Лингвистические основы информатики
Лекция 8
Вопросы замкнутости класса КС языков относительно регулярных операций

Ю. В. Нагребецкая, И. А. Михайлова

Уральский федеральный университет
Институт естественных наук и математики
Департамент математики, механики и компьютерных наук

Направления: Математика и компьютерные науки
Компьютерная безопасность
(6 семестр)

Подстановки

Пусть Σ, Δ — два (необязательно различных) алфавита.

Подстановки

Пусть Σ, Δ — два (необязательно различных) алфавита.

Из теории автоматов известно, что множества $\mathcal{B}(\Sigma^*)$, $\mathcal{B}(\Delta^*)$, где $\mathcal{B}(\Delta^*)$, $\mathcal{B}(\Sigma^*)$ — булеаны (множества подмножеств) множеств Σ^*, Δ^*, относительно операций $\cdot, \cup$ ($\cup$ часто обозначают как $+$) является ассоциативным (но не коммутативным) кольцом с единицей (какой именно?). Проверить!

Подстановки

Пусть Σ, Δ — два (необязательно различных) алфавита.

Из теории автоматов известно, что множества $\mathcal{B}(\Sigma^*)$, $\mathcal{B}(\Delta^*)$, где $\mathcal{B}(\Delta^*)$, $\mathcal{B}(\Sigma^*)$ — булеаны (множества подмножеств) множеств Σ^*, Δ^*, относительно операций $\cdot, \cup$ ($\cup$ часто обозначают как $+$) является ассоциативным (но не коммутативным) кольцом с единицей (какой именно?). Проверить!

Рассмотрим отображение $\tau\colon \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ (т.е. $\tau(a) = L$ для $a \in \Sigma$ — это язык над алфавитом Δ.)

Подстановки

Пусть Σ, Δ — два (необязательно различных) алфавита.

Из теории автоматов известно, что множества $\mathcal{B}(\Sigma^*)$, $\mathcal{B}(\Delta^*)$, где $\mathcal{B}(\Delta^*)$, $\mathcal{B}(\Sigma^*)$ — булеаны (множества подмножеств) множеств Σ^*, Δ^*, относительно операций $\cdot, \cup$ ($\cup$ часто обозначают как $+$) является ассоциативным (но не коммутативным) кольцом с единицей (какой именно?). Проверить!

Рассмотрим отображение $\tau : \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ (т.е. $\tau(a) = L$ для $a \in \Sigma$ — это язык над алфавитом Δ.)

Оно естественным образом продолжается до гомоморфизма кольца: $\langle \mathcal{B}(\Sigma^*); \cdot, \cup \rangle$ в кольцо $\langle \mathcal{B}(\Delta^*); \cdot, \cup \rangle$ (что такое гомоморфизм?):

Подстановки

Пусть Σ, Δ — два (необязательно различных) алфавита.

Из теории автоматов известно, что множества $\mathcal{B}(\Sigma^*)$, $\mathcal{B}(\Delta^*)$, где $\mathcal{B}(\Delta^*)$, $\mathcal{B}(\Sigma^*)$ — булеаны (множества подмножеств) множеств Σ^*, Δ^*, относительно операций $\cdot, \cup$ ($\cup$ часто обозначают как $+$) является ассоциативным (но не коммутативным) кольцом с единицей (какой именно?). Проверить!

Рассмотрим отображение $\tau \colon \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ (т.е. $\tau(a) = L$ для $a \in \Sigma$ — это язык над алфавитом Δ.)

Оно естественным образом продолжается до гомоморфизма кольца: $\langle \mathcal{B}(\Sigma^*); \cdot, \cup \rangle$ в кольцо $\langle \mathcal{B}(\Delta^*); \cdot, \cup \rangle$ (что такое гомоморфизм?):
для $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$

- $\tau(L_1 L_2) = \tau(L_1)\tau(L_2)$,
- $\tau(L_1 \cup L_2) = \tau(L_1) \cup \tau(L_2)$,

где $\tau(L_i) = \bigcup_{w \in L_i} \tau(w)$, $i \in 1, 2$,

Подстановки

Пусть Σ, Δ — два (необязательно различных) алфавита.

