конгруэнций унарных алгебр некоторого специального типа (см. п. 5.1). Таким образом, наиболее сложной частью решетки **SEM** является решетка **Per**.

В решетке **Per** можно выделить два обширных идеала с весьма различными свойствами: идеал **CR** всех периодических вполне регулярных многообразий и идеал **Comb** всех *комбинаторных* многообразий (т. е. многообразий, в которых все группы одноэлементны). Их пересечением является решетка **I** всех многообразий полугрупп идемпотентов, которая полностью описана независимо А. П. Бирюковым [5], Фенмором [56] и Герхардом [57]. Другое доказательство этого результата опубликовано в работе Герхарда и Петрича [59]. Решетка **I** счетна и дистрибутивна. Она изображена на рис. 2.

Рис. 1. «Карта» решетки всех полугрупповых многообразий

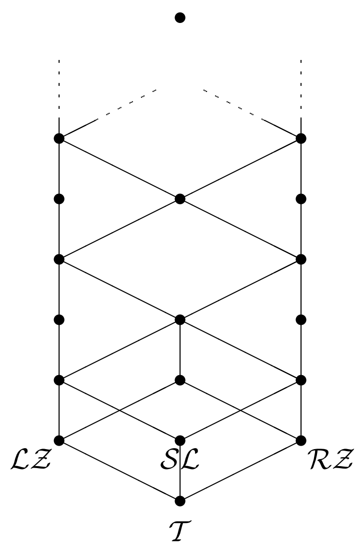

Рис. 2. Решетка многообразий полугрупп идемпотентов

Говоря о решетке **CR**, следует отметить, что ее можно рассматривать как подрешетку решетки многообразий унарных вполне регулярных полугрупп (см. § 6). Последняя была предметом интенсивного изучения в 1980-е годы, и на сегодняшний день ее строение изучено достаточно хорошо. В § 6 приведены ключевые результаты, относящиеся к этой решетке.

О строении решетки **Comb** известно существенно меньше. Упомянутые выше результаты работ [51, 66] относятся фактически именно к этой решетке, и потому можно утверждать, что решетка **Comb** устроена в некотором смысле столь же сложно, как и вся решетка **SEM**. То же самое можно сказать об идеале **Nil** решетки **Comb**, состоящем из всех нильмногообразий, поскольку результаты работы [66] относятся именно к этому идеалу. Вместе с тем, решетка **Nil**, как и решетка **OC**, может быть некоторым образом охарактеризована в терминах решеток конгруэнций унарных алгебр специального типа (см. § 7).

Все перечисленные выше типы многообразий полугрупп допускают характеризацию на языке атомов решетки **SEM** (см. табл. 1).

Многообразие полугрупп является	тогда и только тогда, когда оно
надкоммутативным	содержит $\mathcal{A}_p$ для всех простых p
периодическим	не содержит $\mathcal{A}_p$ для некоторого простого p
вполне регулярным	не содержит $\mathcal{ZM}$
групповым	не содержит $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{SL}, \mathcal{ZM}$
комбинаторным	не содержит $\mathcal{A}_p$ для всех простых p
многообразием полугрупп идемпотентов	не содержит $\mathcal{ZM}$ и $\mathcal{A}_p$ для всех простых p
нильмногообразием	не содержит $\mathcal{LZ}, \mathcal{RZ}, \mathcal{SL}$ и $\mathcal{A}_p$ для всех простых p

Таблица 1. Характеризация некоторых типов многообразий

§ 2. Многообразия эпигрупп

2.1. Общие замечания. Для элемента a данной эпигруппы через e_a обозначим единицу максимальной подгруппы G, которой принадлежит некоторая степень a. Известно, что $ae_a = e_a a$ и $ae_a \in G$. Обозначим через $\overline{a}$ элемент, обратный к ae_a в G. Элемент $\overline{a}$ называется *псевдообратным* к a, и отображение $a \longmapsto \overline{a}$ превращает эпигруппу в унарную полугруппу. Эпигруппа имеет *индекс* n, если n-я степень любого ее элемента лежит в некоторой ее подгруппе, причем n – наименьшее число с этим свойством. Через $\mathcal{E}$ обозначим класс всех эпигрупп, через $\mathcal{E}_n$ – класс всех эпигрупп индекса $\leq n$. Видно, что $\mathcal{E}_1$ – это в точности класс всех вполне регулярных полугрупп. Отметим, что при рассмотрении вполне регулярных полугрупп псевдообратный элемент для элемента a принято обозначать a^{-1}.

Всякая периодическая полугруппа является эпигруппой, и всякое периодическое многообразие полугрупп можно рассматривать как многообразие эпигрупп в сигнатуре с псевдообращением. Действительно, в периодическом многообразии выполняется тождество вида $x^n = x^{n+d}$, и операция псевдообращения в этом случае формульна в полугрупповой сигнатуре: легко видеть, что $\overline{x} = x^{nd-1}$. Тем самым, решетка **Per** естественным образом вкладывается в $L(\mathcal{E})$; допуская небольшую вольность, будем считать, что **Per** есть подрешетка решетки $L(\mathcal{E})$. В силу сказанного, результаты о периодических многообразиях полугрупп, равно как и результаты о многообразиях вполне регулярных полугрупп, могут быть интерпретированы и как результаты о многообразиях эпигрупп. Поэтому при изучении многообразий эпигрупп *per se* естественно подразумевать, что рассматриваются вопросы не внутри классов периодических и вполне регулярных полугрупп.

Известные к настоящему времени сведения о многообразиях эпигрупп относятся преимущественно к эквациональным и структурным аспектам (см. соответствующие результаты в [45] и [116]). Что касается рассмотрения решеток многообразий, то в этом направлении сделаны пока только первые шаги и основные продвижения здесь, как мы надеемся, впереди. Для любого n класс $\mathcal{E}_n$ есть многообразие; оно задается тождествами

$$(xy)z = x(yz), \quad x\overline{x} = \overline{x}x, \quad x\overline{x}^2 = \overline{x}, \quad x^{n+1}\overline{x} = x^n.$$

Класс $\mathcal{E}$ не является многообразием, так что $L(\mathcal{E})$ – решетка без единицы. В решетке $L(\mathcal{E})$ цепь $\mathcal{E}_1 \subset \mathcal{E}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{E}_n \subset \cdots$ можно, образно говоря, считать «хребтом» этой решетки, так как для любого многообразия эпигрупп $\mathcal{V}$ существует такое n, что $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{E}_n$. Как нетрудно убедиться, решетка $L(\mathcal{E})$ имеет те же атомы, что и **SEM**, а для любого n главный коидеал $[\mathcal{E}_n)$ решетки $L(\mathcal{E})$ имеет единственный атом – объединение $\mathcal{E}_n$ и многообразия, порожденного циклической нильпотентной полугруппой из $n+1$ элементов; этот атом содержится в любом отличном от $\mathcal{E}_n$ многообразии из $[\mathcal{E}_n)$. В п. 3.1 приведены два результата (и одна открытая проблема), относящиеся к свойству покрываемости применительно к решетке $L(\mathcal{E})$ и решеткам $L(\mathcal{E}_n)$.

В п. 4° из § 1 статьи [45] изложены соображения, касающиеся дальнейших возможных исследований многообразий эпигрупп; эти соображения в основном повторены в п. 2.3 обзора [116], часть таковых касается рассмотрения решеток многообразий. Мы не будем воспроизводить здесь эти соображения, отсылая заинтересованного читателя к указанным первоисточникам. Приведем лишь следующие два из отмеченных в [45] и [116] вопросов; первый сформулирован там в виде гипотезы.

Вопрос 2.1. *Верно ли, что для любого n решетка $L(\mathcal{E}_n)$ не имеет коатомов?*

Вопрос 2.2. а) *Каковы свойства интервалов $[\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$ в решетке $L(\mathcal{E})$* (*например, порядковые типы максимальных цепей и мощности максимальных антицепей в них*)? б) *Каковы взаимодействия между этими интервалами? Верно ли, в частности, что при $m \neq n$ решетки $[\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_{m+1}]$ и $[\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$ не изоморфны, а при $m < n$ решетка $[\mathcal{E}_m, \mathcal{E}_{m+1}]$ вложима в $[\mathcal{E}_n, \mathcal{E}_{n+1}]$?*

В связи с вопросом 2.2а отметим, что, как нетрудно доказать, интервал $[\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2]$ содержит цепь, изоморфную цепи действительных чисел с обычным порядком.

2.2. Полные конгруэнции на решетках $L(\mathcal{E}_n)$. Одним из стандартных методов при анализе решеток многообразий является изучение полных конгруэнций этих решеток. Каждая такая конгруэнция разбивает соответствующую решетку в объединение непересекающихся интервалов, строение которых может быть прозрачнее, чем строение всей решетки, а наибольшие и наименьшие элементы этих интервалов зачастую обладают интересными свойствами и могут служить «опорными точками» для дальнейших исследований. В качестве примера-образца упомянем здесь введенную Е. И. Клейманом [27] полную конгруэнцию на решетке **Inv** всех многообразий инверсных полугрупп, классы которой состоят из всех многообразий инверсных полугрупп, имеющих фиксированное объединение с многообразием всех групп. Как показал Райли [110], каждый класс этой конгруэнции модулярен, хотя сама решетка **Inv** немодулярна. Указанный подход с успехом применялся в 1980-х годах к решетке многообразий вполне регулярных полугрупп, а позднее – к решеткам различных родственных многообразиям классов конечных или регулярных полугрупп (псевдомногообразий, e-многообразий).

В интересной работе Пастейна [93] показано, что естественная общность для многих конструкций полных конгруэнций, применявшихся ранее в конечном или регулярном случае, достигается в решетке $L(\mathcal{E}_n)$. В частности, полными конгруэнциями на $L(\mathcal{E}_n)$ будут следующие отношения τ и γ, рассматривавшиеся ранее для решеток e-многообразий в [50] и для решеток многообразий вполне регулярных полугрупп в [100, 101, 105]: $\mathcal{V}\,\tau\,\mathcal{W}$ тогда и только тогда, когда многообразия $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ содержат одни и те же фундаментальные эпигруппы (эпигруппа называется *фундаментальной*, если ограничение любой ее нетривиальной конгруэнции на множество идемпотентов нетривиально); $\mathcal{V}\,\gamma\,\mathcal{W}$ тогда и только тогда, когда многообразия $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ содержат одни и те же идемпотентно порожденные эпигруппы. В [93] рассматривается также полная конгруэнция $\iota = \tau \vee \gamma$ на $L(\mathcal{E}_n)$. Доказывается, что $\mathcal{V}\,\iota\,\mathcal{W}$ тогда и только тогда, когда многообразия $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ содержат одни и те же фундаментальные идемпотентно порожденные эпигруппы, и что ι совпадает с ядром полного гомоморфизма решетки $L(\mathcal{E}_n)$ на решетку всех многообразий так называемых идемпотентных алгебр эпигрупп из $\mathcal{E}_n$.

Общая теория полных конгруэнций на решетках многообразий развита Пастейном и Троттером в [94], где указаны еще некоторые полные конгруэнции на $L(\mathcal{E}_n)$.

§ 3. Отношение покрытия

Изучению отношения покрытия в решетках многообразий уделялось большое внимание на ранней стадии развития теории многообразий. Это было, по-видимому, обусловлено надеждами на то, что строение решеток многообразий можно вскрыть, продвигаясь по ним «вверх»: от тривиального многообразия к его покрывающим, т. е. атомам, от атомов к их покрытиям и т. д. Хотя применительно к «большим» решеткам многообразий, таким, как **SEM**, эти надежды были несколько наивными, изучение отношения покрытия в **SEM** и родственных решетках многообразий принесло ряд интересных результатов.

3.1. Свойство покрываемости. Из общих свойств коалгебраических решеток следует, что каждое собственное подмногообразие в $\mathcal{SEM}$, задаваемое конечным числом тождеств, имеет покрывающее. Однако в $\mathcal{SEM}$ есть и подмногообразия, которые не могут быть заданы конечным числом тождеств. Вопрос о том, есть ли покрытие у каждого собственного подмногообразия в $\mathcal{SEM}$, был поставлен в обзоре [55]; положительный ответ вытекает из общего результата А. Н. Трахтмана [43], для формулировки и обсуждения которого удобно следующее определение. Скажем, что решетка обладает *свойством покрываемости*, если в ней каждый элемент, отличный от единицы, имеет покрытие.

Теорема 3.1 (А. Н. Трахтман [43]). *Решетка подмногообразий любого надкоммутативного многообразия полугрупп обладает свойством покрываемости.*

Простое доказательство теоремы 3.1 дано в [134], см. также [138].

Напомним, что решетка называется *сильно атомной*, если любой ее неодноэлементный интервал содержит атом. Из теоремы 3.1 вытекает

Следствие 3.1. *Решетка* **OC** *сильно атомна.*

Естественно возникал вопрос о том, обладает ли свойством покрываемости решетка подмногообразий любого многообразия полугрупп. А. Н. Трахтман [44] дал отрицательный ответ на этот вопрос; соответствующий контрпример – это многообразие $\mathrm{var}\,\{xy^4x = xy^5x\}$. Позднее Поллак [107] доказал, что свойство покрываемости нарушается также в решетке подмногообразий бернсайдова многообразия $\mathcal{B}_{m,n} = \mathrm{var}\,\{x^m = x^{m+n}\}$ при любом $m > 1$. Отметим для полноты, что решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{B}_{1,1}$, т. е. многообразия всех полугрупп идемпотентов, обладает свойством покрываемости (см. рис. 2), а вопрос о том, обладает ли этим свойством решетка $L(\mathcal{B}_{1,n})$ при $n > 1$, пока остается открытым. М. В. Сапир [114] показал, что обсуждаемое свойство может нарушаться даже в решетке подмногообразий конечно порожденного многообразия.

При изучении свойства покрываемости для решеток многообразий полугрупп, оснащенных различными дополнительными операциями, вырисовывается довольно пестрая картина. Оказывается, что это свойство не выполняется ни в решетке всех многообразий моноидов [107], ни в решетке всех многообразий инверсных полугрупп [28]. Покрытия в решетке многообразий эпигрупп изучались в [138], где получены следующие результаты.

Теорема 3.2 (М. В. Волков [138]). *Решетка $L(\mathcal{E})$ обладает свойством покрываемости, а решетки $L(\mathcal{E}_n)$ при $n > 1$ этим свойством не обладают.*

Следующий вопрос был поставлен первым из авторов 30 лет назад и до сих пор остается открытым.

Вопрос 3.1 ([40], задача 2.62б). *Выполнено ли свойство покрываемости в решетке $L(\mathcal{E}_1)$ всех многообразий вполне регулярных полугрупп?*

Отметим, что всякое периодическое многообразие вполне регулярных полугрупп имеет покрытие в $L(\mathcal{E}_1)$. Однако это, как легко понять, не дает положительного ответа на упомянутый выше вопрос о выполнении свойства покрываемости в решетке $L(\mathcal{B}_{1,n})$ при $n > 1$.

