Лингвистические основы информатики
Лекция 9
Лемма о накачке для не контекстно-свободного языка

Ю. В. Нагребецкая, И. А. Михайлова

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук
Направления: Математика и компьютерные науки
Компьютерная безопасность
(6 семестр)

Пересечение КС языков

На прошлой лекции мы доказали, что пересечение регулярного и КС языков является КС языком.

Пересечение КС языков

На прошлой лекции мы доказали, что пересечение регулярного и КС языков является КС языком.

Справедливо ли это для КС языков, т.е является ли пересечение КС языков КС языком?

Пересечение КС языков

На прошлой лекции мы доказали, что пересечение регулярного и КС языков является КС языком.

Справедливо ли это для КС языков, т.е является ли пересечение КС языков КС языком?

Оказывается, нет!

Пересечение КС языков

На прошлой лекции мы доказали, что пересечение регулярного и КС языков является КС языком.

Справедливо ли это для КС языков, т.е является ли пересечение КС языков КС языком?

Оказывается, нет!

Рассмотрим язык $L_1 = \{a^n b^k c^n \mid n, k \geq 0\}$.

Пересечение КС языков

На прошлой лекции мы доказали, что пересечение регулярного и КС языков является КС языком.

Справедливо ли это для КС языков, т.е является ли пересечение КС языков КС языком?

Оказывается, нет!

Рассмотрим язык $L_1 = \{a^n b^k c^n \mid n, k \geq 0\}$.
Является ли он КС-языком?

Пересечение КС языков

На прошлой лекции мы доказали, что пересечение регулярного и КС языков является КС языком.

Справедливо ли это для КС языков, т.е является ли пересечение КС языков КС языком?

Оказывается, нет!

Рассмотрим язык $L_1 = \{a^n b^k c^n \mid n, k \geq 0\}$.
Является ли он КС-языком?
Да, является, поскольку порождается КС-грамматикой
$S \to aSc \mid A$
$A \to bA \mid \varepsilon$

Пересечение КС языков

На прошлой лекции мы доказали, что пересечение регулярного и КС языков является КС языком.

Справедливо ли это для КС языков, т.е является ли пересечение КС языков КС языком?

Оказывается, нет!

Рассмотрим язык $L_1 = \{a^n b^k c^n \mid n, k \geq 0\}$.
Является ли он КС-языком?
Да, является, поскольку порождается КС-грамматикой
$S \to aSc \mid A$
$A \to bA \mid \varepsilon$

Теперь рассмотрим язык $L_2 = \{a^n b^n c^k \mid n, k \geq 0\}$.

Пересечение КС языков

На прошлой лекции мы доказали, что пересечение регулярного и КС языков является КС языком.

Справедливо ли это для КС языков, т.е является ли пересечение КС языков КС языком?

Оказывается, нет!

Рассмотрим язык $L_1 = \{a^n b^k c^n \mid n, k \geq 0\}$.
Является ли он КС-языком?
Да, является, поскольку порождается КС-грамматикой
$S \to aSc \mid A$
$A \to bA \mid \varepsilon$

Теперь рассмотрим язык $L_2 = \{a^n b^n c^k \mid n, k \geq 0\}$.
Он тоже является КС-языком, поскольку порождается КС-грамматикой
$S \to aAbB \mid \varepsilon,$
$A \to aAb \mid \varepsilon$
$B \to cB \mid \varepsilon$

Пересечение КС языков

Вопрос. Будет ли пересечение языков

$$L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

также КС языком?

Пересечение КС языков

Вопрос. Будет ли пересечение языков

$$L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

также КС языком?

- Ранее (в лекции 2) мы построили не КС грамматику, порождающую язык L.

Пересечение КС языков

Вопрос. Будет ли пересечение языков

$$L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

также КС языком?

- Ранее (в лекции 2) мы построили не КС грамматику, порождающую язык L.
- Чтобы доказать, что некоторый язык не является КС языком придется доказать, что нет КС грамматики, которая его порождает.

Пересечение КС языков

Вопрос. Будет ли пересечение языков

$$L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

также КС языком?

- Ранее (в лекции 2) мы построили не КС грамматику, порождающую язык L.
- Чтобы доказать, что некоторый язык не является КС языком придется доказать, что нет КС грамматики, которая его порождает.
- Для того, чтобы доказать, что некоторый язык не является регулярным, мы в теории автоматов пользовались следствием из теоремы о накачке для регулярных языков.

Пересечение КС языков

Вопрос. Будет ли пересечение языков

$$L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

также КС языком?

