Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ в точке x_0

Теорема 5. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ – дифференцируемы в $O(x_0)$ и пусть $f(x_0) = g(x_0) = 0$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в $\breve{O}(x_0)$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Без док-ва.

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ в точке. Пример 6

Пример 6. Найти $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{2x^2+4x-30}$.

Решение.

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+6}-3}{2x^2+4x-30}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+6}-3\right)'}{(2x^2+4x-30)'}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+6}}(x+6)'}{4x+4}=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+6}}}{4x+4}=\left[\frac{\frac{1}{2\sqrt{3+6}}}{4\cdot 3+4}\right]=\frac{1}{96}$$

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ в точке x_0

Теорема 6. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ – дифференцируемы в $O(x_0)$ и пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$,
$g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в $\breve{O}(x_0)$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g\,(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Без док-ва.

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ в точке x_0. Пример 7

Пример 7. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x\ln x$.

Решение.

$$\lim_{x\to 0} x\ln x = [0\cdot\infty] = \lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{-x} = \lim_{x\to 0}(-x) = 0$$

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ в точке x_0. Пример 8

Пример 8. Найти $\lim\limits_{x\to 0} x^x$.

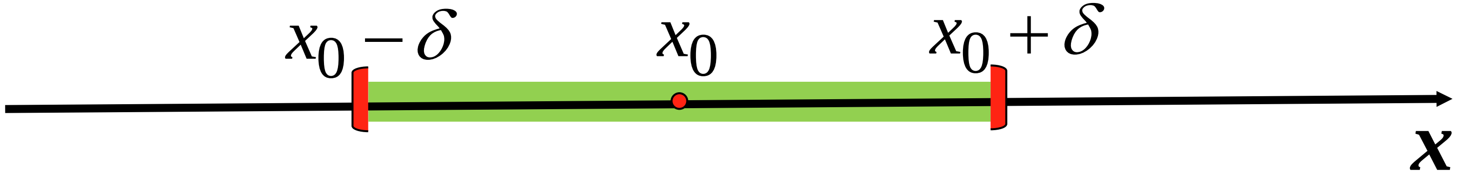
Решение.

$$\lim_{x\to 0} x^x = [0^0] = \lim_{x\to 0} e^{\ln x^x} = \lim_{x\to 0} e^{x\cdot\ln x} =$$

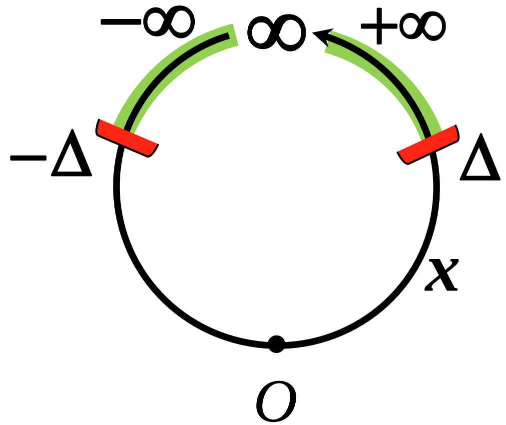
$$= e^{\lim\limits_{x\to 0} x\cdot\ln x} = e^0 = 1$$

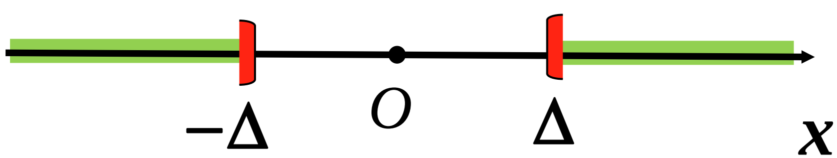
Определение $O_\Delta(\infty)$

<u>Повторение.</u> $O_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$



<u>Опр.</u> $O_\Delta(\infty) = (-\infty; -\Delta) \cup (\Delta; \infty;)$





Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{0}{0}$ в ∞.

<u>Теорема 7.</u> Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ – дифференцируемы в $O_\Delta(\infty) = (-\infty; -\Delta) \cup (\Delta; \infty;)$ и пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = 0$, $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в $\breve{O}(x_0)$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

<u>Без док-ва.</u>

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ в ∞.

Теорема 8. Пусть функции $f(x)$, $g(x)$ – дифференцируемы в $O_\Delta(\infty) = (-\infty; -\Delta) \cup (\Delta; \infty;)$ и пусть $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = \infty$,
$g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в $\breve{O}(x_0)$.

Тогда если существует $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, то существует

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}}$$

Без док-ва.

Теорема Лопиталя раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ в ∞. Пример 9

Пример 9. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{e^x}}$.

Решение.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{e^x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(x^2)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{e^x}=$$

$$=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to+\infty}\frac{(2x)'}{(e^x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{e^x}=\left[\frac{\mathbf{1}}{\infty}\right]=0$$