3.2. Число покрытий. Поскольку каждое собственное многообразие полугрупп имеет покрытие, возникает естественный вопрос о числе покрытий. Задача описания многообразий полугрупп с конечным [счетным, континуальным] множеством покрытий отмечалась в обзоре [3]. Для надкоммутативных многообразий она была давно решена следующим результатом.

Теорема 3.3 (А. Я. Айзенштат [1]). *Собственное надкоммутативное многообразие полугрупп имеет конечное [счетное] множество покрытий, если оно имеет конечный [бесконечный] базис тождеств.*

В периодическом случае вопрос о числе покрытий оказывается намного более сложным. Поскольку всякое периодическое многообразие содержит только конечное число атомов, может возникнуть предположение, что у каждого периодического многообразия должно быть бесконечно много покрытий. Оказывается, однако (и это одно из интересных проявлений немодулярности решетки **SEM**), что существуют периодические многообразия с конечным числом покрытий. Используя результаты работы [19], можно проверить, что этим свойством обладает произвольное не 0-приведенное нильмногообразие, не содержащееся в многообразии $\mathrm{var}\{x^2y = xyx = yx^2 = 0\}$. В обзоре [3] отмечено, что конечное число покрытий имеет также произвольное многообразие полугрупп, заданное одним тождеством $u = v$ таким, что слова u и v зависят от одних и тех же букв и либо длины этих слов равны, либо v не может быть представлено в виде $a\xi(u)b$, где a и b – (возможно пустые) слова, а ξ – эндоморфизм свободной полугруппы счетного ранга. Некоторые случаи, в которых число покрытий периодического многообразия бесконечно, указаны в [6]. Первый пример многообразия, обладающего континуумом покрытий в **SEM**, указал А. Н. Трахтман [43]. Из недавних результатов П. А. Кожевникова [30, 31] вытекает, что континуум покрытий имеют даже атомы $\mathcal{A}_p$ при достаточно больших простых p (см. теорему 10.2).

3.3. Другие результаты. Как известно, если многообразие $\mathcal{X}$ независимо базируемо внутри некоторого многообразия $\mathcal{V}$, строго содержащего $\mathcal{X}$, то $\mathcal{X}$ имеет покрытие в решетке $L(\mathcal{V})$. А. Н. Трахтманом был поставлен вопрос о том, будет ли любое независимо базируемое многообразие полугрупп $\mathcal{X}$ иметь покрытие в решетке подмногообразий всякого многообразия, строго содержащего $\mathcal{X}$ ([40], задача 2.55а). Отрицательный ответ на него дан В. Ю. Поповым [37].

Пусть $\langle S; \leq\rangle$ – частично упорядоченное множество и $x, y \in S$. Обобщая понятие покрываемости одного элемента другим, скажем, что *расстояние между x и y конечно*, если либо $x = y$, либо существуют элементы $z_0, z_1, \ldots, z_n \in S$ такие, что $z_0 = x$, $z_n = y$ и z_{i+1} покрывает z_i для всякого $i = 0, 1, \ldots, n-1$, либо выполнено условие, двойственное к предыдущему. В противном случае будем говорить, что расстояние между x и y бесконечно. Далее, скажем, что *расстояние между x и y равно ω*, если расстояние между x и y бесконечно и либо $x < y$ и для всякого $z \in S$ такого, что $x \leq z < y$, расстояние между x и z конечно, либо выполнено двойственное условие. Справедлива следующая

Теорема 3.4 (М. В. Волков [133]). *Для любого собственного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ существует многообразие полугрупп $\mathcal{W}$ такое, что $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{W}$ и расстояние между $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ равно ω.*

§ 4. Решетки подмногообразий некоторых многообразий

Имеется немало работ, в которых описывается решетка подмногообразий какого-либо конкретного многообразия полугрупп. Не ставя себе цель перечислить все такие работы, мы отметим здесь некоторые из них, представляющиеся нам примечательными в том или ином отношении.

Как уже упоминалось в § 1, в работах [5, 56, 57] была описана решетка **I** всех многообразий полугрупп идемпотентов (см. рис. 2). Позднее было получено следующее описание решетки всех многообразий полугрупп с идемпотентным квадратом, т. е. решетки подмногообразий многообразия $\mathrm{var}\,\{xy=(xy)^2\}$.

Теорема 4.1 (Герхард [58])**.** *Решетка* $L(\mathrm{var}\,\{xy=(xy)^2\})$ *является подпрямым произведением решетки* $\mathbf{I}$ *и решетки, изображенной на рис.* 3.

В частности, решетка $L(\mathrm{var}\,\{xy=(xy)^2\})$ дистрибутивна.

В более ранней работе И. И. Мельника [34] описана решетка всех многообразий полугрупп, квадрат которых является прямоугольной полугруппой, т. е. удовлетворяет тождеству $xyx=x$. Эта решетка изображена на рис. 4, где через $\mathcal{LZM}$ и $\mathcal{RZM}$ обозначены многообразия $\mathrm{var}\,\{xyz=xy\}$ и $\mathrm{var}\,\{xyz=yz\}$ соответственно. Указанный результат послужил отправной точкой для ряда исследований, авторы которых рассматривают более слабые, чем в [34], ограничения на многообразия. Так, Петрич в [96] описал решетку всех многообразий полугрупп, квадрат которых является ортодоксальной нормальной связкой групп экспоненты, делящей фиксированное число n. Оказалось, что эта решетка является прямым произведением решетки, изображенной на рис. 4, решетки всех многообразий периодических групп экспоненты, делящей n, и 2-элементной цепи. В [75, 89] изучается решетка многообразий полугрупп, куб которых является прямоугольной полугруппой. Полного описания этой решетки не получено, но в [75] описывается некоторая ее обширная подрешетка, а в [89] – решетка подмногообразий многообразия $\mathrm{var}\,\{xyz=xywyz\}$.

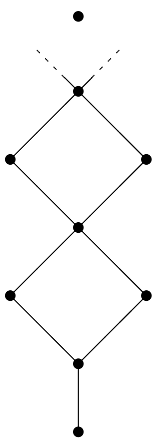

Рис. 3.

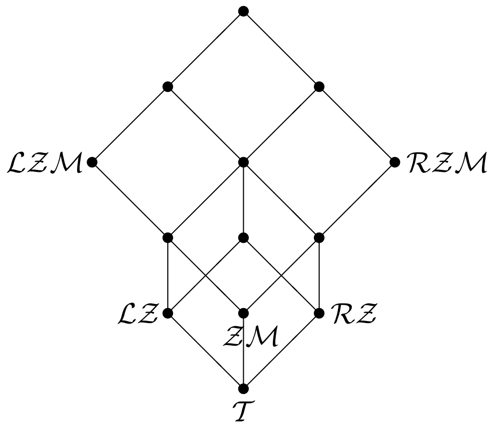

Рис. 4. Решетка многообразий полугрупп, квадрат которых есть прямоугольная полугруппа

В работе Петрича [98] описана решетка подмногообразий многообразия $\mathcal{D}_p^1$, порожденного полугруппой D_p^1, где D_p – рисовская полугруппа матричного типа над циклической группой простого порядка p с сэндвич-матрицей $\left(\begin{smallmatrix} e & e \\ e & a\end{smallmatrix}\right)$, где a – неединичный элемент данной группы, а e – ее единица. Оказалось, что эта решетка дистрибутивна и состоит из 32 элементов; ее диаграмма нарисована в [98].

Интерес к многообразию $\mathcal{D}_p^1$ объясняется следующим. При изучении конечно базируемых многообразий полугрупп важную роль играет нахождение *предельных* (т. е. минимальных не конечно базируемых) многообразий. На сегодняшний день известно лишь несколько явных примеров таких многообразий (см. [108, 114, 132], а также [46, 140]), причем среди них нет ни одного вполне регулярного многообразия. В то же время, вполне регулярные предельные многообразия существуют (это вытекает из существования вполне регулярных не конечно базируемых многообразий и леммы Цорна). Вопрос о том, является ли многообразие $\mathcal{D}_p^1$ конечно базируемым, был поставлен в обзоре [46] (вопрос 8.1) и остается открытым. А из результатов работы [98] вытекает, что все его собственные подмногообразия конечно базируемы. Таким образом, если ответ на указанный вопрос окажется отрицательным, то многообразие $\mathcal{D}_p^1$ станет первым явным примером вполне регулярного предельного многообразия полугрупп.

В работе И. И. Мельника [35] впервые была предпринята попытка нащупать границы между модулярностью и немодулярностью, а также между дистрибутивностью и недистрибутивностью в решетках нильмногообразий. При этом, в частности, была полностью описана решетка многообразий 5-ступенно нильпотентных коммутативных полугрупп. Диаграмма этой решетки нарисована в [35], она содержит 32 элемента.

ГЛАВА II. **Основные подрешетки решетки полугрупповых многообразий**

Как уже отмечалось в § 1, решетка **SEM** разбивается на подрешетки **OC** и **Per**. Решетке **OC** посвящен § 5. Изучение решетки **Per** в целом наталкивается на серьезные трудности, так как некоторые ее составные части имеют совершенно различные свойства. Таковыми являются прежде всего решетки **CR** и **Nil**. Первая из них модулярна, а вторая не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному тождеству. Весьма сложный характер носит и взаимодействие между этими решетками. Так, даже если многообразие $\mathcal{V}$ представимо в виде $\mathcal{K} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{K} \in \mathbf{CR}$, а $\mathcal{N} \in \mathbf{Nil}$, строение решетки $L(\mathcal{V})$, как правило, не определяется устройством решеток $L(\mathcal{K})$ и $L(\mathcal{N})$. Отметим, что те немногочисленные ситуации, в которых $L(\mathcal{K} \vee \mathcal{N}) \cong L(\mathcal{K}) \times L(\mathcal{N})$, полностью классифицированы (см. предложение 13.1).

Тем не менее, определенная информация, относящаяся ко всей решетке **Per**, может быть приведена (см. п. 2.2). Строению решеток **CR** и **Nil** посвящены § 6 и § 7 соответственно. В § 8 и § 9 речь идет еще о двух обширных подрешетках решетки **SEM**. Первая из них состоит из коммутативных многообразий, вторая – из многообразий, содержащихся в периодических многообразиях, порождаемых 0-простыми полугруппами; многообразия второго типа стали называть *многообразиями Риса–Сушкевича.*

§ 5. Надкоммутативные многообразия

5.1. Строение решетки OC. Здесь и в § 7 нам понадобится понятие G-множества. Напомним, что унарная алгебра с носителем A и множеством операций G называется *G-множеством*, если на G задана структура группы и для любых $g, h \in G$ и $a \in A$ выполнены равенства $g\big(h(a)\big) = (gh)(a)$ и $e(a) = a$, где e – единица группы G. Первоначальную информацию о G-множествах и, в частности, об их конгруэнциях можно найти, например, в монографии [88].

В работе [137] показано, что решетка **OC** разлагается в подпрямое произведение некоторых своих интервалов, каждый из которых антиизоморфен решетке конгруэнций некоторого G-множества. Чтобы сформулировать этот результат более точно, нам понадобится ряд обозначений.

Мы будем рассматривать полугрупповые слова над счетным алфавитом $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Для любого n положим $X_n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Для слова u через $\ell(u)$ обозначается его длина, через $\ell_i(u)$ – число вхождений буквы x_i в запись u, а через $c(u)$ – множество всех букв, входящих в запись u. Через $\mathbb{S}_n$ будем обозначать симметрическую группу на множестве $\{1, 2, \dots, n\}$. Если $c(u) = X_n$ и $\pi \in \mathbb{S}_n$, то через $u\pi$ обозначается слово, полученное из u заменой x_i на $x_{i\pi}$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$. Пусть m и n – натуральные числа такие, что $2 \le m \le n$. *Разбиением числа n на m частей* называется последовательность натуральных чисел $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ такая, что $\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \dots \ge \lambda_m$ и $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i = n$. Обозначим через $\Lambda_{n,m}$ множество всех разбиений числа n на m частей, а через Λ – объединение множеств вида $\Lambda_{n,m}$ по всем натуральным числам m и n с условием $2 \le m \le n$. Пусть u – слово такое, что $c(u) = X_m$ и $\ell_i(u) \ge \ell_{i+1}(u)$ для всех $i = 1, 2, \dots, m-1$. Разбиение $\big(\ell_1(u), \ell_2(u), \dots, \ell_m(u)\big)$ числа $\ell(u)$ на m частей обозначим через $\operatorname{part}(u)$.

Зафиксируем натуральные числа m и n с условием $2 \le m \le n$ и разбиение $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) \in \Lambda_{n,m}$. Обозначим через W_λ множество всех слов u, для которых $\ell(u) = n$, $c(u) = X_m$, $\ell_i(u) \ge \ell_{i+1}(u)$ при всех $i = 1, 2, \dots, m-1$ и $\mathrm{part}(u) = \lambda$, а через $\mathbb{S}_\lambda$ – множество всех перестановок $\sigma \in \mathbb{S}_m$ таких, что $\lambda_i = \lambda_{i\sigma}$ для всякого $i = 1, 2, \dots, m$. Ясно, что $\mathbb{S}_\lambda$ – подгруппа в $\mathbb{S}_m$. Для всякой перестановки $\sigma \in \mathbb{S}_\lambda$ определим унарную операцию σ^* на множестве W_λ правилом: $\sigma^*(u) = u\sigma$ для всякого $u \in W_\lambda$. Ясно, что множество W_λ с набором операций $\{\sigma^* \mid \sigma \in \mathbb{S}_\lambda\}$ является $\mathbb{S}_\lambda$-множеством. Обозначим через $\mathcal{S}_n$ многообразие, заданное всеми уравновешенными тождествами длины $\ge n$, а через $\mathcal{S}_{n,m}$ – подмногообразие многообразия $\mathcal{S}_{n+1}$, заданное внутри последнего всеми уравновешенными тождествами длины n, зависящими от $\le m$ букв. Положим также $\mathcal{S}_{n,1} = \mathcal{S}_{n+1}$. Через $\mathcal{S}_\lambda$ обозначим подмногообразие многообразия $\mathcal{S}_{n,m-1}$, заданное внутри последнего всеми уравновешенными тождествами вида $u = v$ такими, что $u \in W_\lambda$. Интервал $[\mathcal{S}_\lambda, \mathcal{S}_{n,m-1}]$ решетки **OC** будем обозначать I_λ.

Теорема 5.1 (М. В. Волков [137]). *Решетка* **OC** *является подпрямым произведением интервалов вида I_λ по всем $\lambda \in \Lambda$, а всякий интервал вида I_λ антиизоморфен решетке конгруэнций $\mathbb{S}_\lambda$-множества W_λ.*

Эта теорема показывает, что для дальнейшего изучения решетки **OC** желательно знать, как устроены решетки конгруэнций G-множеств. Как уже отмечалось в начале параграфа, некоторая информация на эту тему содержится в [88] (см. там лемму 4.20). Более детально строение указанных решеток исследовалось в работе [120]. В ней же охарактеризованы G-множества, конгруэнции которых обладают рядом различных свойств (как решеточных, так и мультипликативных), а в статьях [9, 122] рассматривались специальные элементы нескольких типов в решетках конгруэнций G-множеств.