- Ранее (в лекции 2) мы построили не КС грамматику, порождающую язык L.
- Чтобы доказать, что некоторый язык не является КС языком придется доказать, что нет КС грамматики, которая его порождает.
- Для того, чтобы доказать, что некоторый язык не является регулярным, мы в теории автоматов пользовались следствием из теоремы о накачке для регулярных языков.
- Сформулируем и докажем лемму о накачке для КС языков.

Пересечение КС языков

Вопрос. Будет ли пересечение языков

$$L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

также КС языком?

- Ранее (в лекции 2) мы построили не КС грамматику, порождающую язык L.
- Чтобы доказать, что некоторый язык не является КС языком придется доказать, что нет КС грамматики, которая его порождает.
- Для того, чтобы доказать, что некоторый язык не является регулярным, мы в теории автоматов пользовались следствием из теоремы о накачке для регулярных языков.
- Сформулируем и докажем лемму о накачке для КС языков.
- При помощи следствия из нее докажем, что язык L не является КС.

Пересечение КС языков

Вопрос. Будет ли пересечение языков

$$L = L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

также КС языком?

- Ранее (в лекции 2) мы построили не КС грамматику, порождающую язык L.
- Чтобы доказать, что некоторый язык не является КС языком придется доказать, что нет КС грамматики, которая его порождает.
- Для того, чтобы доказать, что некоторый язык не является регулярным, мы в теории автоматов пользовались следствием из теоремы о накачке для регулярных языков.
- Сформулируем и докажем лемму о накачке для КС языков.
- При помощи следствия из нее докажем, что язык L не является КС.
- Будем использовать это следствие для доказательства того, что другие языки не являются КС.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in R$

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда
$\exists n \in \mathbb{N}$:
$\forall w \in R$
если

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in R$

если

$|w| \geq n \qquad (\alpha(n, w))$

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in R$

если

$|w| \geq n \qquad (\alpha(n, w))$

то

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in R$

если

$|w| \geq n \qquad (\alpha(n, w))$

то

$\exists x, u, y \in \Sigma^*$

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in R$

если

$|w| \geq n \qquad (\alpha(n, w))$

то

$\exists x, u, y \in \Sigma^*$

$w = xuy \qquad (\beta_1(n, w, x, u, y))$

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in R$

если

$|w| \geq n \qquad (\alpha(n, w))$

то

$\exists x, u, y \in \Sigma^*$

$w = xuy \qquad (\beta_1(n, w, x, u, y))$

и

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in R$

если

$|w| \geq n \qquad (\alpha(n, w))$

то

$\exists x, u, y \in \Sigma^*$

$w = xuy \qquad (\beta_1(n, w, x, u, y))$

и

$|u| \geq 1 \qquad (\beta_2(n, w, x, u, y))$

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in R$

если

$|w| \geq n \qquad (\alpha(n, w))$

то

$\exists x, u, y \in \Sigma^*$

$w = xuy \qquad (\beta_1(n, w, x, u, y))$

и

$|u| \geq 1 \qquad (\beta_2(n, w, x, u, y))$

и

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in R$

если

$|w| \geq n \qquad (\alpha(n, w))$

то

$\exists x, u, y \in \Sigma^*$

$w = xuy \qquad (\beta_1(n, w, x, u, y))$

и

$|u| \geq 1 \qquad (\beta_2(n, w, x, u, y))$

и

$\forall k \geq 0 \; (xu^k y \in R) \qquad (\beta_3(n, w, x, u, y))$

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Вспомним лемму о накачке для регулярных языков.

Лемма 1 (pumpimg lemma) о накачке для регулярных языков

Пусть R — регулярный язык. Тогда

$\exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in R$

если

$|w| \geq n \qquad (\alpha(n, w))$

то

$\exists x, u, y \in \Sigma^*$

$w = xuy \qquad (\beta_1(n, w, x, u, y))$

и

$|u| \geq 1 \qquad (\beta_2(n, w, x, u, y))$

и

$\forall k \geq 0 \ (xu^k y \in R) \qquad (\beta_3(n, w, x, u, y))$

$$\varphi = (\exists n \in \mathbb{N})(\forall w \in R)(\alpha \to (\exists x, u, y \in \Sigma^*)(\beta_1 \& \beta_2 \& \beta_3))$$

Следствие 1 из леммы 1 о накачке для доказательства нерегулярности языка

Сформулируем обратное утверждение для леммы о накачке для доказательства нерегулярности языка.

Следствие 1 из леммы 1 о накачке для доказательства нерегулярности языка

Сформулируем обратное утверждение для леммы о накачке для доказательства нерегулярности языка.