Из теории автоматов известно, что множества $\mathcal{B}(\Sigma^*)$, $\mathcal{B}(\Delta^*)$, где $\mathcal{B}(\Delta^*)$, $\mathcal{B}(\Sigma^*)$ — булеаны (множества подмножеств) множеств Σ^*, Δ^*, относительно операций $\cdot, \cup$ ($\cup$ часто обозначают как $+$) является ассоциативным (но не коммутативным) кольцом с единицей (какой именно?). Проверить!

Рассмотрим отображение $\tau : \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ (т.е. $\tau(a) = L$ для $a \in \Sigma$ — это язык над алфавитом Δ.)

Оно естественным образом продолжается до гомоморфизма кольца: $\langle \mathcal{B}(\Sigma^*); \cdot, \cup \rangle$ в кольцо $\langle \mathcal{B}(\Delta^*); \cdot, \cup \rangle$ (что такое гомоморфизм?):
для $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$

- $\tau(L_1 L_2) = \tau(L_1)\tau(L_2)$,
- $\tau(L_1 \cup L_2) = \tau(L_1) \cup \tau(L_2)$,

где $\tau(L_i) = \bigcup_{w \in L_i} \tau(w)$, $i \in 1, 2$,
и называется подстановкой

Подстановки. Утверждение о подстановке итерации. Пример 1

Утверждение о подстановке итерации (упр.)

$\tau(L^*) = (\tau(L))^*$ для $L \subseteq \Sigma^*$.

Подстановки. Утверждение о подстановке итерации. Пример 1

Утверждение о подстановке итерации (упр.)

$\tau(L^*) = (\tau(L))^*$ для $L \subseteq \Sigma^*$.

Таким образом, τ является гомоморфизмом алгебраической системы $\langle \mathcal{B}(\Sigma^*); \cdot, \cup; {}^* \rangle$ в соответствующую алгебраическую систему $\langle \mathcal{B}(\Delta^*); \cdot, \cup; {}^* \rangle$.

Подстановки. Утверждение о подстановке итерации. Пример 1

Утверждение о подстановке итерации (упр.)

$\tau(L^*) = (\tau(L))^*$ для $L \subseteq \Sigma^*$.

Таким образом, τ является гомоморфизмом алгебраической системы $\langle \mathcal{B}(\Sigma^*); \cdot, \cup; {}^* \rangle$ в соответствующую алгебраическую систему $\langle \mathcal{B}(\Delta^*); \cdot, \cup; {}^* \rangle$.

Пример 1 Пусть $\Sigma = \{a_1, a_2\}$, $L_1, L_2 \subseteq \Delta^*$ и $\tau(a_1) = L_1$, $\tau(a_2) = L_2$ и τ — подстановка. Тогда

- $\tau(a_1 a_2) = \tau(a_1)\tau(a_2) = L_1 L_2$
- $\tau(\{a_1, a_2\}) = \tau(a_1) \cup \tau(a_2) = L_1 \cup L_2$
- $\tau(a_1^*) = L_1^*$

Теорема о подстановке регулярных языков

Так как операции сигнатуры $\langle \mathcal{B}(\Sigma^*); \cdot, \cup; ^* \rangle$ регулярны, из теории автоматов следует (почему?)

Теорема (о подстановке регулярных языков)

Пусть $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, Δ — алфавиты, $\tau \colon \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ — подстановка такая, что $\tau(a_i) = L_i$, $L_i \subseteq \Delta^*$, — регулярные языки для $i \in \{1 \ldots n\}$.

Теорема о подстановке регулярных языков

Так как операции сигнатуры $\langle \mathcal{B}(\Sigma^*); \cdot, \cup; ^* \rangle$ регулярны, из теории автоматов следует (почему?)

Теорема (о подстановке регулярных языков)

Пусть $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, Δ — алфавиты, $\tau\colon \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ — подстановка такая, что $\tau(a_i) = L_i$, $L_i \subseteq \Delta^*$, — регулярные языки для $i \in \{1 \ldots n\}$.
Тогда если $L \subseteq \Sigma^*$ — язык, состоящий из единственного слова из Σ^* (или конечного числа слов), то $\tau(L)$ — регулярный язык.

Теорема о подстановке регулярных языков

Так как операции сигнатуры $\langle \mathcal{B}(\Sigma^*); \cdot, \cup; {}^* \rangle$ регулярны, из теории автоматов следует (почему?)