Из теоремы 5.1 легко вытекает

Следствие 5.1 ([137]). *Решетка* **OC** *финитно аппроксимируема.*

В работе [137] показано также, что для произвольного надкоммутативного многообразия $\mathcal{V}$ интервал $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$ решетки $L(\mathcal{V})$ устроен аналогично решетке **OC**, т. е. разлагается в подпрямое произведение некоторых своих интервалов, каждый из которых антиизоморфен решетке конгруэнций некоторого G-множества.

5.2. Тождества и близкие условия. Упомянутое в конце предыдущего пункта описание интервалов вида $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$ позволило классифицировать надкоммутативные многообразия $\mathcal{V}$, для которых эти интервалы модулярны или дистрибутивны (см. [121]). В действительности в ходе этой классификации был установлен намного более сильный результат. Чтобы его сформулировать, обозначим через M_k решетку, состоящую из нуля, единицы и k атомов, а через $M_{k,n}$ – решетку, изображенную на рис. 5 (здесь $k, n \ge 3$). Скажем, что две решетки *квазиэквационально эквивалентны*, если они удовлетворяют одним и тем же квазитождествам.

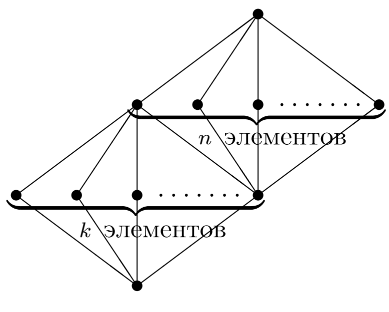

Рис. 5. Решетка $M_{k,n}$

Предложение 5.1. *Пусть $\mathcal{V}$ – надкоммутативное многообразие полугрупп, отличное от $\mathcal{COM}$. Если интервал $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$ модулярен, то он квазиэквационально эквивалентен одной из следующих решеток*: 1) *двухэлементной цепи*; 2) M_3; 3) M_4; 4) $M_{4,3}$.

Поскольку решетка $M_{4,3}$ дезаргова, это предложение означает, в частности, что в решетках надкоммутативных многообразий дезарговость эквивалентна модулярности. В [121] для каждого из четырех указанных в предложении 5.1 случаев получено полное описание подпадающих под него многообразий.

Для интервалов вида $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$ модулярность, полумодулярность вверх и слабая полумодулярность вверх эквивалентны, а полумодулярность вниз и слабая полумодулярность вниз эквивалентны между собой, но не эквивалентны модулярности. Эти результаты, как и классификация многообразий $\mathcal{V}$ с полумодулярным вниз интервалом $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$, также получены в [121].

Поскольку решетка M_3 подпрямо неразложима, среди всех квазимногообразий решеток, не содержащих M_3, существует наибольшее. Обозначим его через $\overline{\mathsf{M}}_3$. Справедлива следующая

Теорема 5.2 (Б. М. Верников [123]). *Для надкоммутативного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны*: (а) $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}] \in \overline{\mathsf{M}}_3$; (б) *интервал* $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$ *полудистрибутивен вверх*; (в) *интервал* $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$ *полудистрибутивен вниз*; (г) *интервал* $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$ *дистрибутивен.*

С учетом упомянутых выше результатов работы [121], эта теорема дает полное описание надкоммутативных многообразий $\mathcal{V}$, для которых интервал $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$ полудистрибутивен (вверх или вниз) или принадлежит любому другому квазимногообразию решеток, не содержащему решетки M_3.

5.3. Специальные элементы. Элемент x решетки L называется *дистрибутивным*, если $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ для всех $y, z \in L$. *Кодистрибутивный* элемент определяется двойственно. Всякий нейтральный элемент дистрибутивен и кодистрибутивен, но обратные импликации в абстрактных решетках места не имеют. Справедлива, однако, следующая

Теорема 5.3 (Б. М. Верников [9]). *Для надкоммутативного многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны*: (а) *$\mathcal{V}$ – дистрибутивный элемент решетки* **OC**; (б) *$\mathcal{V}$ – кодистрибутивный элемент решетки* **OC**; (в) *$\mathcal{V}$ – нейтральный элемент решетки* **OC**; (г) *$\mathcal{V}$ – одно из многообразий $\mathcal{SEM}$, $\mathcal{S}_n$, $\mathcal{S}_{n,m}$ и $\mathcal{S}_\lambda$, где m и n – произвольные натуральные числа такие, что $2 \le m \le n$, а $\lambda \in \Lambda$.*

Представляется интересной следующая

Задача 5.1. *Классифицировать многообразия, являющиеся в решетке* **OC** а) *модулярными элементами*, б) *верхне-модулярными элементами*, в) *нижне-модулярными элементами.*

§ 6. Вполне регулярные многообразия

Решетку $L(\mathcal{E}_1)$ всех многообразий (унарных) вполне регулярных полугрупп мы будем обозначать здесь через **UCR**, что перекликается с обозначением через **CR** решетки всех вполне регулярных многообразий (обычных) полугрупп. В силу замечания, сделанного во втором абзаце п. 2.1, решетка **CR**, будучи подрешеткой в **Per**, может рассматриваться как подрешетка решетки **UCR**. Поэтому все свойства последней, наследуемые подрешетками, сохраняются и для решетки **CR**. Практически вся информация, известная на сегодняшний день о решетке **CR**, является «проекцией» на **SEM** результатов о решетке **UCR**. Поэтому далее в данном параграфе речь будет идти именно о последней решетке.

Решетка **UCR** разбивается в объединение коидеала $[\mathcal{SL})$ и идеала **UCS**, состоящего из всех многообразий вполне простых полугрупп. Многие результаты о решетке **UCR** и некоторых ее подрешетках (в частности, о решетке **UCS**) систематизированы в монографии [102]. Здесь мы остановимся на некоторых принципиальных достижениях, не нашедших отражения в [102]. К таковым относятся, в первую очередь, результаты о строении решетки **UCR**, полученные в серии статей Полака [103–105].

Поскольку многообразие $\mathcal{SL}$ является нейтральным элементом решетки **UCR**, эта решетка есть подпрямое произведение коидеала $[\mathcal{SL})$ и 2-элементной цепи. В упомянутых работах [103–105] изучается именно коидеал $[\mathcal{SL})$. Для изложения соответствующих результатов нам понадобятся несколько обозначений. Через U мы обозначим свободную унарную полугруппу над счетным алфавитом с унарной операцией $^{-1}$. Элементы U называются *унарными словами*. Как и для обычной свободной полугруппы, через $c(u)$ обозначим множество всех букв, входящих в запись унарного слова $u \in U$. Следуя Клиффорду [53], для унарного слова $u \in U$ такого, что $|c(u)| > 1$, обозначим через $0(u)$ [соответственно $1(u)$] унарное слово, полученное из наидлиннейшего начального [конечного] отрезка слова u, содержащего $|c(u)|-1$ букв, отбрасыванием всех открывающихся скобок, для которых в этом отрезке нет парных закрывающихся [соответственно всех выражений вида $)^{-1}$, для которых в этом отрезке нет парных открывающихся скобок]. Например, если $u = x((yx)^{-1}z)^{-1}x$, то $0(u) = x(yx)^{-1}$, а $1(u) = xzx$.

Произвольной вполне инвариантной конгруэнции $\sim$ на U сопоставим отношение $\overline{\sim}$ на U, определяемое рекуррентно следующим образом: $u \mathrel{\overline{\sim}} v$ тогда и только тогда, когда $u \sim v$, $c(u) = c(v)$, а при $|c(u)| > 1$ кроме того $0(u) \mathrel{\overline{\sim}} 0(v)$ и $1(u) \mathrel{\overline{\sim}} 1(v)$. В [103] проверено, что отношение $\overline{\sim}$ также будет вполне инвариантной конгруэнцией. Если $\mathcal{V}$ – многообразие унарных полугрупп, отвечающее вполне инвариантной конгруэнции $\sim$, то многообразие, соответствующее $\overline{\sim}$, обозначим через $\overline{\mathcal{V}}$. Определим отношение ρ на решетке **UCR** следующим правилом: $\mathcal{V}\,\rho\,\mathcal{W}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\mathcal{V}} = \overline{\mathcal{W}}$. В [103] доказывается, что это отношение является полной конгруэнцией на **UCR**.

Пусть L – решетка с нулем. Обозначим через $V \oplus L$ решетку, являющуюся ординальной суммой трехэлементного упорядоченного множества V, изображенного на рис. 6, и решетки L. Далее, обозначим через Λ упорядоченное множество, изображенное на рис. 7. Основной результат Полака ([104], теорема 3.6) утверждает, что коидеал $[\mathcal{SL})$ решетки **UCR** вкладывается в решетку всех изотонных отображений из Λ в решетку $V \oplus \mathbf{UCR}/\rho$; образ коидеала $[\mathcal{SL})$ при этом вложении явно описывается в [104]. Таким образом, изучение решетки **UCR** по существу сводится к изучению решетки $\mathbf{UCR}/\rho$. В частности, из построений Полака вытекает, что $[\mathcal{SL})$ является подпрямым произведением счетного числа копий решетки $V \oplus \mathbf{UCR}/\rho$.

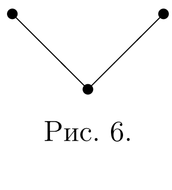

Рис. 6.

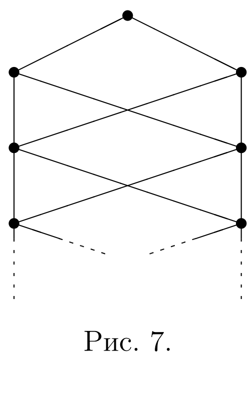

Рис. 7.

Напомним, что вполне регулярная полугруппа называется *ортодоксальной*, если ее идемпотенты образуют подполугруппу. Конструкция из [104] становится особенно прозрачной, если ограничить ее на решетку **UOCR** всех ортодоксальных многообразий вполне регулярных полугрупп. В этом случае решетка $\mathbf{UOCR}/\rho$ оказывается изоморфной решетке всех многообразий групп, и в [104] указано представление **UOCR** в качестве точно описанной подрешетки прямого произведения счетного числа копий решетки многообразий групп. Отметим, что в контексте периодических многообразий (обычных) полугрупп аналогичное представление для решетки всех ортодоксальных многообразий было найдено ранее В. В. Расиным [38].

Упомянутое в § 1 описание решетки **I** всех многообразий полугрупп идемпотентов является в действительности предельным частным случаем результатов статьи [104]. Решетка $\mathbf{I}/\rho$ одноэлементна, и это приводит к реализации **I** как определенной решетки изотонных отображений из Λ в четырехэлементную решетку $V \oplus 1$.

Другим принципиальным достижением в изучении решетки **UCR** является

Теорема 6.1 (Пастейн [91, 92], Петрич и Райли [99])**.** *Решетка* **UCR** *модулярна и, более того, дезаргова.*

В [91] этот факт получен как приложение охарактеризованных выше результатов Полака [103–105]. Доказательства в [92, 99] основаны на изучении взаимосвязей между тождествами в решетках многообразий и мультипликативными свойствами вполне инвариантных конгруэнций свободных полугрупп – тема, которой мы коснемся в п. 11.4.

§ 7. Нильмногообразия

В работах [16, 17] показано, что, как и в надкоммутативном случае, решетки подмногообразий нильмногообразий можно охарактеризовать в терминах решеток конгруэнций G-множеств. Соответствующий результат формулируется сложнее, чем для надкоммутативных многообразий. Мы рассмотрим более подробно некоторый частный (но ключевой) случай, в котором решетки нильмногообразий устроены сравнительно просто. Ситуация в общем случае будет охарактеризована в конце параграфа.

Будем говорить, что многообразие полугрупп *однородно*, если из выполнения в нем тождества $u = v$, где u и v – слова разной длины, вытекает выполнение в нем тождества $u = 0$. Многообразие, все подмногообразия которого однородны, будем называть *наследственно однородным*. Всякое наследственно однородное многообразие является нильмногообразием. Именно решетки подмногообразий наследственно однородных многообразий и будут охарактеризованы ниже.

Нам понадобится ряд обозначений; те из них, которые были введены в п. 5.1, используются ниже без специальных отсылок. Через F обозначим свободную полугруппу над алфавитом $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Пусть $\mathcal{V}$ – многообразие нильполугрупп, а m и n – натуральные числа такие, что $m \le n$. Обозначим через $F_{n,m}(\mathcal{V})$ множество всех слов $u \in F$ таких, что $\ell(u) = n$, $c(u) = X_m$ и $\mathcal{V}$ не удовлетворяет тождеству $u = 0$. Пусть ν – вполне инвариантная конгруэнция на полугруппе F, отвечающая многообразию $\mathcal{V}$. Ограничение ν на $F_{n,m}(\mathcal{V})$ обозначим через $\nu_{n,m}$. Ясно, что $\nu_{n,m}$ – отношение эквивалентности. В каждом $\nu_{n,m}$-классе выберем произвольным образом по одному элементу. Обозначим множество полученных слов через $W_{n,m}(\mathcal{V})$ и положим $W^0_{n,m}(\mathcal{V}) = W_{n,m}(\mathcal{V}) \cup \{0\}$, где 0 – нуль $\mathcal{V}$-свободной полугруппы счетного ранга. Если $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$, а $\sigma \in \mathbb{S}_m$, то $u\sigma \in F_{n,m}(\mathcal{V})$, и потому существует, и притом единственное, слово $(u\sigma)^* \in W_{n,m}(\mathcal{V})$ такое, что в $\mathcal{V}$ выполнено тождество $u\sigma = (u\sigma)^*$. Определим унарную операцию σ^* на множестве $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ правилом: $\sigma^*(0) = 0$ и $\sigma^*(u) = (u\sigma)^*$ для всякого $u \in W_{n,m}(\mathcal{V})$. Как проверено в [16], если многообразие $\mathcal{V}$ наследственно однородно, то множество $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$ с набором операций $\{\sigma^* \mid \sigma \in \mathbb{S}_m\}$ является $\mathbb{S}_m$-множеством. Далее, обозначим через $\mathcal{V}_n$ подмногообразие многообразия $\mathcal{V}$, заданное внутри последнего тождеством $x_1 x_2 \cdots x_n = 0$, а через $\mathcal{V}_{n,m}$ – подмногообразие многообразия $\mathcal{V}_{n+1}$, заданное внутри последнего всеми тождествами вида $u = 0$, где $\ell(u) = n$ и

$|c(u)| = m$. Положим также $\mathcal{V}_{n,0} = \mathcal{V}_{n+1}$. Обозначим через $I_{n,m}(\mathcal{V})$ интервал $[\mathcal{V}_{n,m}, \mathcal{V}_{n,m-1}]$ решетки $L(\mathcal{V})$.

Теорема 7.1 (Б. М. Верников и М. В. Волков [17])**.** *Если $\mathcal{V}$ – наследственно однородное многообразие полугрупп, то решетка $L(\mathcal{V})$ является подпрямым произведением интервалов вида $I_{n,m}(\mathcal{V})$ по всем натуральным числам m и n таким, что $m \le n$, а всякий интервал вида $I_{n,m}(\mathcal{V})$ антиизоморфен решетке конгруэнций $\mathbb{S}_m$-множества $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$.*

Теорема 7.1 сводит изучение решеток подмногообразий наследственно однородных многообразий к рассмотрению решеток конгруэнций G-множеств. Как и в надкоммутативном случае, при использовании этой теоремы для решения других задач существенную помощь оказывают результаты работы [120].