Для этого сформулируем отрицание высказывания φ логики предикатов утверждения леммы о накачке.

Следствие 1 из леммы 1 о накачке для доказательства нерегулярности языка

Сформулируем обратное утверждение для леммы о накачке для доказательства нерегулярности языка.

Для этого сформулируем отрицание высказывания φ логики предикатов утверждения леммы о накачке.

Следствие 1 из леммы 1 о накачке для доказательства нерегулярности языка

Сформулируем обратное утверждение для леммы о накачке для доказательства нерегулярности языка.

Для этого сформулируем отрицание высказывания φ логики предикатов утверждения леммы о накачке.

$$\neg\varphi = \neg((\exists n \in \mathbb{N})(\forall w \in R)(\alpha \to (\exists x, u, y \in \Sigma^*)(\beta_1 \& \beta_2 \& \beta_3))) =$$

Следствие 1 из леммы 1 о накачке для доказательства нерегулярности языка

Сформулируем обратное утверждение для леммы о накачке для доказательства нерегулярности языка.

Для этого сформулируем отрицание высказывания φ логики предикатов утверждения леммы о накачке.

$$\neg\varphi = \neg((\exists n \in \mathbb{N})(\forall w \in R)(\alpha \to (\exists x, u, y \in \Sigma^*)(\beta_1 \& \beta_2 \& \beta_3))) =$$

$$= (\forall n \in \mathbb{N})(\exists w \in R)(\alpha \& (\forall x, u, y \in \Sigma^*)(\neg\beta_1 \vee \neg\beta_2 \vee \neg\beta_3)) =$$

Следствие 1 из леммы 1 о накачке для доказательства нерегулярности языка

Сформулируем обратное утверждение для леммы о накачке для доказательства нерегулярности языка.

Для этого сформулируем отрицание высказывания φ логики предикатов утверждения леммы о накачке.

$$\neg\varphi = \neg((\exists n \in \mathbb{N})(\forall w \in R)(\alpha \to (\exists x, u, y \in \Sigma^*)(\beta_1 \& \beta_2 \& \beta_3))) =$$

$$= (\forall n \in \mathbb{N})(\exists w \in R)(\alpha \& (\forall x, u, y \in \Sigma^*)(\neg\beta_1 \vee \neg\beta_2 \vee \neg\beta_3)) =$$

$$= (\forall n \in \mathbb{N})(\exists w \in R)(\alpha \& (\forall x, u, y \in \Sigma^*)(\beta_1 \& \beta_2 \to \neg\beta_3))$$

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

$\forall n \in \mathbb{N}$:

Следствие 1 из леммы 1 о накачке для доказательства того нерегулярности что языка

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

Следствие 1 из леммы 1 о накачке для доказательства того нерегулярности что языка

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y \in \Sigma^*$

Следствие 1 из леммы 1 о накачке для доказательства того нерегулярности что языка

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y \in \Sigma^*$

если

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y \in \Sigma^*$

если

$w = xuy$

Следствие 1 из леммы 1 о накачке для доказательства того нерегулярности что языка

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y \in \Sigma^*$

если

$w = xuy$

и

$|u| \geq 1$

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y \in \Sigma^*$

если

$w = xuy$

и

$|u| \geq 1$

то

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y \in \Sigma^*$

если

$w = xuy$

и

$|u| \geq 1$

то

$\exists k \geq 0 \ (xu^k y \notin L)$.

Следствие 1 из леммы о накачке для доказательства того, что язык не является регулярным

Пусть для языка L выполняется

$\forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y \in \Sigma^*$

если

$w = xuy$

и

$|u| \geq 1$

то

$\exists k \geq 0\ (xu^k y \notin L)$.

Тогда язык L нерегулярный.

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$:

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$:

$w = xuyvz$

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$:

$w = xuyvz$

и

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$:

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$:

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$:

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq m$

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$:

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq m$

и

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$:

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq m$

и

$\forall k \geq 0\ (xu^k yv^k z \in L)$

Лемма 2 (pumpimg lemma) о накачке для КС языков

Теперь сформулируем лемму 2 о накачке для КС языков.

Лемма 2 о накачке для КС языков

Пусть L — КС язык. Тогда

$\exists m \in \mathbb{N}\ \exists n \in \mathbb{N}$:

$\forall w \in L$

если

$|w| \geq n$

то

$\exists x, u, y, v, z \in \Sigma^*$:

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq m$

и

$\forall k \geq 0\ (xu^k yv^k z \in L)$

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Сформулируем обратное утверждение для леммы о накачке для доказательства не контексно-свободности языка по аналогии со следствием 1.