Теорема (о подстановке регулярных языков)

Пусть $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, Δ — алфавиты, $\tau \colon \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ — подстановка такая, что $\tau(a_i) = L_i$, $L_i \subseteq \Delta^*$, — регулярные языки для $i \in \{1 \ldots n\}$.
Тогда если $L \subseteq \Sigma^*$ — язык, состоящий из единственного слова из Σ^* (или конечного числа слов), то $\tau(L)$ — регулярный язык.

Будет ли это справедливо для бесконечного языка? Если нет, привести контрпример. Вопрос кроется в том, будет ли объединение бесконечного числа регулярных языков регулярным.

Теорема о подстановке регулярных языков

Так как операции сигнатуры $\langle \mathcal{B}(\Sigma^*); \cdot, \cup; {}^* \rangle$ регулярны, из теории автоматов следует (почему?)

Теорема (о подстановке регулярных языков)

Пусть $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, Δ — алфавиты, $\tau \colon \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ — подстановка такая, что $\tau(a_i) = L_i$, $L_i \subseteq \Delta^*$, — регулярные языки для $i \in \{1 \ldots n\}$.
Тогда если $L \subseteq \Sigma^*$ — язык, состоящий из единственного слова из Σ^* (или конечного числа слов), то $\tau(L)$ — регулярный язык.

Будет ли это справедливо для бесконечного языка? Если нет, привести контрпример. Вопрос кроется в том, будет ли объединение бесконечного числа регулярных языков регулярным.

Справедливо более сильное утверждение.

Теоремы о подстановке КС языков

Теорема (о подстановке КС языков)

Пусть $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$, Δ — алфавиты, $\tau \colon \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ — подстановка такая, что $\tau(a_i) = L_i$, $L_i \subseteq \Delta^*$, — КС языки для $i \in \{1 \dots n\}$.

Теоремы о подстановке КС языков

Теорема (о подстановке КС языков)

Пусть $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, Δ — алфавиты, $\tau\colon \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ — подстановка такая, что $\tau(a_i) = L_i$, $L_i \subseteq \Delta^*$, — КС языки для $i \in \{1 \ldots n\}$.
Тогда если $L \subseteq \Sigma^*$ — КС язык, то $\tau(L)$ — КС язык.

Теорема (о подстановке КС языков)

Пусть $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, Δ — алфавиты, $\tau \colon \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ — подстановка такая, что $\tau(a_i) = L_i$, $L_i \subseteq \Delta^*$, — КС языки для $i \in \{1 \ldots n\}$.
Тогда если $L \subseteq \Sigma^*$ — КС язык, то $\tau(L)$ — КС язык.

Доказательство

- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, порождающая язык L, $G_i = (\Gamma_i, \Delta, P_i, S_i)$ — КС грамматики, порождающее язык L_i для $i \in \{1 \ldots n\}$. Будем считать, что все множества нетерминалов $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ попарно не пересекаются.

Теоремы о подстановке КС языков

Теорема (о подстановке КС языков)

Пусть $\Sigma = \{a_1, \dots, a_n\}$, Δ — алфавиты, $\tau : \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ — подстановка такая, что $\tau(a_i) = L_i$, $L_i \subseteq \Delta^*$, — КС языки для $i \in \{1 \dots n\}$.
Тогда если $L \subseteq \Sigma^*$ — КС язык, то $\tau(L)$ — КС язык.

<u>Доказательство</u>

- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, порождающая язык L, $G_i = (\Gamma_i, \Delta, P_i, S_i)$ — КС грамматики, порождающее язык L_i для $i \in \{1 \dots n\}$. Будем считать, что все множества нетерминалов $\Gamma, \Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ попарно не пересекаются.
- Построим грамматику $H = (\overline{\Gamma}, \Delta, \overline{P}, S)$, где $\overline{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i \cup \Gamma$, порождающую язык $\tau(L)$.

Теоремы о подстановке КС языков

Теорема (о подстановке КС языков)

Пусть $\Sigma = \{a_1, \ldots, a_n\}$, Δ — алфавиты, $\tau\colon \Sigma \to \mathcal{B}(\Delta^*)$ — подстановка такая, что $\tau(a_i) = L_i$, $L_i \subseteq \Delta^*$, — КС языки для $i \in \{1 \ldots n\}$.
Тогда если $L \subseteq \Sigma^*$ — КС язык, то $\tau(L)$ — КС язык.