Если же нильмногообразие $\mathcal{V}$ не является наследственно однородным, то, как показано в [17], решетка $L(\mathcal{V})$ вложима в антиизоморфную копию подпрямого произведения решеток конгруэнций некоторых G-множеств (такое вложение указано в [17] в явном виде). Эти G-множества отличаются от G-множеств вида $W^0_{n,m}(\mathcal{V})$, но «похожи» на них: их элементами также являются некоторые слова и нуль, а в роли G также выступает группа $\mathbb{S}_m$.

§ 8. Коммутативные многообразия

Обозначим через **Com** решетку всех коммутативных многообразий полугрупп. Отметим, что все неединичные элементы этой решетки суть периодические многообразия, и они составляют подрешетку решетки **Per**. В работе Киселевича [73] предложена некоторая характеризация решетки **Com**[5]. По соображениям объема мы не можем воспроизвести здесь эту характеризацию во всех деталях и потому ограничимся кратким ее описанием. Всякое коммутативное многообразие кодируется в [73] (см. также [64]) четверкой (J, m, r, π), где J – коидеал в квазиупорядоченном множестве всех конечных последовательностей неотрицательных целых чисел, m – неотрицательное целое число, r – натуральное число, а π – отношение эквивалентности на множестве всех конечных последовательностей натуральных чисел, не входящих в J. При этом J и π должны удовлетворять ряду условий (некоторые из них, как позднее было показано в [60], вытекают из остальных и потому могут быть опущены). Многообразие, соответствующее четверке (J, m, r, π), обозначим через $\mathcal{C}(J, m, r, \pi)$. В [73] указано, при каких условиях выполнено включение $\mathcal{C}(J_1, m_1, r_1, \pi_1) \subseteq \mathcal{C}(J_2, m_2, r_2, \pi_2)$, а также какими четверками указанного вида кодируются объединение и пересечение многообразий $\mathcal{C}(J_1, m_1, r_1, \pi_1)$ и $\mathcal{C}(J_2, m_2, r_2, \pi_2)$.

Еще на ранней стадии изучения решетки полугрупповых многообразий в работе Швабауэра [115] была указана обширная дистрибутивная подрешетка решетки **Com**; она состоит из всех подмногообразий многообразия $\mathcal{COM}$, задаваемых внутри последнего тождествами вида $u = uv$. В работе Нельсон [90] было показано, что эта подрешетка является максимальной модулярной подрешеткой в **Com**. Результаты работы [73] показывают, что подрешетка, найденная Швабауэром, образует некий «скелет» решетки **Com**. Многообразия, из которых она состоит, еще встретятся нам в § 15. Следуя [73], мы будем называть их *швабауэровскими*.

На технике, развитой в [73], основаны результаты работ [60–63, 74]. В [60] изучаются элементы решетки **Com**, неразложимые в объединение и пересечение. В частности, показано, что единственным элементом этой решетки, неразложимым и в объединение, и в пересечение, является многообразие $\mathcal{COM}$. В [61] продолжается начатое ранее в работе [49] рассмотрение порядковых свойств решетки **Com**, связанных с понятием частично вполне упорядоченного множества и некоторыми его модификациями. В [63] изучается отношение покрытия в решетке **Com** и показано, как связаны между собой четверки (J_1, m_1, r_1, π_1) и

[5] В этой работе, как и в связанных с ней работах [60–64, 74], рассматривается не решетка **Com**, а двойственная к ней решетка эквациональных теорий коммутативных полугрупп. Излагая ниже результаты этих работ, мы будем переводить их с языка эквациональных теорий на язык многообразий.

(J_2, m_2, r_2, π_2) в том случае, когда одно из многообразий $\mathcal{C}(J_1, m_1, r_1, \pi_1)$ и $\mathcal{C}(J_2, m_2, r_2, \pi_2)$ покрывает другое. О содержании работ [62, 74] будет сказано в § 15.

§ 9. Многообразия Риса–Сушкевича

Определение многообразий Риса–Сушкевича приведено во вступлении к данной главе. Обозначим через $\mathcal{RS}_n$ многообразие, порожденное всевозможными вполне 0-простыми полугруппами, в которых выполнено тождество $x^2 = x^{n+2}$; очевидно, что $\mathcal{RS}_n \subseteq \mathcal{E}_2$. Всякое многообразие Риса–Сушкевича содержится в $\mathcal{RS}_n$ для некоторого n. Обозначим решетку $L(\mathcal{RS}_n)$ через $\mathbf{RS}_n$. В последнее время достигнут определенный прогресс в изучении решеток вида $\mathbf{RS}_n$, см. [79–82, 84–87, 111–113, 142]. Общий подход к изучению этих решеток основан на рассмотрении их полных конгруэнций в духе методологии, обсуждавшейся в п. 2.2. Одна из таких конгруэнций, рассмотрение которой оказалось наиболее эффективным, определяется следующим образом: $\mathcal{V}\,\theta\,\mathcal{W}$ тогда и только тогда, когда многообразия $\mathcal{V}$ и $\mathcal{W}$ содержат одни и те же вполне простые полугруппы и одни и те же вполне 0-простые полугруппы с делителями нуля. В [87] конгруэнция θ рассматривается на решетке $\mathbf{RS}_1$ всех комбинаторных многообразий Риса–Сушкевича. Доказывается, что θ разбивает $\mathbf{RS}_1$ на 9 интервалов, и описываются экстремальные элементы этих интервалов; 31-элементная дистрибутивная подрешетка, которую эти экстремальные элементы порождают, служит «скелетом» решетки $\mathbf{RS}_1$. Некоторые из θ-классов описаны, см. [81]. Наиболее сложно устроенным оказывается наименьший θ-класс, строение которого прояснено в [82]. На основе этих результатов Ли доказал, что решетка $\mathbf{RS}_1$ счетна [85].

ГЛАВА III. Многообразия с некоторыми типами решетки подмногообразий

Изучению многообразий полугрупп с различными типами решетки их подмногообразий посвящено значительное число работ. Наибольшее внимание при этом уделялось двум типам ограничений на решетку подмногообразий – условиям конечности (т. е. условиям, выполненным в любой конечной решетке) и тождествам (а также близким к ним условиям). При рассмотрении условий второго типа естественно возникает интерес к многообразиям, решетки подмногообразий которых содержат «большие» подрешетки, заведомо не удовлетворяющие никаким нетривиальным тождествам. Условиям трех указанных типов посвящены первые три параграфа данной главы. В последнем параграфе рассматриваются еще три типа ограничений на решетку подмногообразий: условия симметричности (т. е. условия, связанные с понятием дуализма решеток), дополняемость и близкие условия, разложимость в прямое произведение.

§ 10. Условия конечности

10.1. Малые многообразия. Среди условий конечности естественно прежде всего рассмотреть самое сильное из них – свойство «быть конечной решеткой». Многообразия с конечной решеткой подмногообразий принято называть *малыми*. Задача классификации малых многообразий отмечалась еще в обзоре [55] и привлекла к себе внимание многих авторов. Тем не менее, представляется, что она еще весьма далека от окончательного решения.

Простое, но важное необходимое условие конечности решетки подмногообразий доставляет следующее

Предложение 10.1 (А. Я. Айзенштат [48]). *Всякое малое многообразие полугрупп является многообразием конечной ступени.*

В общем случае обращение предложения 10.1 неверно – простейшим контрпримером может служить многообразие всех полугрупп идемпотентов, ступень которого равна 1, а решетка подмногообразий бесконечна, см. рис. 2. Однако, справедлива следующая

Теорема 10.1 (С. А. Малышев [32]). *Перестановочное многообразие полугрупп является малым тогда и только тогда, когда оно есть многообразие конечной ступени.*

Опираясь на развитую ими структурную теорию многообразий конечной ступени, М. В. Сапир и Е. В. Суханов [39] показали, что классификация малых многообразий сводится к решению следующих трех подзадач: 1) описать малые вполне регулярные многообразия; 2) выяснить, при каких условиях эндоморфизмы Копаму (см. § 1) сохраняют свойство «быть малым многообразием»; 3) установить, при каких условиях будет малым многообразие, полугруппы которого суть идеальные расширения полугрупп из некоторого малого многообразия при помощи полугрупп из некоторого нильпотентного многообразия.

Заметим, что подзадача 1) совпадает с соответствующей задачей для многообразий вполне регулярных полугрупп, сформулированной первым из авторов обзора в [40] (задача 2.59в). Отметим также, что эта подзадача содержит в качестве частного случая задачу классификации малых многообразий периодических групп. Последняя представляется чрезвычайно трудной в силу следующего результата.

Теорема 10.2 (П. А. Кожевников [30, 31]). *Имеется континуум периодических многообразий групп с трехэлементной решеткой подмногообразий.*

Тот же результат ранее анонсировал С. В. Иванов, однако его анонс не был впоследствии подтвержден полным доказательством. Отметим еще, что примеры, построенные в [30, 31] при доказательстве теоремы 10.2, показывают, что малое многообразие не обязано быть локально конечным.

Ввиду теоремы 10.2, максимум того, на что можно надеяться в подзадаче 1), – это классификация малых вполне регулярных многообразий по модулю групп. Однако и здесь возникают существенные трудности. Например, недавно Кадоурек [70] указал многообразие вполне простых полугрупп с континуальной решеткой подмногообразий, в котором содержится всего 5 групповых подмногообразий. Это означает, что редукция подзадачи 1) к случаю групповых многообразий возможна только при некоторых дополнительных условиях. Одно такое условие фигурирует в следующей теореме.

Теорема 10.3 (В. В. Расин [38]). *Ортодоксальное многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ является малым тогда (и, очевидно, только тогда), когда его наибольшее групповое подмногообразие является малым и* $\mathrm{var}\,\{x^2 = x\} \nsubseteq \mathcal{V}$.

Подзадача 2) также представляется весьма нетривиальной, поскольку известно, что эндоморфизмы Копаму, вообще говоря, не сохраняют свойство «быть малым многообразием» даже для вполне регулярных многообразий. Соответствующий пример легко извлекается из конструкции, предложенной М. В. Сапиром в [114]. Отметим, что та же конструкция доставляет примеры, демонстрирующие крайнюю «неустойчивость» класса малых многообразий: объединение двух малых многообразий и покрытие малого многообразия могут не быть малыми многообразиями.

Что касается подзадачи 3), то здесь пока заметных продвижений нет; в частности, остается открытым следующий

Вопрос 10.1. *Будет ли малым многообразие, полугруппы которого суть всевозможные идеальные расширения полугрупп из некоторого малого вполне регулярного многообразия $\mathcal{V}$ при помощи полугрупп из некоторого нильпотентного многообразия $\mathcal{N}$?*

Можно проверить, что если $\mathcal{V}$ состоит из групп или $\mathcal{V}$ есть ортодоксальное многообразие, а $\mathcal{N} = \mathcal{ZM}$, то ответ положителен.

10.2. Условия максимальности и минимальности. Будем для краткости говорить, что многообразие $\mathcal{V}$ *удовлетворяет условию максимальности* [*минимальности*], если этому условию удовлетворяет решетка $L(\mathcal{V})$.

Прежде всего отметим, что указанные два условия независимы даже для конечно порожденных многообразий. Пример конечно порожденного многообразия с условием минимальности, не удовлетворяющего условию максимальности, был приведен еще в обзоре [55]: это многообразие $\mathrm{var}\,\{x^2 = x^3,\ xy = yx\}$ (оно порождается трехэлементной полугруппой C^1, где C – двухэлементная полугруппа с нулевым умножением). Значительно более тонкий пример конечно порожденного многообразия с условием максимальности, не удовлетворяющего условию минимальности, построен М. В. Сапиром [114]. Последний пример демонстрирует также незамкнутость класса многообразий с условием минимальности относительно взятия объединений и перехода к покрытиям. Для условия максимальности соответствующие вопросы пока открыты.

Вопрос 10.2. а) *Будет ли объединение двух многообразий с условием максимальности удовлетворять условию максимальности*? б) *Будет ли покрытие многообразия с условием максимальности удовлетворять условию максимальности*?

Можно показать, что ответ на обе части вопроса 10.2 положителен для ряда важных типов многообразий полугрупп, например, для вполне регулярных многообразий, нильмногообразий, перестановочных многообразий. Отметим еще, что положительный ответ на первую часть вопроса 10.2 влечет положительный ответ на его вторую часть.

В течение 30 лет остается открытым следующий вопрос, поставленный в обзоре [3].

Вопрос 10.3. *Существует ли многообразие полугрупп, решетка подмногообразий которого бесконечна, но удовлетворяет и условию максимальности, и условию минимальности*?

Легко видеть, что многообразие $\mathcal{V}$ удовлетворяет условию минимальности тогда и только тогда, когда каждое подмногообразие в $\mathcal{V}$ задается внутри $\mathcal{V}$ конечным числом тождеств. В частности, условию минимальности удовлетворяет любое *наследственно конечно базируемое* многообразие, т. е. многообразие, все подмногообразия которого конечно базируемы, и любое предельное многообразие.

Наследственно конечно базируемые и предельные многообразия полугрупп активно изучались в рамках исследований по проблеме конечного базиса; мы отсылаем читателя к главе III обзора [46], а также к недавним обзорам [139, 140] за детальной информацией о соответствующих результатах.

10.3. Конечность d-ширины. Говорят, что решетка L имеет *конечную d-ширину* [*d-ширину n*], если все антицепи в этой решетке конечны [и содержат $\leq n$ элементов, причем n – наименьшее число с этим свойством]. Скажем, что $\mathcal{V}$ – многообразие *конечной d-ширины*, если конечна d-ширина решетки $L(\mathcal{V})$. Из результатов М. В. Сапира и Е. В. Суханова [39] легко вывести, что всякое полугрупповое многообразие конечной d-ширины либо является периодическим и перестановочным, либо есть многообразие конечной ступени. М. В. Сапир заметил, что любое периодическое перестановочное многообразие имеет конечную d-ширину (неопубликовано). Таким образом, задача классификации многообразий конечной d-ширины сводится к случаю многоообразий конечной ступени. Заметим, что среди последних встречаются многообразия бесконечной d-ширины и, более того, многообразия, решетка подмногообразий которых содержит континуальные антицепи. Так, в силу теоремы 10.2 континуальные антицепи существуют в решетке многообразий групп достаточно большой простой экспоненты, а из результатов Кадоурека [69] следует, что такие антицепи имеются и в решетке комбинаторных многообразий ступени 2.

§ 11. Тождества и близкие условия

11.1. Модулярность. Задача описания многообразий полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий была отмечена еще в обзоре [55]. Она была решена третьим из авторов данной статьи в начале 1990-х годов. Полная и точная формулировка этого результата, впервые появившаяся в диссертации [22], приведена в [10]. Воспроизвести здесь эту формулировку не представляется возможным по соображениям объема (она включает в себя, в частности, список из 146 максимальных нильмногообразий с модулярной решеткой подмногообразий). Поэтому мы сформулируем в явном виде лишь следующее необходимое условие модулярности решетки подмногообразий.