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m\, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

если

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

если

$w = xuyvz$

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

если

$w = xuyvz$

и

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m\, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

если

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

если

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

если

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq m$

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

если

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq m$

то

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m\, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

если

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq m$

то

$\exists k \geq 0\ (xu^k y v^k z \notin L)$.

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Следствие 2 из леммы 2 о накачке для доказательства того, что язык не КС

Пусть для языка L выполняется

$\forall m \, \forall n \in \mathbb{N}$:

$\exists w \in L$

$|w| \geq n$

и

$\forall x, u, y, v, z \in \Sigma^*$

если

$w = xuyvz$

и

$|uv| \geq 1$

и

$|uyv| \leq m$

то

$\exists k \geq 0 \; (xu^k yv^k z \notin L)$.

Тогда язык L не КС.

Доказательсво леммы 2 о накачке для КС языков

- Если L — конечный язык, то возьмем n большее, чем максимальная длина слова в L. Поэтому будем считать, что язык L бесконечен.

Доказательсво леммы 2 о накачке для КС языков

- Если L — конечный язык, то возьмем n большее, чем максимальная длина слова в L. Поэтому будем считать, что язык L бесконечен.
- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, порождающая язык L. Для каждого слова $w \in L$ зафиксируем его наименьшее по высоте дерево T_w вывода и рассмотрим множество
  $A = \{u \in L \mid$ высота дерева T_u не больше $|\Gamma|\ \}$.

Доказательсво леммы 2 о накачке для КС языков

- Если L — конечный язык, то возьмем n большее, чем максимальная длина слова в L. Поэтому будем считать, что язык L бесконечен.
- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, порождающая язык L. Для каждого слова $w \in L$ зафиксируем его наименьшее по высоте дерево T_w вывода и рассмотрим множество $A = \{u \in L \mid \text{ высота дерева } T_u \text{ не больше } |\Gamma| \}$.
- Так как множество A конечно (почему и чем ограничена мощность A?), то возьмем $n = \max\{|u| \mid u \in A\} + 1$,

- **Ответ:** Пусть M — максимальная длина правых частей в правилах вывода в грамматике (т.е. максимальное количество сыновей у внутренних узлов деревьев вывода). Тогда если h — высота произвольного дерева вывода T_u, то по п. (5) утверждения о связи вывода и дерева вывода из лекции 3 длина слова u не больше, чем $N = M^h$, а число слов u таких, что высота дерева T_u не больше h, не больше, чем $|\Sigma|^N$ (почему?). В частности, мощность множества A конечна, и длина каждого слова этого множества не превосходит $M^{|\Gamma|}$.