Доказательство

- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС грамматика, порождающая язык L, $G_i = (\Gamma_i, \Delta, P_i, S_i)$ — КС грамматики, порождающее язык L_i для $i \in \{1 \ldots n\}$. Будем считать, что все множества нетерминалов $\Gamma, \Gamma_1, \ldots, \Gamma_n$ попарно не пересекаются.
- Построим грамматику $H = (\overline{\Gamma}, \Delta, \overline{P}, S)$, где $\overline{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i \cup \Gamma$, порождающую язык $\tau(L)$.
- В каждом правиле P грамматики G заменим каждый терминал a_i в правой части правила вывода на аксиому S_i грамматики G_i. Обозначим это множество правил через P', тогда $\overline{P} = \bigcup_{i=1}^{n} P_i \cup P'$.

Теорема об инвариантности КС языков относительно подстановки. Доказательство

- Покажем, что $\tau(L) \subseteq L(H)$.

Теорема об инвариантности КС языков относительно подстановки. Доказательство

- Покажем, что $\tau(L) \subseteq L(H)$.
- Возьмем $w \in \tau(L)$. Так как $\tau(L) = \bigcup_{u \in L} \tau(u)$, то существует $u \in L = L(G)$ такое, что $w \in \tau(u)$. Следовательно, существует вывод $S \Rightarrow_G^* u$.

Теорема об инвариантности КС языков относительно подстановки. Доказательство

- Покажем, что $\tau(L) \subseteq L(H)$.
- Возьмем $w \in \tau(L)$. Так как $\tau(L) = \bigcup_{u \in L} \tau(u)$, то существует $u \in L = L(G)$ такое, что $w \in \tau(u)$. Следовательно, существует вывод $S \Rightarrow_G^* u$.
- Пусть $u = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_m}$. Заменим в выводе $S \Rightarrow_G^* u$ каждый терминал a_i на соответствующую аксиому S_i и получим вывод $S \Rightarrow_H^* S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_m}$.

Теорема об инвариантности КС языков относительно подстановки. Доказательство

- Покажем, что $\tau(L) \subseteq L(H)$.
- Возьмем $w \in \tau(L)$. Так как $\tau(L) = \bigcup_{u \in L} \tau(u)$, то существует $u \in L = L(G)$ такое, что $w \in \tau(u)$. Следовательно, существует вывод $S \Rightarrow_G^* u$.
- Пусть $u = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$. Заменим в выводе $S \Rightarrow_G^* u$ каждый терминал a_i на соответствующую аксиому S_i и получим вывод $S \Rightarrow_H^* S_{i_1} S_{i_2} \ldots S_{i_m}$.
- Так как $w \in \tau(u)$ и $\tau(u) = \tau(a_{i_1})\tau(a_{i_2}) \ldots \tau(a_{i_m})$, то для каждого $j \in \{1 \ldots m\}$ существуют слова $v_{i_j} \in \tau(a_{i_j}) = L_j$ такие, что $w = v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_m}$.

Теорема об инвариантности КС языков относительно подстановки. Доказательство

- Покажем, что $\tau(L) \subseteq L(H)$.
- Возьмем $w \in \tau(L)$. Так как $\tau(L) = \bigcup_{u \in L} \tau(u)$, то существует $u \in L = L(G)$ такое, что $w \in \tau(u)$. Следовательно, существует вывод $S \Rightarrow_G^* u$.
- Пусть $u = a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_m}$. Заменим в выводе $S \Rightarrow_G^* u$ каждый терминал a_i на соответствующую аксиому S_i и получим вывод $S \Rightarrow_H^* S_{i_1} S_{i_2} \ldots S_{i_m}$.
- Так как $w \in \tau(u)$ и $\tau(u) = \tau(a_{i_1})\tau(a_{i_2}) \ldots \tau(a_{i_m})$, то для каждого $j \in \{1 \ldots m\}$ существуют слова $v_{i_j} \in \tau(a_{i_j}) = L_j$ такие, что $w = v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_m}$.
- Тогда существуют выводы $S_{i_j} \Rightarrow_{G_j}^* v_{i_j}$, и, следовательно (см. рис.1),

$$S \Rightarrow_H^* S_{i_1} S_{i_2} \ldots S_{i_m} \Rightarrow_H^* v_{i_1} v_{i_2} \ldots v_{i_m} = w,$$

а это значит, что $w \in L(H)$.