Теорема 11.1 (М. В. Волков [19]). *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ имеет модулярную решетку подмногообразий, то выполнено одно из следующих условий*: (1) $\mathcal{V}$ – *многообразие ступени* ≤ 2; (2) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{A}_n \vee \mathcal{C} \vee \mathcal{N}$ *для некоторого* n, *где* $\mathcal{C} = \mathrm{var}\,\{x^2 = x^3,\, xy = yx\}$, *а в многообразии* $\mathcal{N}$ *выполнены тождества* $x^2y = xyx = yx^2 = 0$ *и некоторое перестановочное тождество длины* 4; (3) $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{SL} \vee \mathcal{N}$, *где* $\mathcal{N}$ *есть нильмногообразие, в котором выполнено некоторое перестановочное тождество длины* 4.

Дальнейший анализ многообразий с модулярной решеткой подмногообразий сводится, таким образом, к рассмотрению трех случаев, указанных в теореме 11.1. Как известно [24], многообразие полугрупп имеет ступень ≤ 2 тогда и только тогда, когда в нем выполнено одно из тождеств $xy = (xy)^{n+1}$, $xy = x^{n+1}y$ и $xy = xy^{n+1}$ для некоторого натурального n. Выполнение в многообразии $\mathcal{V}$ первого из этих тождеств означает, что квадрат любой полугруппы из $\mathcal{V}$ является вполне регулярной полугруппой. Поэтому такие многообразия называются *многообразиями полугрупп с вполне регулярным квадратом.* Всякое многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом имеет модулярную решетку подмногообразий (М. В. Волков и Т. А. Ершова [143]). Многообразия с модулярной решеткой подмногообразий, в которых выполнено одно из тождеств $xy = x^{n+1}y$ и $xy = xy^{n+1}$, описаны в [21], а многообразия с тем же свойством, удовлетворяющие условию (2) теоремы 11.1, – в [20]. Рассмотрение случая (3) сводится к изучению нильмногообразий с модулярной решеткой подмногообразий. Первоначальная версия доказательства результата, дающего полное описание таких многообразий, приведена только в диссертации [22]. В цикле работ [10, 18, 23] опубликована существенно упрощенная версия доказательства как часть доказательства более общих результатов, о которых будет сказано в пп. 11.3 и 11.5.

Как видно из теоремы 11.1, фигурирующие в ней многообразия являются периодическими. Представляется возможным распространить обсуждаемый результат на случай многообразий эпигрупп. Соответствующая задача уже отмечалась первым из авторов в [45], а также в [116] (задача 3.21).

Задача 11.1. *Описать многообразия эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий.*

Известно (см. [116], следствие 3.19), что всякое многообразие эпигрупп с модулярной решеткой подмногообразий состоит из полурешеток архимедовых полугрупп.

11.2. Дистрибутивность. Следующая задача была поставлена первым из авторов 30 лет назад и до сих пор в полном объеме не решена.

Задача 11.2 ([40], задача 2.60а). *Описать многообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий.*

Наибольшие продвижения в этом направлении получены в работах [19–21, 136]. В [19] показано, что для многообразий с дистрибутивной решеткой подмногообразий справедливо утверждение, аналогичное теореме 11.1, в [20] описаны многообразия с дистрибутивной решеткой подмногообразий, удовлетворяющие условию (2) теоремы 11.1, а в [21] получен аналогичный результат для многообразий, в которых выполнено одно из тождеств $xy = x^{n+1}y$

и $xy = xy^{n+1}$ (в этом случае описание дано «по модулю групп»). Наконец, в [136] полностью описаны нильмногообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий; более простое и компактное доказательство последнего результата содержится в [130]. Таким образом, для завершения описания многообразий с дистрибутивной решеткой подмногообразий остается описать обладающие этим свойством многообразия полугрупп с вполне регулярным квадратом. Эта задача включает в себя в качестве частного случая следующую задачу, поставленную первым из авторов одновременно с задачей 11.2.

Задача 11.3 ([40], задача 2.60б). *Описать многообразия вполне регулярных полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий.*

В данном случае естественно говорить об описании «по модулю групп». На сегодняшний день наибольшим продвижением в этом направлении остается результат В. В. Расина [38], согласно которому ортодоксальное многообразие имеет дистрибутивную решетку подмногообразий тогда и только тогда, когда дистрибутивна решетка подмногообразий его наибольшего группового подмногообразия. Третьим из авторов совместно с Т. А. Ершовой показано, что аналогичный результат справедлив для всякого многообразия полугрупп с вполне регулярным квадратом, в каждой полугруппе которого множество всех идемпотентов образует подполугруппу (неопубликовано). Это усиливает не только упомянутый результат В. В. Расина, но и доказанное Герхардом [58] утверждение о дистрибутивности решетки подмногообразий многообразия всех полугрупп с идемпотентным квадратом (см. теорему 4.1).

Что касается описания многообразий периодических групп с дистрибутивной решеткой подмногообразий, то по этой привлекавшей когда-то значительное внимание задаче нет существенных продвижений с середины 1970-х годов. Более того, упомянутый выше факт существования континуального множества групповых многообразий с трехэлементной решеткой подмногообразий (см. теорему 10.2) вселяет здесь определенный пессимизм. По-видимому, какой-либо прогресс в классификации многообразий периодических групп с дистрибутивной решеткой подмногообразий может быть достигнут только при появлении кардинально новых идей.

В завершение данного пункта упомянем о работе [135], в которой полностью описаны коммутативные многообразия полугрупп с дистрибутивной решеткой подмногообразий.

11.3. Дезарговость и полумодулярность. В силу теоремы 6.1 решетка **CR** дезаргова. Этот результат был усилен в [143], где была доказана дезарговость решетки подмногообразий произвольного многообразия полугрупп с вполне регулярным квадратом. Оба эти факта перекрываются следующим утверждением.

Теорема 11.2 (Б. М. Верников и М. В. Волков [10, 18, 23]). *Для многообразия полугрупп* $\mathcal{V}$ *следующие условия эквивалентны*: (а) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *дезаргова*; (б) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *модулярна*; (в) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *полумодулярна вверх*; (г) *решетка* $L(\mathcal{V})$ *слабо полумодулярна вверх.*

С учетом результатов, о которых шла речь в п. 11.1, эта теорема дает полное описание многообразий полугрупп с дезарговой или [слабо] полумодулярной вверх решеткой подмногообразий.

Многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых [слабо] полумодулярна вниз, также полностью описаны в [10, 18, 23]. Условия полумодулярности вниз и слабой полумодулярности вниз в решетках многообразий полугрупп оказались эквивалентными между собой, но не эквивалентными модулярности. Зазор между соответствующими классами многообразий весьма невелик: как показано в [10,18,23], существует континуум минимальных многообразий полугрупп с немодулярной решеткой подмногообразий, из которых ровно одно имеет полумодулярную вниз решетку подмногообразий.

Отметим, что результаты данного пункта во многом аналогичны результатам пункта 5.2. Но эта аналогия неполна. Так, в [18] установлено, что существует нетривиальное решеточное тождество, выполненное во всех слабо полумодулярных вниз решетках подмногообразий полугрупповых многообразий, а из результатов работы [121] можно извлечь пример надкоммутативного многообразия $\mathcal{V}$ такого, что интервал $[\mathcal{COM}, \mathcal{V}]$ полумодулярен вниз, но не удовлетворяет никакому нетривиальному решеточному квазитождеству.

11.4. Связь с мультипликативными свойствами вполне инвариантных конгруэнций. Под мультипликативными свойствами конгруэнций мы понимаем те свойства, которые формулируются в терминах произведения конгруэнций как бинарных отношений. Поскольку многообразиям отвечают вполне инвариантные конгруэнции на свободных алгебрах, целесообразно при изучении многообразий сосредоточить внимание именно на таких конгруэнциях. Простейшим и «наиболее популярным» мультипликативным свойством является перестановочность. Назовем многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ [*почти*] *fi-перестановочным*, если на всякой полугруппе, свободной в $\mathcal{V}$, любые две вполне инвариантные конгруэнции [содержащиеся в наименьшей полурешеточной конгруэнции] перестановочны.

Поскольку многообразие $\mathcal{SL}$ есть атом и нейтральный элемент в $\mathbf{SEM}$, из хорошо известных свойств решеток эквивалентностей вытекает, что всякое почти fi-перестановочное многообразие полугрупп имеет модулярную и, более того, дезаргову решетку подмногообразий. На этом факте основан один из подходов к изучению полугрупповых многообразий с модулярной решеткой подмногообразий, ярким подтверждением плодотворности которого стали работы [92, 99]. В них было показано, что всякое многообразие вполне регулярных полугрупп почти fi-перестановочно и потому решетка всех таких многообразий дезаргова.

Полное описание fi-перестановочных и почти fi-перестановочных многообразий получено в работах [129] и [130] соответственно. Из этих результатов вытекает, что существуют весьма неожиданные взаимосвязи между обсуждаемыми условиями и тождествами в решетках многообразий. Типичный пример таких взаимосвязей доставляет следующее

Предложение 11.1. *Если многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ [почти] fi-перестановочно и не является вполне простым [вполне регулярным], то решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна.*

В части, касающейся fi-перестановочных многообразий, этот результат получен в [129], а в части, касающейся почти fi-перестановочных многообразий, – в [130]. Результаты такого рода, связанные с другими мультипликативными ограничениями на вполне инвариантные конгруэнции, получены в [11, 12, 124].

11.5. Квазитождества. В работе [13] описаны комбинаторные многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых принадлежит фиксированному квазимногообразию модулярных решеток. При этом установлен следующий факт (обозначения фигурирующих в нем решеток введены в п. 5.2).

Предложение 11.2 (Б. М. Верников [13])**.** *Пусть $\mathcal{V}$ – нетривиальное комбинаторное многообразие полугрупп. Если решетка $L(\mathcal{V})$ модулярна, то она квазиэквационально эквивалентна одной из следующих решеток*: 1) *двухэлементной цепи*; 2) M_3; 3) M_4; 4) $M_{3,3}$; 5) $M_4 \times M_{3,3}$; 6) $M_{4,3}$.

В случае 1) решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна; описание комбинаторных многообразий с дистрибутивной решеткой подмногообразий непосредственно вытекает из результатов работ [18, 136]. Описание комбинаторных многообразий, подпадающих под каждый из случаев 2)–5) предложения 11.2, получено в [13]. Наконец, описание комбинаторных многообразий, решетка подмногообразий которых квазиэквационально эквивалентна решетке $M_{4,3}$, получено в цикле работ [10, 18, 23].

Из модулярности решетки $\mathbf{CR}$ непосредственно вытекает, что для решеток подмногообразий вполне регулярных многообразий полудистрибутивность (как вверх, так и вниз) эквивалентна дистрибутивности. Ни из каких априорных соображений не следует, что эта эквивалентность должна иметь место и в решетках нильмногообразий. Справедлив, однако, следующий аналог теоремы 5.2.

Теорема 11.3 (Б. М. Верников [123])**.** *Для нильмногообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны*: (а) $L(\mathcal{V}) \in \overline{\mathsf{M}}_3$; (б) *решетка $L(\mathcal{V})$ полудистрибутивна вверх*; (в) *решетка $L(\mathcal{V})$ полудистрибутивна вниз*; (г) *решетка $L(\mathcal{V})$ дистрибутивна.*

С учетом упоминавшихся в п. 11.2 результатов работы [136], эта теорема дает полное описание нильмногообразий полугрупп, решетка подмногообразий которых полудистрибутивна (вверх или вниз) или принадлежит любому другому квазимногообразию решеток, не содержащему решетки M_3. Отметим, что для произвольных (и даже для комбинаторных) многообразий полугрупп ни одно из условий (а)–(в) теоремы 11.3 уже не эквивалентно условию (г).

11.6. Условия «узости». Предельным усилением условия дистрибутивности является свойство «быть цепью». Многообразие, решетка подмногообразий которого есть цепь, называют *цепным.* В [41] приведена классификация негрупповых цепных многообразий полугрупп, а из результата работы [4] легко вытекает описание локально конечных цепных многообразий групп. За пределами локально конечного случая задача описания цепных многообразий групп представляется, в силу теоремы 10.2, чрезвычайно сложной. Цепи – это решетки d-ширины 1. В [42] описаны ненильпотентные и негрупповые многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых имеет d-ширину 2, а в [8] – нильпотентные многообразия, решетка подмногообразий которых имеет ровно одну пару несравнимых элементов («крайний» частный случай решетки d-ширины 2).

§ 12. Решеточная универсальность

Назовем многообразие $\mathcal{V}$ *решеточно универсальным*, если решетка $L(\mathcal{V})$ содержит интервал, антиизоморфный решетке разбиений счетного множества. Заметим, что в этом случае в $L(\mathcal{V})$ вложима решетка $L(\mathcal{W})$ для любого многообразия алгебр $\mathcal{W}$ не более чем счетного типа, что и объясняет используемый термин. Первый пример решеточно универсального многообразия полугрупп был приведен Баррисом и Нельсон [51]: это многообразие $\mathrm{var}\,\{x^2 = x^3\}$. Позднее Ежек [66] показал, что и меньшее многообразие $\mathrm{var}\,\{x^2 = 0\}$ является решеточно универсальным. Третий из авторов и М. В. Сапир описали решеточно универсальные многообразия в весьма широком классе многообразий. В формулировке этого (неопубликованного) результата участвуют слова Зимина [26], определяемые рекуррентно: $Z_1 = x_1$, $Z_{n+1} = Z_n x_{n+1} Z_n$.

Теорема 12.1 (М. В. Волков и М. В. Сапир)**.** *Пусть многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ задается тождествами от не более чем n переменных и все периодические группы в $\mathcal{V}$ локально конечны. Тогда $\mathcal{V}$ решеточно универсально в том и только том случае, когда оно не удовлетворяет никакому нетривиальному тождеству вида $Z_{n+1} = w$.*

Ослабляя условие решеточной универсальности, скажем, что многообразие $\mathcal{V}$ *конечно универсально*, если в решетку $L(\mathcal{V})$ вложима решетка, антиизоморфная решетке разбиений любого конечного множества (а значит, в силу известного результата Пудлака и Тумы [109], – любая конечная решетка). Известно [52], что конечно универсальным является многообразие $\mathcal{COM}$; более того, И. О. Коряков [78] показал, что антиизоморфная копия решетки разбиений любого конечного множества вложима уже в решетку всех нильпотентных коммутативных многообразий. Легко видеть, что многообразие $\mathcal{COM}$ минимально по отношению к свойству «быть конечно универсальным». Другим известным примером минимального конечно универсального многообразия служит многообразие $\mathcal{H} = \mathrm{var}\,\{x^2 = xyx = 0\}$, см. [16]. Из результатов работы [39], вытекает, что всякое многообразие полугрупп, не содержащее $\mathcal{COM}$ и $\mathcal{H}$, либо является периодическим и перестановочным, либо есть многообразие конечной ступени. Отсюда и из результатов о многообразиях конечной d-ширины, обсуждавшихся в п. 10.3, следует, что конечно универсальные многообразия, не содержащие $\mathcal{COM}$ и $\mathcal{H}$, обязаны быть многообразиями конечной ступени. Однако пока остается открытым

Вопрос 12.1. *Существует ли конечно универсальное многообразие полугрупп конечной ступени?*

Ввиду той важной роли, которую играет в рассматриваемой проблематике многообразие $\mathcal{H}$, представляет интерес вопрос об устройстве решетки $L(\mathcal{H})$. Всякое многообразие, строго содержащееся в $\mathcal{H}$, задается внутри него некоторым набором перестановочных тождеств (который, в силу результатов работы Поллака [106], можно считать конечным) и/или тождеством нильпотентности некоторой ступени. Это описание множества всех подмногообразий многообразия $\mathcal{H}$ (без указания решеточного порядка на нем) содержится, например, в работе [82]. Более интересен тот факт, что решетка $L(\mathcal{H})$, локально устроенная весьма сложно, допускает достаточно простое глобальное описание в терминах решеток подгрупп симметрических групп. Чтобы сформулировать это описание, обозначим через L_n решетку, полученную присоединением нового наибольшего элемента к решетке подгрупп группы $\mathbb{S}_n$. Из теоремы 7.1 легко выводится, что решетка $L(\mathcal{H})$ антиизоморфна подпрямому произведению решеток L_n по всем натуральным n; используя результаты работы [106], можно явно описать образ $L(\mathcal{H})$ при антиизоморфном вложении в $\prod\limits_{n\in\mathbb{N}} L_n$.