Доказательсво леммы 2 о накачке для КС языков

- **Ответ:** Пусть M — максимальная длина правых частей в правилах вывода в грамматике (т.е. максимальное количество сыновей у внутренних узлов деревьев вывода). Тогда если h — высота произвольного дерева вывода T_u, то по п. (5) утверждения о связи вывода и дерева вывода из лекции 3 длина слова u не больше, чем $N = M^h$, а число слов u таких, что высота дерева T_u не больше h, не больше, чем $|\Sigma|^N$ (почему?). В частности, мощность множества A конечна, и длина каждого слова этого множества не превосходит $M^{|\Gamma|}$.
- Число $M^{|\Gamma|} + 1$ обозначим через m. Заметим, что число m зависит только от параметров самой грамматики.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Возьмем произвольное слово $w \in L$, $|w| \geq n$, тогда $w \notin A$ и поэтому высота его дерева вывода T_w с минимальной высотой больше $|\Gamma|$ (см.рис 1). Поэтому на самом длинном пути из корня до листа есть хотя бы два узла, помеченных одинаковыми нетерминалами A.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Возьмем произвольное слово $w \in L$, $|w| \geq n$, тогда $w \notin A$ и поэтому высота его дерева вывода T_w с минимальной высотой больше $|\Gamma|$ (см.рис 1). Поэтому на самом длинном пути из корня до листа есть хотя бы два узла, помеченных одинаковыми нетерминалами A.
- Среди всевозможных пар одинаковых нетерминалов на этом пути $S = t_0, t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_s, \ldots, t_m$ выберем два таких узла t_r, t_s, помеченных некотором нетерминалом A, между которыми нет другой пары узлов, помеченных этим одним и тем же нетерминалом. Ясно, что $s > r$.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Возьмем произвольное слово $w \in L$, $|w| \geq n$, тогда $w \notin A$ и поэтому высота его дерева вывода T_w с минимальной высотой больше $|\Gamma|$ (см.рис 1). Поэтому на самом длинном пути из корня до листа есть хотя бы два узла, помеченных одинаковыми нетерминалами A.
- Среди всевозможных пар одинаковых нетерминалов на этом пути $S = t_0, t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_s, \ldots, t_m$ выберем два таких узла t_r, t_s, помеченных некотором нетерминалом A, между которыми нет другой пары узлов, помеченных этим одним и тем же нетерминалом. Ясно, что $s > r$.
- Тогда, очевидно, длина цепочки от $r+1$-го узла до s не превосходит $|\Gamma|$, в противном случае в этой цепочке будут повторяющиеся нетерминалы, чего не может быть. Следовательно, $s - (r+1) + 1 \leq |\Gamma|$, т.е. $s - r \leq |\Gamma| + 1$.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Возьмем произвольное слово $w \in L$, $|w| \geq n$, тогда $w \notin A$ и поэтому высота его дерева вывода T_w с минимальной высотой больше $|\Gamma|$ (см.рис 1). Поэтому на самом длинном пути из корня до листа есть хотя бы два узла, помеченных одинаковыми нетерминалами A.
- Среди всевозможных пар одинаковых нетерминалов на этом пути $S = t_0, t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_s, \ldots, t_m$ выберем два таких узла t_r, t_s, помеченных некотором нетерминалом A, между которыми нет другой пары узлов, помеченных этим одним и тем же нетерминалом. Ясно, что $s > r$.
- Тогда, очевидно, длина цепочки от $r+1$-го узла до s не превосходит $|\Gamma|$, в противном случае в этой цепочке будут повторяющиеся нетерминалы, чего не может быть. Следовательно, $s - (r+1) + 1 \leq |\Gamma|$, т.е. $s - r \leq |\Gamma| + 1$.
- Тогда $A \Rightarrow^* uyv$ — вывод из нетерминала A в узле t_r, $A \Rightarrow^* y$ — вывод из нетерминала A в узле t_s.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Возьмем произвольное слово $w \in L$, $|w| \geq n$, тогда $w \notin A$ и поэтому высота его дерева вывода T_w с минимальной высотой больше $|\Gamma|$ (см.рис 1). Поэтому на самом длинном пути из корня до листа есть хотя бы два узла, помеченных одинаковыми нетерминалами A.
- Среди всевозможных пар одинаковых нетерминалов на этом пути $S = t_0, t_1, \ldots, t_r, \ldots, t_s, \ldots, t_m$ выберем два таких узла t_r, t_s, помеченных некотором нетерминалом A, между которыми нет другой пары узлов, помеченных этим одним и тем же нетерминалом. Ясно, что $s > r$.
- Тогда, очевидно, длина цепочки от $r+1$-го узла до s не превосходит $|\Gamma|$, в противном случае в этой цепочке будут повторяющиеся нетерминалы, чего не может быть. Следовательно, $s - (r+1) + 1 \leq |\Gamma|$, т.е. $s - r \leq |\Gamma| + 1$.
- Тогда $A \Rightarrow^* uyv$ — вывод из нетерминала A в узле t_r, $A \Rightarrow^* y$ — вывод из нетерминала A в узле t_s.
- Имеем разбиение $w = xuyvz$ цепочки w, покажем, что оно искомое.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков) (продолжение)

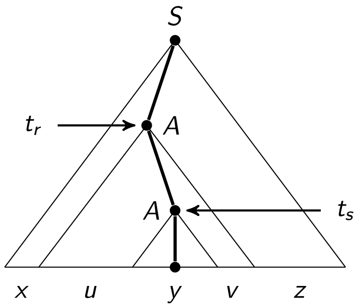

Рис. 1

- Если $u = v = \varepsilon$, то имеем вывод $A \Rightarrow^* A$, тогда данное дерево не является деревом вывода w с минимальной высотой. Значит, $|uv| \geq 1$.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Если $u = v = \varepsilon$, то имеем вывод $A \Rightarrow^* A$, тогда данное дерево не является деревом вывода w с минимальной высотой. Значит, $|uv| \geq 1$.
- Рассмотрим поддерево t_r дерева T_w с корнем в узле r.
  Из $s - r \leq |\Gamma| + 1$ следует, что высота дерева t_r не больше $|\Gamma| + 1$. Тогда $|uyv| \leq M^{|\Gamma|+1} = m$ (это мы обсуждали выше). Значит, $|uyv| \leq m$.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Если $u = v = \varepsilon$, то имеем вывод $A \Rightarrow^* A$, тогда данное дерево не является деревом вывода w с минимальной высотой. Значит, $|uv| \geq 1$.
- Рассмотрим поддерево t_r дерева T_w с корнем в узле r.
  Из $s - r \leq |\Gamma| + 1$ следует, что высота дерева t_r не больше $|\Gamma| + 1$. Тогда $|uyv| \leq M^{|\Gamma|+1} = m$ (это мы обсуждали выше). Значит, $|uyv| \leq m$.
- Имеем $S \Rightarrow^* xAz$, $A \Rightarrow^* uAv$, $A \Rightarrow^* y$ (см. рис.1).

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Если $u = v = \varepsilon$, то имеем вывод $A \Rightarrow^* A$, тогда данное дерево не является деревом вывода w с минимальной высотой. Значит, $|uv| \geq 1$.
- Рассмотрим поддерево t_r дерева T_w с корнем в узле r.
Из $s - r \leq |\Gamma| + 1$ следует, что высота дерева t_r не больше $|\Gamma| + 1$. Тогда $|uyv| \leq M^{|\Gamma|+1} = m$ (это мы обсуждали выше). Значит, $|uyv| \leq m$.
- Имеем $S \Rightarrow^* xAz$, $A \Rightarrow^* uAv$, $A \Rightarrow^* y$ (см. рис.1).
- При $k = 0$ построим вывод $S \Rightarrow^* xAz \Rightarrow^* xyz$, откуда $xyz \in L(G) = L$.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Если $u = v = \varepsilon$, то имеем вывод $A \Rightarrow^* A$, тогда данное дерево не является деревом вывода w с минимальной высотой. Значит, $|uv| \geq 1$.
- Рассмотрим поддерево t_r дерева T_w с корнем в узле r.
  Из $s - r \leq |\Gamma| + 1$ следует, что высота дерева t_r не больше $|\Gamma| + 1$. Тогда $|uyv| \leq M^{|\Gamma|+1} = m$ (это мы обсуждали выше). Значит, $|uyv| \leq m$.
- Имеем $S \Rightarrow^* xAz$, $A \Rightarrow^* uAv$, $A \Rightarrow^* y$ (см. рис.1).
- При $k = 0$ построим вывод $S \Rightarrow^* xAz \Rightarrow^* xyz$, откуда $xyz \in L(G) = L$.
- При $k > 0$ строим вывод $S \Rightarrow^* xAz \Rightarrow^* xuAvz \Rightarrow^* xu^kAv^kz \Rightarrow^* xu^kyv^kz$.
  Откуда $xu^kyv^kz \in L(G) = L$.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Имеем $S \Rightarrow^* xAz$, $A \Rightarrow^* uAv$, $A \Rightarrow^* y$.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Имеем $S \Rightarrow^* xAz$, $A \Rightarrow^* uAv$, $A \Rightarrow^* y$.
- При $k = 0$ построим вывод $S \Rightarrow^* xAz \Rightarrow^* xyz$, откуда $xyz \in L(G) = L$.

Доказательство леммы 2 (о накачке для КС языков)

- Имеем $S \Rightarrow^* xAz$, $A \Rightarrow^* uAv$, $A \Rightarrow^* y$.
- При $k = 0$ построим вывод $S \Rightarrow^* xAz \Rightarrow^* xyz$, откуда $xyz \in L(G) = L$.
- При $k > 0$ строим вывод $S \Rightarrow^* xAz \Rightarrow^* xuAvz \Rightarrow^* xu^kAv^kz \Rightarrow^* xu^kyv^kz$. Откуда $xu^kyv^kz \in L(G) = L$.

Пример 1 **Докажите, что следующий язык не является регулярным**

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

Пример 1 нерегулярного языка

Пример 1 **Докажите, что следующий язык не является регулярным**

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- Вспомним, как мы доказывали нерегулярность языка при помощи следствия 1.

Пример 1 **Докажите, что следующий язык не является регулярным**

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- Вспомним, как мы доказывали нерегулярность языка при помощи следствия 1.
- Докажем, что язык L не КС при помощи следствия 1.

Пример 1 нерегулярного языка

Пример 1 **Докажите, что следующий язык не является регулярным**

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- Вспомним, как мы доказывали нерегулярность языка при помощи следствия 1.
- Докажем, что язык L не КС при помощи следствия 1.
- Возьмем произвольное n. И возьмем $N = n + 1$ и рассмотрим слово $w = a^N b^N \in L$. Очевидно, $|w| \geq n$. Покажем, что это слово является контрпримером.