Существуют конечные полугруппы, порождающие конечно универсальные многообразия. Такова, например, 5-элементная полугруппа Брандта (порождаемое ею многообразие содержит $\mathcal{H}$). Возникает вопрос, каково минимальное число n с тем свойством, что существует n-элементная полугруппа, порождающая конечно универсальное многообразие. Ответ на него дан в работе Ли [83], где показано, что $n = 4$, и перечислены все 4-элементные полугруппы, порождающие конечно универсальные многообразия. Оказалось, что, с точностью до изоморфизма и антиизоморфизма, существуют всего четыре такие полугруппы. Подмногообразия многообразий, порождаемых этими четырьмя полугруппами, классифицированы в [81, 82, 144].

§ 13. Другие ограничения

13.1. Условия симметричности. Многообразие полугрупп $\mathcal{V}$ называется *самодуальным*, если решетка его подмногообразий двойственнна самой себе, и *допускающим дуализм*, если существует многообразие полугрупп $\mathcal{V}^*$ такое, что решетки $L(\mathcal{V})$ и $L(\mathcal{V}^*)$ двойственны. Многообразие, все подмногообразия которого самодуальны [допускают дуализм] называется *наследственно самодуальным* [*наследственно допускающим дуализм*]. В работе [119] описаны наследственно самодуальные многообразия полугрупп, доказано, что всякое многообразие полугрупп, допускающее дуализм, является периодическим и получена существенная информация о многообразиях полугрупп, наследственно допускающих дуализм. В частности, там показано, что решетка подмногообразий всякого такого многообразия полумодулярна вниз. Из этого утверждения и теоремы 11.2 легко выводится следующий существенно более сильный факт: решетка подмногообразий произвольного многообразия полугрупп, наследственно допускающего дуализм, дистрибутивна.

13.2. Дополняемость и близкие условия. Напомним, что решетка L с 0 и 1 называется *решеткой с верхними полудополнениями*, если для всякого $x \in L \setminus \{0\}$ найдется $y \in L \setminus \{1\}$ такой, что $x \vee y = 1$.

Теорема 13.1. *Для многообразия полугрупп* $\mathcal{V}$ *следующие условия эквивалентны*: (а) $L(\mathcal{V})$ – *решетка с верхними полудополнениями*; (б) $L(\mathcal{V})$ – *решетка с дополнениями*;

(в) $L(\mathcal{V})$ – *конечная булева алгебра*; (г) $\mathcal{V}$ – *объединение конечного числа атомов решетки* **SEM**.

Эквивалентность условий (б)–(г) доказана в [14], а условия (а) и (б) эквивалентны для произвольных многообразий универсальных алгебр [54]. Поскольку описание атомов решетки **SEM** известно (см. § 1), теорема 13.1 дает полное описание полугрупповых многообразий, решетка подмногообразий которых полудополняема вверх, дополняема или удовлетворяет любому из стандартных усилений дополняемости (таких, как относительная дополняемость, единственность дополнений и т. п.).

Из результатов работ [14, 54] вытекает, что аналог теоремы 13.1 справедлив для многообразий вполне регулярных и инверсных полугрупп.

Двойственное к полудополняемости вверх условие полудополняемости вниз с точки зрения решеток многообразий интереса не представляет: простейшие теоретико-решеточные соображения показывают, что полная атомная решетка полудополняема вниз тогда и только тогда, когда ее единица является объединением всех ее атомов.

13.3. Разложимость в прямое произведение. Многообразия полугрупп, решетка подмногообразий которых разложима в прямое произведение, изучались в работе [7]. В ней найдено необходимое условие, которому должны удовлетворять все такие многообразия, описаны многообразия с указанным свойством в нескольких классах многообразий полугрупп и доказано следующее

Предложение 13.1 (Б. М. Верников [7]). *Если $\mathcal{K}$ – вполне регулярное многообразие полугрупп, а $\mathcal{N}$ – нильмногообразие, то $L(\mathcal{K}\vee\mathcal{N})\cong L(\mathcal{K})\times L(\mathcal{N})$ тогда и только тогда, когда либо $\mathcal{K}\subseteq\mathcal{SL}$, либо $\mathcal{N}\subseteq\mathcal{ZM}$, либо многообразие $\mathcal{K}$ коммутативно, а $\mathcal{N}\subseteq\mathrm{var}\{x^2y=xyx=yx^2=0\}$.*

Этот результат, к сожалению, недостаточно известен, что подчас приводит к появлению ошибочных утверждений в некоторых публикациях. Например, в [77] утверждается, что при любых n и k решетка всех многообразий, состоящих из идеальных расширений прямоугольных связок групп из $\mathcal{A}_k$ при помощи n-ступенно нильпотентных полугрупп, есть прямое произведение решетки $L(\mathcal{A}_k)$ и решетки всех многообразий, состоящих из идеальных расширений прямоугольных полугрупп при помощи n-ступенно нильпотентных полугрупп. В действительности, как показывает предложение 13.1, при $k>1$ и $n>3$ это неверно.

ГЛАВА IV. Особые элементы решетки полугрупповых многообразий

§ 14. Модулярные и родственные им элементы

Результаты, изложенные в п. 11.1, указывают, образно говоря, зоны «глобальной модулярности» в решетке **SEM**. Следующим естественным шагом в изучении феномена модулярности в **SEM** можно считать рассмотрение многообразий, обеспечивающих, так сказать, локальную модулярность в своем окружении. Говоря это, мы имеем в виду исследование модулярных элементов решетки **SEM** и других ее элементов, определение которых так или иначе опирается на тождество модулярности.

Наряду с модулярными, верхне-модулярными и нижне-модулярными элементами, определения которых даны в п. 0.2, представляется естественным рассмотреть также элементы, обладающие всеми этими тремя свойствами одновременно. Такие элементы мы будем называть *строго модулярными*. Многообразие полугрупп назовем *модулярным* [*верхне-модулярным, нижне-модулярным, строго модулярным, нейтральным*], если оно является модулярным [верхне-модулярным, нижне-модулярным, строго модулярным, нейтральным] элементом решетки **SEM**.

Существенным шагом в изучении модулярных многообразий является следующая

Теорема 14.1. *Если многообразие $\mathcal{V}$ модулярно, то либо $\mathcal{V} = \mathcal{SEM}$, либо $\mathcal{V} = \mathcal{M} \vee \mathcal{N}$, где $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{SL}$, а $\mathcal{N}$ есть нильмногообразие.*

Это утверждение (в слегка ослабленном виде и в другой терминологии) содержится в работе Ежека и Маккензи [68][6]. Приведенная нами уточненная формулировка взята из [125].

Теорема 14.1 полностью сводит изучение модулярных многообразий к ниль-случаю. В этом случае можно указать одно необходимое и одно достаточное условие модулярности, зазор между которыми представляется не слишком большим. Назовем тождество $u = v$ *подстановочным*, если слова u и v зависят от одних и тех же букв и v может быть получено из u переименованием букв. Справедливо следующее

Предложение 14.1. 1) *Всякое модулярное нильмногообразие может быть задано только* 0*-приведенными и подстановочными тождествами.* 2) *Всякое* 0*-приведенное многообразие полугрупп модулярно.*

Первое утверждение этого предложения доказано в [125], второе отмечалось в [15] и (в другой терминологии) в [68]. Отметим, что в доказательстве каждого из утверждений предложения 14.1 используются некоторые идеи из работы Ежека [67].

Для дальнейшего продвижения в изучении модулярных многообразий необходимо рассматривать нильмногообразия, удовлетворяющие подстановочным тождествам. Простейшим частным случаем подстановочных тождеств являются перестановочные тождества. Естественно возникает

Задача 14.1. *Описать перестановочные модулярные многообразия полугрупп.*

Первые шаги в направлении решения этой задачи сделаны в [125], где, в частности, описаны коммутативные модулярные многообразия.

Переходя к верхне-модулярным и нижне-модулярным многообразиям, отметим, что необходимые условия для этих двух типов многообразий приведены в [128] и [126] соответственно. В частности, оказалось, что всякое собственное многообразие с любым из этих свойств является периодическим. Описание верхне-модулярных и нижне-модулярных многообразий в ниль-случае указано в [131] и [126] соответственно, а в коммутативном случае – в [128] и [126] соответственно. В [127] классифицированы нижне-модулярные многообразия, в которых некоторая степень каждой полугруппы является вполне регулярной полугруппой, и нижне-модулярные многообразия ступени ≤ 2; в последнем случае нижняя модулярность эквивалентна нейтральности. Отметим, что доказательства в [127] в значительной степени основаны на технике, развитой М. В. Сапиром в [114].

Для дальнейшего продвижения в изучении верхне-модулярных и нижне-модулярных многообразий необходимо прежде всего ответить на следующие вопросы.

Вопрос 14.1. *Существует ли не верхне-модулярное многообразие полугрупп с вполне регулярным квадратом?*

Вопрос 14.2. *Существует ли* а) *собственное не комбинаторное нижне-модулярное многообразие полугрупп и* б) *нижне-модулярное, но не модулярное многообразие полугрупп?*

В связи с вопросом 14.2б уместно отметить, что пять остальных потенциально возможных импликаций между свойствами быть модулярным, верхне-модулярным и нижне-модулярным многообразием не верны: существуют модулярные, но не верхне-модулярные, модулярные, но не нижне-модулярные, верхне-модулярные, но не модулярные, верхне-модулярные, но не нижне-модулярные, и нижне-модулярные, но не верхне-модулярные многообразия.

[6]В этой работе рассматривается не решетка **SEM**, а двойственная к ней решетка эквациональных теорий полугрупп. Отметим, что модулярные элементы последней решетки в точности соответствуют модулярным многообразиям полугрупп, поскольку определение модулярного элемента решетки самодвойственно.

Обращаясь к строго модулярным и нейтральным многообразиям, отметим, что всякий нейтральный элемент произвольной решетки строго модулярен, но обратное, вообще говоря, неверно. Справедлива, однако, следующая

Теорема 14.2. *Для многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ следующие условия эквивалентны*: (а) $\mathcal{V}$ *одновременно верхне-модулярно и нижне-модулярно*; (б) $\mathcal{V}$ *строго модулярно*; (в) $\mathcal{V}$ *нейтрально*; (г) $\mathcal{V}$ *совпадает с одним из многообразий* $\mathcal{T}$, $\mathcal{SL}$, $\mathcal{ZM}$, $\mathcal{SL}\vee\mathcal{ZM}$ *и* $\mathcal{SEM}$.

Эквивалентность условий (б)–(г) доказана в [141], а эквивалентность условий (а) и (г) – в [127].

Нам осталось отметить, что в [131] описаны многообразия, являющиеся одновременно модулярными и верхне-модулярными, а в [141] – многообразия, являющиеся одновременно модулярными и нижне-модулярными.

§ 15. Формульные множества многообразий

Подмножество A решетки $\langle L;\vee,\wedge\rangle$ называется *формульным* в L, если существует формула первого порядка $\Phi(x)$ с одной свободной переменной x в сигнатуре решеточных операций $\vee$ и $\wedge$, выделяющая A в L, т. е. такая, что для любого элемента $a\in L$ предложение $\Phi(a)$ истинно тогда и только тогда, когда $a\in A$. Если A состоит из одного элемента, то мы говорим о формульности данного элемента. Ясно, что если для многообразия полугрупп $\mathcal{V}$ предложение $\Phi(\mathcal{V})$ истинно, то истинно и предложение $\Phi(\overleftarrow{\mathcal{V}})$. Многообразие $\mathcal{V}$ называется *полуформульным*, если в **SEM** формульно множество $\{\mathcal{V},\overleftarrow{\mathcal{V}}\}$.

Ряд глубоких результатов о формульных в **SEM** многообразиях и множествах многообразий получен в работе Ежека и Маккензи [68]. В ней высказана гипотеза, что всякое конечно базируемое многообразие полугрупп полуформульно. Легко понять, что если ответ на вопрос 1.1 окажется положительным, то эта гипотеза будет опровергнута. Основные результаты работы [68] суммированы в следующей теореме, которая, в частности, подтверждает указанную гипотезу применительно к локально конечным многообразиям.

Теорема 15.1 (Ежек и Маккензи [68])**.** 1) *Множества всех конечно базируемых, всех локально конечных, всех конечно порожденных и всех* 0*-приведенных многообразий полугрупп формульны в решетке* **SEM**. 2) *Каждое конечно базируемое локально конечное и каждое конечно порожденное многообразие полугрупп полуформульно.*

Ни для одного из множеств многообразий, указанных в утверждении 1) данной теоремы, в [68] не приводится явной формулы языка первого порядка, выделяющей это множество. Достаточно простая формула, выделяющая множество всех 0-приведенных многообразий, приведена в [141]. Еще более простая такая формула указана в [126].

Если $\mathcal{V}$ – коммутативное многообразие, то $\mathcal{V}$ конечно базируемо [95] и $\mathcal{V}=\overleftarrow{\mathcal{V}}$. Если, кроме того, $\mathcal{V}\neq\mathcal{COM}$, то $\mathcal{V}$ локально конечно. Поскольку, как нетрудно убедиться, многообразие $\mathcal{COM}$ формульно в **SEM**, из утверждения 2) теоремы 15.1 вытекает

Следствие 15.1. *Всякое коммутативное многообразие полугрупп формульно в решетке* **SEM**.

В то же время, существуют коммутативные многообразия, не формульные в решетке **Com**. Этот факт вытекает из существования нетривиальных автоморфизмов решетки **Com**. Первые примеры таких автоморфизмов были приведены в [74]. В недавней работе [62] получено описание группы автоморфизмов решетки **Com**; оказалось, что эта группа континуальна и удовлетворяет тождеству $x^2=1$ (и потому абелева).