Пример 1 нерегулярного языка

Пример 1 **Докажите, что следующий язык не является регулярным**

$$L = \{a^n b^n \mid n \geq 0\}$$

- Вспомним, как мы доказывали нерегулярность языка при помощи следствия 1.
- Докажем, что язык L не КС при помощи следствия 1.
- Возьмем произвольное n. И возьмем $N = n + 1$ и рассмотрим слово $w = a^N b^N \in L$. Очевидно, $|w| \geq n$. Покажем, что это слово является контрпримером.
- Разобъем его на три части произвольным образом: $w = xuy$ так, что $|u| \geq 1$. Берем, например, $k = 2$ и рассмотрим следующие случаи.

Пример 1 нерегулярного языка

- **1 случай**. Слово u является произведением степеней двух разных букв, т.е. $u = a^k b^r$, где $k, r \neq 0$, тогда xu^2y содержит подслово $u^2 = a^k b^r a^k b^r$, поэтому $xu^2y \notin L$.

Пример 1 нерегулярного языка

- **1 случай**. Слово u является произведением степеней двух разных букв, т.е. $u = a^k b^r$, где $k, r \neq 0$, тогда xu^2y содержит подслово $u^2 = a^k b^r a^k b^r$, поэтому $xu^2y \notin L$.
- **2 случай**. Слово u является степенью одной буквы. Без ограничения общности, $u = a^l$, $l \neq 0$. Тогда, имеем $x = a^s$, $u = a^l$, $y = a^{N-s-l}b^N$. Тогда для достаточно большого k имеем

$$xu^k y = a^s(a^l)^k a^{N-s-l} b^N$$

Число букв a в этом слове будет равно

$$s + kl + N - s - l = N + (k-1)l > N$$

Следовательно, $xu^k y \notin L$.

Пример 1 нерегулярного языка

- **1 случай**. Слово u является произведением степеней двух разных букв, т.е. $u = a^k b^r$, где $k, r \neq 0$, тогда xu^2y содержит подслово $u^2 = a^k b^r a^k b^r$, поэтому $xu^2y \notin L$.
- **2 случай**. Слово u является степенью одной буквы. Без ограничения общности, $u = a^l$, $l \neq 0$. Тогда, имеем $x = a^s$, $u = a^l$, $y = a^{N-s-l}b^N$. Тогда для достаточно большого k имеем

$$xu^ky = a^s(a^l)^k a^{N-s-l} b^N$$

Число букв a в этом слове будет равно

$$s + kl + N - s - l = N + (k-1)l > N$$

Следовательно, $xu^ky \notin L$.

- Случай, когда $u = b^l$, рассмотреть самостоятельно (упр.).

Пример 1 нерегулярного языка

- **1 случай**. Слово u является произведением степеней двух разных букв, т.е. $u = a^k b^r$, где $k, r \neq 0$, тогда xu^2y содержит подслово $u^2 = a^k b^r a^k b^r$, поэтому $xu^2y \notin L$.
- **2 случай**. Слово u является степенью одной буквы. Без ограничения общности, $u = a^l$, $l \neq 0$. Тогда, имеем $x = a^s$, $u = a^l$, $y = a^{N-s-l}b^N$. Тогда для достаточно большого k имеем

  $$xu^ky = a^s(a^l)^k a^{N-s-l} b^N$$

  Число букв a в этом слове будет равно

  $$s + kl + N - s - l = N + (k-1)l > N$$

  Следовательно, $xu^ky \notin L$.
- Случай, когда $u = b^l$, рассмотреть самостоятельно (упр.).
- Итак, мы рассмотрели все возможные способы разбить слово w на три части и всякий раз получили, что при “накачке” результирующее слово не принадлежит языку L.

Пример 2 не контекстно-свободного языка

Пример 2 **Докажите, что следующий язык не является контекстно-свободным**

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

Пример 2 не контекстно-свободного языка

Пример 2 **Докажите, что следующий язык не является контекстно-свободным**

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

- Докажем, что язык L не КС при помощи следствия 2.

Пример 2 не контекстно-свободного языка

Пример 2 **Докажите, что следующий язык не является контекстно-свободным**

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

- Докажем, что язык L не КС при помощи следствия 2.
- Возьмем произвольные m, n. И возьмем $N = max(m, n) + 1$ и рассмотрим слово $w = a^N b^N c^N \in L$. Очевидно, $|w| \geq n$. Покажем, что это слово является контрпримером.