В [74] доказана формульность в решетке **Com** ряда многообразий и множеств многообразий коммутативных полугрупп. В частности, справедлива следующая

Теорема 15.2 (Киселевич [74]). *Множество всех многообразий, порожденных абелевыми группами, всякое многообразие, порожденное абелевой группой, множество всех швабауэровских многообразий и всякое швабауэровское многообразие формульны в решетке* **Com**.

Изучение коммутативных многообразий, формульных в **Com**, завершено в [62], где найдена характеризация всех таких многообразий.

Литература*

[1] А. Я. Айзенштат. *О покрытиях в решетке многообразий полугрупп* // Соврем. анализ и геометрия. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1972. – С. 3–13. [п. 3.2]

[2] А. Я. Айзенштат. *О некоторых подрешетках решетки многообразий полугрупп* // Соврем. алгебра. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1974. – Вып. 1. – С. 3–15. [§ 1]

[3] А. Я. Айзенштат, Б. К. Богута. *О решетке многообразий полугрупп* // Полугрупповые многообразия и полугруппы эндоморфизмов. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1979. – С. 3–46. [пп. 0.1, 3.2, 10.2]

[4] В. А. Артамонов. *Цепные многообразия групп* // Тр. семинара им. И. Г. Петровского. – 1978. – Вып. 3. – С. 3–8. [п. 11.6]

[5] А. П. Бирюков. *Многообразия идемпотентных полугрупп* // Алгебра и логика. – 1970. – Т. 9. – № 3. – С. 255–273. [§ 1, 4]

[6] Б. К. Богута. *Покрытия многообразий, определяемых одним тождеством* // Соврем. алгебра. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1978. – С. 24–28. [п. 3.2]

[7] Б. М. Верников. *О многообразиях полугрупп, решетка подмногообразий которых разложима в прямое произведение* // Алгебраич. системы и их многообразия. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1988. – С. 41–52. [п. 13.3]

[8] Б. М. Верников. *Квазицепные многообразия полугрупп* // Исслед. алгебраич. систем. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1989. – С. 31–36. [п. 11.6]

[9] Б. М. Верников. *Специальные элементы решетки надкоммутативных многообразий полугрупп* // Мат. заметки. – 2001. – Т. 70. – № 5. – С. 670–678. [пп. 5.1, 5.3]

[10] Б. М. Верников. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: запрещенные подмногообразия* // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2002. – № 22. (Матем., механ. – Вып. 4.) – С. 16–42. [пп. 11.1, 11.3, 11.5]

[11] Б. М. Верников. *Об одном ослабленном варианте конгруэнц-перестановочности для многообразий полугрупп* // Алгебра и логика. – 2004. – Т. 43. – № 1. – С. 3–31. [п. 11.4]

[12] Б. М. Верников. *Многообразия полугрупп, на свободных объектах которых почти все вполне инвариантные конгруэнции* 1.5*-перестановочны* // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2005. – № 36. (Матем., механ. – Вып. 7.) – С. 95–106. [п. 11.4]

[13] Б. М. Верников. *Квазитождества в модулярных решетках многообразий полугрупп* // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2005. – № 38. (Матем., механ. – Вып. 8.) – С. 5–35. [п. 11.5]

[14] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Дополнения в решетках многообразий и квазимногообразий* // Изв. вузов. Матем. – 1982. – № 11. – С. 17–20. [п. 13.2]

[15] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп* // Алгебраич. системы и их многообразия. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1988. – С. 53–65. [§ 14]

[16] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Решетки нильпотентных многообразий полугрупп.* II // Изв. Урал. гос. ун-та. – 1998. – № 10. (Матем., механ. – Вып. 1.) – С. 13–33. [§ 7, 12]

[17] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Строение решеток многообразий нильполугрупп* // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2000. – № 18. (Матем., механ. – Вып. 3.) – С. 34–52. [§ 7]

[18] Б. М. Верников, М. В. Волков. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: завершение описания* // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2004. – № 30. (Матем., механ. – Вып. 6.) – С. 5–36. [пп. 11.1, 11.3, 11.5]

[19] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий* // Изв. вузов. Матем. – 1989. – № 6. – С. 51–60. [пп. 3.2, 11.1, 11.2]

[20] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* II // Изв. вузов. Матем. – 1992. – № 7. – С. 3–8. [пп. 11.1, 11.2]

[21] М. В. Волков. *Многообразия полугрупп с модулярной решеткой подмногообразий.* III // Изв. вузов. Матем. – 1992. – № 8. – С. 21–29. [пп. 11.1, 11.2]

[22] М. В. Волков. *Тождества в решетках многообразий полугрупп.* – Дисс. … д-ра физ.-мат. наук. – Екатеринбург, 1994. [п. 11.1]

* После библиографического описания каждой работы мы указываем параграфы или пункты данного обзора, в которых упоминается эта работа.

[23] М. В. Волков. *Полумодулярные и дезарговы многообразия полугрупп: тождества* // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2002. – № 22. (Матем., механ. – Вып. 4.) – С. 43–61. [пп. 11.1, 11.3, 11.5]

[24] Э. А. Голубов, М. В. Сапир. *Финитно аппроксимируемые многообразия полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1982. – № 11. – С. 21–29. [п. 11.1]

[25] Г. Гретцер. *Общая теория решеток.* – М.: Мир, 1982. – 456 с. [п. 0.2]

[26] А. И. Зимин. *Блокирующие множества термов* // Мат. сб. – 1982. – Т. 119. – № 3. – С. 363–375. [§ 12]

[27] Е. И. Клейман. *Некоторые свойства структуры многообразий инверсных полугрупп* // Исслед. по соврем. алгебре. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1977. – С. 56–72. [п. 2.2]

[28] Е. И. Клейман. *Об условии покрытия в решетке многообразий инверсных полугрупп* // Исслед. алгебраич. систем по свойствам их подсистем. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1980. – С. 76–91. [п. 3.1]

[29] А. Клиффорд, Г. Престон. *Алгебраическая теория полугрупп.* Т. 1, 2. – М.: Мир, 1972. – 288 с., 424 с. [п. 0.2]

[30] П. А. Кожевников. *Многообразия групп простого периода и тождества с высокими степенями.* – Дисс. … канд. физ.-мат. наук. – М., 2000. [пп. 3.2, 10.1]

[31] П. А. Кожевников. *О многообразиях групп большого нечетного периода* // Деп. 1612-В00, ВИНИТИ. – М., 2000. [пп. 3.2, 10.1]

[32] С. А. Малышев. *О перестановочных многообразиях полугрупп, решетка подмногообразий которых конечна* // Соврем. алгебра. Полугрупповые конструкции. – Л.: Ленингр. гос. педагогич. ин-т. – 1981. – С. 71–76. [п. 10.1]

[33] А. И. Мальцев. *Алгебраические системы.* – М.: Наука, 1970. – 392 с. [п. 0.2]

[34] И. И. Мельник. *Об одном семействе многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1971. – № 12. – С. 103–108. [§ 4]

[35] И. И. Мельник. *Описание некоторых решеток многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1972. – № 7. – С. 65–74. [§ 4]

[36] *Общая алгебра.* Т. 1, 2 / Под ред. Л. А. Скорнякова. – М.: Наука, 1990, 1991. – 592 с., 490 с. [п. 0.2]

[37] В. Ю. Попов. *О независимой базируемости многообразий полугрупп* // Алгебра и логика. – 2005. – Т. 44. – № 1. – С. 81–96. [п. 3.3]

[38] В. В. Расин. *Многообразия ортодоксальных клиффордовых полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1982. – № 11. – С. 82–85. [§ 6, пп. 10.1, 11.2]

[39] М. В. Сапир, Е. В. Суханов. *О многообразиях перидических полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1981. – № 4. – С. 48–55. [пп. 10.1, 10.3, § 12]

[40] *Свердловская тетрадь. Нерешенные задачи теории полугрупп* / Под ред. Л. Н. Шеврина. – 2-е изд. – Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979. – 41 с. [пп. 3.1, 3.3, 10.1, 11.2]

[41] Е. В. Суханов. *Почти линейные многообразия полугрупп* // Мат. заметки. – 1982. – Т. 32. – № 4. – С. 469–476. [п. 11.6]

[42] Е. В. Суханов. *Многообразия полугрупп ширины* 2 // Исслед. алгебраич. систем по свойствам их подсистем. – Свердловск: Урал. гос. ун-т. – 1985. – С. 148–152. [п. 11.6]

[43] А. Н. Трахтман. *О покрывающих элементах в структуре многообразий алгебр* // Мат. заметки. – 1974. – Т. 15. – № 2. – С. 307–312. [пп. 3.1, 3.2]

[44] А. Н. Трахтман. *Многообразие полугрупп без неприводимого базиса тождеств* // Мат. заметки. – 1977. – Т. 21. – № 6. – С. 865–872. [п. 3.1]

[45] Л. Н. Шеврин. *К теории эпигрупп.* I, II // Мат. сб. – 1994. – Т. 185. – № 8. – С. 129–160; № 9. – С. 153–176. [пп. 0.1, 2.1, 11.1]

[46] Л. Н. Шеврин, М. В. Волков. *Тождества полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1985. – № 11. – С. 3–47. [пп. 0.1, 0.2, § 4, п. 10.2]

[47] Л. Н. Шеврин, Е. В. Суханов. *Структурные аспекты теории многообразий полугрупп* // Изв. вузов. Матем. – 1989. – № 6. – С. 3–39. [пп. 0.1, 0.2]

[48] A. Ya. Aĭzenštat. *On varieties of semigroups having a finite number of subvarieties* // Algebraic Theory of Semigroups. (Colloq. Math. Soc. János Bolyai. – Vol. 20.) – Amsterdam: North Holland Publ. Company. – 1979. – P. 33–41. [п. 10.1]

[49] J. Almeida. *Some order properties of the lattice of varieties of commutative semigroups* // Canad. J. Math. – 1986. – Vol. 38. – № 1. – P. 19–47. [§ 8]

[50] K. Auinger. *Complete congruences on lattices of (existence) varieties* // In: Semigroups, Automata and Languages / J. Almeida, G. M. S. Gomes, P. V. Silva (eds.). – Singapore: World Scientific. – 1996. – P. 1–10. [п. 2.2]

[51] S. Burris, E. Nelson. *Embedding the dual of* Π_∞ *in the lattice of equational classes of semigroups* // Algebra Universalis. – 1971. – Vol. 1. – № 2. – P. 248–254. [§ 1, 12]

[52] S. Burris, E. Nelson. *Embedding the dual of* Π_m *in the lattice of equational classes of commutative semigroups* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1971. – Vol. 30. – № 2. – P. 37–39. [§ 12]

[53] A. H. Clifford. *The free completely regular semigroup on a set* // J. Algebra. – 1979. – Vol. 59. – P. 434–451. [§ 6]
[54] V. Dierks, M. Erne, J. Reinhold. *Complements in lattices of varieties and equational theories* // Algebra Universalis. – 1994. – Vol. 31. – № 4. – P. 506–515. [п. 13.2]
[55] T. Evans. *The lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. – 1971. – Vol. 2. – № 1. – P. 1–43. [пп. 0.1, 3.1, 10.1, 10.2, 11.1]
[56] C. F. Fennemore. *All varieties of bands.* I, II // Math. Nachr. – 1971. – Vol. 48. – № 1–6. – P. 237–252, 253–262. [§ 1, 4]
[57] J. A. Gerhard. *The lattice of equational classes of idempotent semigroups* // J. Algebra. – 1970. – Vol. 15. – № 2. – P. 195–224. [§ 1, 4]
[58] J. A. Gerhard. *Semigroups with an idempotent power.* II. *The lattice of equational subclasses of* $[(xy)^2 = xy]$ // Semigroup Forum. – 1977. – Vol. 14. – № 4. – P. 375–388. [§ 4, п. 11.2]
[59] J. A. Gerhard, M. Petrich. *Varieties of bands revisited* // Proc. London Math. Soc. (3). – 1989. – Vol. 58. – № 2. – P. 323–350. [§ 1]
[60] M. Grech. *Irreducible varieties of commutative semigroups* // J. Algebra. – 2003. – Vol. 261. – № 1. – P. 207–228. [§ 8]
[61] M. Grech. *Well- and better-quasi-ordering in the lattice of varieties of commutative semigroups* // Int. J. Algebra and Comput. – 2007. – Vol. 17. – № 4. – P. 869–879. [§ 8]
[62] M. Grech. *Automorhisms of the lattice of equational theories of commutative semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc., accepted. [§ 8, 15]
[63] M. Grech, A. Kisielewicz. *Covering relation for equational theories of commutative semigroups* // J. Algebra. – 2000. – Vol. 232. – № 2. – P. 493–506. [§ 8]
[64] P. A. Grillet. *Fully invarant congruences on free commutative semigroups* // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2001. – Vol. 67. – № 3–4. – P. 571–600. [§ 8]
[65] K. H. Hofmann, P. Mostert. *Elements of Compact Semigroups.* – Columbus, Ohio, 1966. – xiii+384 p. [п. 0.2]
[66] J. Ježek. *Intervals in lattices of varieties* // Algebra Universalis. – 1976. – Vol. 6. – № 2. – P. 147–158. [§ 1, 12]
[67] J. Ježek. *The lattice of equational theories. Part* I: *modular elements* // Czechosl. Math. J. – 1981. – Vol. 31. – № 1. – P. 127–152. [§ 14]
[68] J. Ježek, R. N. McKenzie. *Definability in the lattice of equational theories of semigroups* // Semigroup Forum. – 1993. – Vol. 46. – № 2. – P. 199–245. [§ 14, 15]
[69] J. Kaďourek. *Uncountably many varieties of semigroups satisfying* $x^2y \simeq xy$ // Semigroup Forum. – 2000. – Vol. 60. – № 1. – P. 135–152. [п. 10.3]
[70] J. Kaďourek. *Uncountably many varieties of completely simple semigroups with metabelian subgroups* // Glasgow Math. J. – 2006. – Vol. 48. – № 3. – P. 365–410. [п. 10.1]
[71] J. Kalicki, D. Scott. *Equationally completeness in abstract algebras* // Proc. Konikl. Nederl. Akad. Wetensch. Ser. A. – 1955. – Vol. 58. – № 17. – P. 650–659. [§ 1]
[72] O. G. Kharlampovich, M. V. Sapir. *Algorithmic problems in varieties* // Int. J. Algebra and Comput. – 1995. – Vol. 5. – № 4–5. – P. 379–602. [п. 0.1]
[73] A. Kisielewicz. *Varieties of commutative semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – Vol. 342. – № 1. – P. 275–306. [§ 8]
[74] A. Kisielewicz. *Definability in the lattice of equational theories of commutative semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2004. – Vol. 356. – № 9. – P. 3483–3504. [§ 8, 15]
[75] S. J. L. Kopamu. *Varieties of structurally trivial semigroups.* I // Semigroup Forum. – 1999. – Vol. 58. – № 2. – P. 159–174. [§ 4]
[76] S. J. L. Kopamu. *Varieties of structurally trivial semigroups.* II // Semigroup Forum. – 2003. – Vol. 66. – № 3. – P. 401–415. [§ 1]
[77] S. J. L. Kopamu. *Varieties and nilpotent extensions of permutative periodic semigroups* // Semigroup Forum. – 2004. – Vol. 69. – № 2. – P. 255–280. [п. 13.3]
[78] I. O. Korjakov. *A sketch of the lattice of commutative nilpotent semigroup varieties* // Semigroup Forum. – 1982. – Vol. 24. – № 4. – P. 285–317. [§ 12]
[79] S. I. Kublanovsky, E. W. H. Lee, N. R. Reilly. *Some conditions related to the exactness of Rees–Sushkevich varieties* // Semigroup Forum. – 2008. – Vol. 76. – № 1. – P. 87–94. [§ 9]
[80] E. W. H. Lee. *On the lattice of Rees–Sushkevich varieties.* – Ph. D. Thesis, Simon Fraser Univ., 2002. [§ 9]
[81] E. W. H. Lee. *Identity bases for some non-exact varieties* // Semigroup Forum. – 2004. – Vol. 68. – № 3. – P. 445–457. [§ 9, 12]
[82] E. W. H. Lee. *Subvarieties of the variety generated by the five-element Brandt semigroup* // Int. J. Algebra and Comput. – 2006. – Vol. 16. – № 2. – P. 417–441. [§ 9, 12]