Пример 2 не контекстно-свободного языка

Пример 2 **Докажите, что следующий язык не является контекстно-свободным**

$$L = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$$

- Докажем, что язык L не КС при помощи следствия 2.
- Возьмем произвольные m, n. И возьмем $N = max(m, n) + 1$ и рассмотрим слово $w = a^N b^N c^N \in L$. Очевидно, $|w| \geq n$. Покажем, что это слово является контрпримером.
- Разобъем его на пять частей произвольным образом: $w = xuyvz$ так, что $|uv| \geq 1$. Берем, например, $k = 2$ и рассмотрим следующие случаи.

Пример 2 не контекстно-свободного языка

- **1 случай**. Слово u или слово v является произведением степеней двух разных букв. Без ограничения общности считаем, что это слово u, т.е. $u = a^l b^r$, где $k, r \neq 0$, тогда xu^2yv^2z содержит подслово $u^2 = a^k b^r a^l b^r$, поэтому $xu^2yv^2z \notin L$.

Пример 2 не контекстно-свободного языка

- **1 случай**. Слово u или слово v является произведением степеней двух разных букв. Без ограничения общности считаем, что это слово u, т.е. $u = a^l b^r$, где $k, r \neq 0$, тогда xu^2yv^2z содержит подслово $u^2 = a^k b^r a^l b^r$, поэтому $xu^2yv^2z \notin L$.
- Слово u и слово v не может является произведением степеней трёх разных букв (почему? указание: посмотреть на длину слова uyv). Поэтому переходим к следующему случаю.

Пример 2 не контекстно-свободного языка

- **3 случай**. Слово u является степенью одной буквы и слово v является степенью одной буквы.

Пример 2 не контекстно-свободного языка

- **3 случай**. Слово u является степенью одной буквы и слово v является степенью одной буквы.
- Вновь, рассматривая длину слова uyv, приходим к выводу, что либо (3.1) слова u и v является степенью одной буквы, либо (3.2) для слова u — степень буквы a, для слова v - степень буквы b, либо (3.3) для слова u — степень буквы b, для слова v - степень буквы c.
- Рассмотрим случай (3.2): $u = a^l, v = b^r$, $l, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $l \neq 0$. Тогда, имеем $x = a^s$, $u = a^l$, $y = a^{N-s-l} b^f$, $v = b^r$, $z = b^{N-f-r} c^N$. Тогда для достаточно большого k имеем

$$xu^k yv^k z = a^s (a^l)^k a^{N-s-l} b^f (b^r)^k b^{N-f-r} c^N$$

Число букв a в этом слове будет равно

$$s + kl + N - s - l = N + (k-1)l > N$$

Следовательно, $xu^k yv^k z \notin L$.

Пример 2 не контекстно-свободного языка

- Остальные подслучаи случая 3 рассмотреть самостоятельно.

Пример 2 не контекстно-свободного языка

- Остальные подслучаи случая 3 рассмотреть самостоятельно.
- Итак, мы рассмотрели все возможные способы разбить слово w на пять частей и всякий раз получили, что при “накачке” результирующее слово не принадлежит языку L.

Следствия о пересечении и дополнении КС языков

Следствие 1

Пересечение КС языков не обязательно будет КС языком.

Следствие 2 (упр.)

Дополнение до КС языка необязательно будет КС языком.

Следствия о пересечении и дополнении КС языков

Следствие 1

Пересечение КС языков не обязательно будет КС языком.

- Рассмотрим языки $L = \{a^k b^n c^n \mid k, n \geq 0\}$, $L_2 = \{a^n b^n c^k \mid k, n \geq 0\}$.

Следствие 2 (упр.)

Дополнение до КС языка необязательно будет КС языком.

Указание. Предположить, что дополнение любого КС языка обязательно является КС языком.

Следствия о пересечении и дополнении КС языков

Следствие 1

Пересечение КС языков не обязательно будет КС языком.

- Рассмотрим языки $L = \{a^k b^n c^n \mid k, n \geq 0\}$, $L_2 = \{a^n b^n c^k \mid k, n \geq 0\}$.
- При этом $L_1 \cap L_2 = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 0\}$ не КС язык

Следствие 2 (упр.)

Дополнение до КС языка необязательно будет КС языком.

Указание. Предположить, что дополнение любого КС языка обязательно является КС языком.

Так как язык $\{a^n b^n | n \geq 0\}$ является КС-языком, то из приведенного примера можно сделать неформальный вывод о том, что контекстно-свободные грамматики не умеют сравнивать количество объектов двух видов, но не трех.