[83] E. W. H. Lee. *Minimal semigroups generating varieties with complex subvariety lattices* // Int. J. Algebra and Comput. – 2007. – Vol. 17. – № 8. – P. 1553–1572; corrigendum: ibid. – 2008. – Vol. 18. – № 6. – P. 1099–1100. [§ 12]

[84] E. W. H. Lee. *On the variety generated by some monoid of order five* // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2008. – Vol. 74. – № 3–4. – P. 509–537. [§ 9]

[85] E. W. H. Lee. *Combinatorial Rees–Sushkevich varieties are finitely based* // Int. J. Algebra and Comput. – 2008. – Vol. 18. – № 5. – P. 957–978. [§ 9]

[86] E. W. H. Lee, N. R. Reilly. *Centrality in Rees-Sushkevich varieties* // Algebra Universalis. – 2008. – Vol. 58. – № 2. – P. 145–180. [§ 9]

[87] E. W. H. Lee, M. V. Volkov. *On the structure of the lattice of combinatorial Rees–Sushkevich varieties* // In: Proc. Int. Conf. Semigroups and Formal Languages / J. M. André, M. J. J. Branco, V. H. Fernandes, J. Fountain, G. M. S. Gomes, J. C. Meakin (eds.). – Singapore: World Scientific. – 2007. – P. 164–187. [§ 9]

[88] R. N. McKenzie, G. F. McNulty, W. F. Taylor. *Algebras. Lattices. Varieties.* Vol. I. – Monterey: Wadsworth & Brooks/Cole, 1987. – xii+361 p. [п. 5.1]

[89] R. A. R. Monzo. *Pre-complete almost endomorphisms and semigroups whose cube is a band* // Semigroup Forum. – 2003. – Vol. 67. – № 3. – P. 355–372. [§ 4]

[90] E. Nelson. *The lattice of equational classes of commutative semigroups* // Canad. J. Math. – 1971. – Vol. 23. – № 5. – P. 575–595. [§ 8]

[91] F. J. Pastijn. *The lattice of completely regular semigroup varieties* // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1990. – Vol. 49. – № 1. – P. 24–42. [§ 6]

[92] F. J. Pastijn. *Commuting fully invariant congruences on free completely regular semigroups* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1991. – Vol. 323. – № 1. – P. 79–92. [§ 6, п. 11.4]

[93] F. J. Pastijn. *The idempotents in a periodic semigroup* // Int. J. Algebra and Comput. – 1996. – Vol. 6. – № 5. – P. 511–540. [п. 2.2]

[94] F. J. Pastijn, P. G. Trotter. *Complete congruences on lattices of varieties and of pseudovarieties* // Int. J. Algebra and Comput. – 1998. – Vol. 8. – № 2. – P. 171–201. [п. 2.2]

[95] P. Perkins. *Bases for equational theories of semigroups* // J. Algebra. – 1969. – Vol. 11. – № 2. – P. 298–314. [§ 15]

[96] M. Petrich. *All subvarieties of a certain variety of semigroups* // Semigroup Forum. – 1974. – Vol. 7. – № 1–4. – P. 104–152. [§ 4]

[97] M. Petrich. *Inverse Semigroups.* – New York: Wiley Interscience, 1984. – x+674 p. [п. 0.1]

[98] M. Petrich. *Characterizations of certain completely regular varieties* // Semigroup Forum. – 2003. – Vol. 66. – № 3. – P. 381–400. [§ 4]

[99] M. Petrich, N. R. Reilly. *The modularity of the lattice of varieties of completely regular semigroups and related representations* // Glasgow Math. J. – 1990. – Vol. 32. – № 2. – P. 137–152. [§ 6, п. 11.4]

[100] M. Petrich, N. R. Reilly. *Operators related to idempotent generated and monoid completely regular semigroups* // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. – 1990. – Vol. 49. – № 1. – P. 1–23. [п. 2.2]

[101] M. Petrich, N. R. Reilly. *Operators related to E-disjunctive and fundamental completely regular semigroups* // J. Algebra. – 1990. – Vol. 134. – № 1. – P. 1–27. [п. 2.2]

[102] M. Petrich, N. R. Reilly. *Completely Regular Semigroups.* – New York: John Wiley & Sons, 1999. – x+481 p. [п. 0.1, § 6]

[103] L. Polák. *On varieties of completely regular semigroups.* I // Semigroup Forum. – 1985. – Vol. 32. – № 1. – P. 97–123. [§ 6]

[104] L. Polák. *On varieties of completely regular semigroups.* II // Semigroup Forum. – 1987. – Vol. 36. – № 3. – P. 253–284. [§ 6]

[105] L. Polák. *On varieties of completely regular semigroups.* III // Semigroup Forum. – 1988. – Vol. 37. – № 1. – P. 1–30. [п. 2.2, § 6]

[106] Gy. Pollák. *On the consequences of permutation identities* // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1973. – Vol. 34. – P. 323–333. [§ 12]

[107] Gy. Pollák. *Some lattices of varieties containing elements without cover* // Quad. Ric. Sci. – 1981. – Vol. 109. – P. 91–96. [п. 3.1]

[108] Gy. Pollák. *A new example of a limit variety* // Semigroup Forum. – 1989. – Vol. 38. – № 1. – P. 283–303. [§ 4]

[109] P. Pudlák, J. Tůma. *Every finite lattice can be embedded in a finite partition lattice* // Algebra Universalis. – 1980. – Vol. 10. – № 1. – P. 74–95. [§ 12]

[110] N. R. Reilly. *Modular sublattices of the lattice of varieties of inverse semigroups* // Pacific J. Math. – 1980. – Vol. 89. – № 2. – P. 405–417. [п. 2.2]

[111] N. R. Reilly. *Complete congruences on the lattice of Rees–Sushkevich varieties* // Commun. Algebra. – 2007. – Vol. 35. – № 11. – P. 3624–3659. [§ 9]

[112] N. R. Reilly. *The interval* $[\mathbf{B}_2, \mathbf{NB}_2]$ *in the lattice of Rees–Sushkevich varieties* // Algebra Universalis. – 2008. – Vol. 59. – № 3–4. – P. 345–363. [§ 9]
[113] N. R. Reilly. *Shades of orthodoxy in Rees–Sushkevich varieties* // Semigroup Forum, accepted. [§ 9]
[114] M. V. Sapir. *On Cross semigroup varieties and related questions* // Semigroup Forum. – 1991. – Vol. 42. – № 3. – P. 345–364. [п. 3.1, § 4, пп. 10.1, 10.2, § 14]
[115] R. Schwabauer. *Commutative semigroup laws* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 22. – № 3. – P. 591–595. [§ 8]
[116] L. N. Shevrin. *Epigroups* // In: Structural Theory of Automata, Semigroups, and Universal Algebra / V. B. Kudryavtsev, I. G. Rosenberg (eds.). – Dordrecht: Springer, 2005. – P. 331–380. [пп. 0.1, 0.2, 2.1, 11.1]
[117] L. N. Shevrin, A. J. Ovsyannikov. *Semigroups and Their Subsemigroup Lattices*. – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publ., 1996. – xi+380 p. [п. 0.2]
[118] *The Concise Handbook of Algebra* / A. V. Mikhalev, G. F. Pilz (eds.). – Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publ., 2002. – xvi+618 p. [п. 0.2]
[119] B. M. Vernikov. *Dualities in lattices of semigroup varieties* // Semigroup Forum. – 1990. – Vol. 40. – № 1. – P. 59–76. [п. 13.1]
[120] B. M. Vernikov. *On congruences of G-sets* // Comment. Math. Univ. Carol. – 1997. – Vol. 38. – № 3. – P. 603–613. [п. 5.1, § 7]
[121] B. M. Vernikov. *Distributivity, modularity, and related conditions in lattices of overcommutative semigroup varieties* // In: Semigroups with Applications, Including Semigroup Rings / S. Kublanovsky, A. Mikhalev, P. Higgins, J. Ponizovskii (eds.). – St Petersburg: St Petersburg State Technical University. – 1999. – P. 411–439. [пп. 5.2, 11.3]
[122] B. M. Vernikov. *Modular elements in congruence lattices of G-sets* // Beiträge zur Algebra und Geometrie. – 2000. – Vol. 41. – № 1. – P. 85–92. [п. 5.1]
[123] B. M. Vernikov. *Semidistributive law and other quasi-identities in lattices of semigroup varieties* // Proc. Steklov Inst. Math., Suppl. 2. – 2001. – P. S241–S256. [пп. 5.2, 11.5]
[124] B. M. Vernikov. *Semigroup varieties with* 1.5*-permutable fully invariant congruences on their free objects* // Acta Appl. Math. – 2005. – Vol. 85. – № 1–3. – P. 313–318. [п. 11.4]
[125] B. M. Vernikov. *On modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Comment. Math. Univ. Carol. – 2007. – Vol. 48. – № 4. – P. 595–606. [§ 14]
[126] B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Semigroup Forum. – 2007. – Vol. 75. – № 3. – P. 554–566. [§ 14, 15]
[127] B. M. Vernikov. *Lower-modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2008. – Vol. 74. – № 3–4. – P. 539–556. [§ 14]
[128] B. M. Vernikov. *Upper-modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Algebra Universalis. – 2008. – Vol. 59. – № 3–4. – P. 405–428. [§ 14]
[129] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Permutability of fully invariant congruences on relatively free semigroups* // Acta Sci. Math. (Szeged). – 1997. – Vol. 63. – № 3–4. – P. 437–461. [п. 11.4]
[130] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Commuting fully invariant congruences on free semigroups* // Contrib. General Algebra. – 2000. – Vol. 12. – P. 391–417. [пп. 11.2, 11.4]
[131] B. M. Vernikov, M. V. Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties.* II // Contrib. General Algebra. – 2006. – Vol. 17. – P. 173–190. [§ 14]
[132] M. V. Volkov. *An example of a limit variety of semigroups* // Semigroup Forum. – 1982. – Vol. 24. – № 4. – P. 319–326. [§ 4]
[133] M. V. Volkov. *On the join of semigroup varieties* // Contrib. General Algebra. – 1983. – Vol. 2. – P. 365–373. [п. 3.3]
[134] M. V. Volkov. *On the join of varieties* // Simon Stevin. – 1984. – Vol. 58. – № 4. – P. 311–317. [п. 3.1]
[135] M. V. Volkov. *Commutative semigroup varieties with distributive subvariety lattices* // Contrib. General Algebra. – 1991. – Vol. 7. – P. 351–359. [п. 11.2]
[136] M. V. Volkov. *Semigroup varieties with commuting fully invariant congruences on free objects* // Contemp. Math. – 1992. – Vol. 131. – Part 3. – P. 295–316. [пп. 11.2, 11.5]
[137] M. V. Volkov. *Young diagrams and the structure of the lattice of overcommutative semigroup varieties* // In: Transformation Semigroups. Proc. Int. Conf. Held at the Univ. Essex / P. M. Higgins (ed.). – Colchester: University of Essex, 1994. – P. 99–110. [п. 5.1]
[138] M. V. Volkov. *Covers in the lattices of semigroup varieties and pseudovarieties* // In: Semigroups, Automata and Languages / J. Almeida, G. M. S. Gomes, P. V. Silva (eds.). – Singapore: World Scientific. – 1996. – P. 263–280. [п. 3.1]
[139] M. V. Volkov. *The finite basis problem for finite semigroups* // Sci. Math. Jpn. – 2001. – Vol. 53. – № 1. – P. 171–199. [п. 10.2]

[140] M. V. Volkov. *György Pollák's work on the theory of semigroup varieties: its significance and its influence so far* // Acta Sci. Math. (Szeged). – 2002. – Vol. 68. – № 3–4. – P. 875–894. [§ 4, п. 10.2]
[141] M. V. Volkov. *Modular elements of the lattice of semigroup varieties* // Contrib. General Algebra. – 2005. – Vol. 16. – P. 275–288. [§ 14, 15]
[142] M. V. Volkov. *On a question by Edmond W. H. Lee* // Изв. Урал. гос. ун-та. – 2005. – № 36. (Матем., механ. – Вып. 7.) – С. 167–178. [§ 9]
[143] M. V. Volkov, T. A. Ershova. *The lattice of varieties of semigroups with completely regular square* // In: Monash Conf. on Semigroup Theory in honour of G. B. Preston / T. E. Hall, P. R. Jones, J. C. Meakin (eds.). – Singapore: World Scientific. – 1991. – P. 306–322. [пп. 11.1, 11.3]
[144] W. T. Zhang, Y. F. Luo. *On varieties generated by minimal complex semigroups* // Order. – 2008. – Vol. 25. – № 3. – P. 243–266. [§ 12]

Л. Н. Шеврин

Профессор, научный руководитель кафедры алгебры и дискретной математики,
Уральский государственный университет,
620083, Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,

e-mail: Lev.Shevrin@usu.ru

Б. М. Верников

Профессор, кафедра алгебры и дискретной математики,
Уральский государственный университет,
620083, Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,

e-mail: Boris.Vernikov@usu.ru

М. В. Волков

Профессор, заведующий кафедрой алгебры и дискретной математики,
Уральский государственный университет,
620083, Екатеринбург, пр. Ленина, д. 51,

e-mail: Mikhail.Volkov@usu.ru

L. N. Shevrin

Professor, Scientific Leader of the Chair of Algebra and Discrete Mathematics of the Ural State University,
Ural State University, 51 Lenin str., 620083 Ekaterinburg, Russia,

e-mail: Lev.Shevrin@usu.ru

B. M. Vernikov

Professor, Chair of Algebra and Discrete Mathematics of the Ural State University.
Ural State University, 51 Lenin str., 620083 Ekaterinburg, Russia,

e-mail: Boris.Vernikov@usu.ru

M. V. Volkov

Professor, Head of the Chair of Algebra and Discrete Mathematics of the Ural State University,
Ural State University, 51 Lenin str., 620083 Ekaterinburg, Russia,

e-mail: Mikhail.Volkov@usu.ru