Геометрическая иллюстрация доказательства

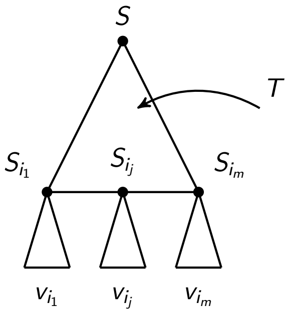


Рис. 1

- Покажем теперь, что $L(H) \subseteq \tau(L)$.
- Пусть $w \in L(H)$, рассмотрим вывод $S \Rightarrow_H^* w$ и соответствующее дерево вывода (см.рис.1).

- Покажем теперь, что $L(H) \subseteq \tau(L)$.
- Пусть $w \in L(H)$, рассмотрим вывод $S \Rightarrow_H^* w$ и соответствующее дерево вывода (см.рис.1).
- По построению множества правил вывода в грамматике H каждый путь от корня S до листа, помеченного терминалом, содержит аксиому S_i одной из грамматик $G_1, \dots, G_n$

- Покажем теперь, что $L(H) \subseteq \tau(L)$.
- Пусть $w \in L(H)$, рассмотрим вывод $S \Rightarrow_H^* w$ и соответствующее дерево вывода (см.рис.1).
- По построению множества правил вывода в грамматике H каждый путь от корня S до листа, помеченного терминалом, содержит аксиому S_i одной из грамматик $G_1, \ldots, G_n$
- В поддереве T дерева вывод происходит только при использовании модифицированных правил P' грамматики G. Рассмотрим это поддерево отдельно и заменим в каждом правиле вывода обратно каждую аксиому S_i на соответствующий терминал a_i и получим $S \Rightarrow_G^* u = a_{i_1} \ldots a_{i_m} \in L(G) = L$.

- Покажем теперь, что $L(H) \subseteq \tau(L)$.
- Пусть $w \in L(H)$, рассмотрим вывод $S \Rightarrow_H^* w$ и соответствующее дерево вывода (см.рис.1).
- По построению множества правил вывода в грамматике H каждый путь от корня S до листа, помеченного терминалом, содержит аксиому S_i одной из грамматик $G_1, \ldots, G_n$
- В поддереве T дерева вывод происходит только при использовании модифицированных правил P' грамматики G. Рассмотрим это поддерево отдельно и заменим в каждом правиле вывода обратно каждую аксиому S_i на соответствующий терминал a_i и получим $S \Rightarrow_G^* u = a_{i_1} \ldots a_{i_m} \in L(G) = L$.
- Рассмотрим поддерево с корнем S_{i_j}. Это поддерево является деревом вывода цепочки v_{i_j} в грамматике G_j, то есть $S_{i_j} \Rightarrow_{G_j}^* v_{i_j} \in L(G_j) = L_j$.

- Покажем теперь, что $L(H) \subseteq \tau(L)$.
- Пусть $w \in L(H)$, рассмотрим вывод $S \Rightarrow_H^* w$ и соответствующее дерево вывода (см.рис.1).
- По построению множества правил вывода в грамматике H каждый путь от корня S до листа, помеченного терминалом, содержит аксиому S_i одной из грамматик $G_1, \ldots, G_n$
- В поддереве T дерева вывод происходит только при использовании модифицированных правил P' грамматики G. Рассмотрим это поддерево отдельно и заменим в каждом правиле вывода обратно каждую аксиому S_i на соответствующий терминал a_i и получим $S \Rightarrow_G^* u = a_{i_1} \ldots a_{i_m} \in L(G) = L$.
- Рассмотрим поддерево с корнем S_{i_j}. Это поддерево является деревом вывода цепочки v_{i_j} в грамматике G_j, то есть $S_{i_j} \Rightarrow_{G_j}^* v_{i_j} \in L(G_j) = L_j$.
- Тогда

$$w = v_{i_1} \ldots v_{i_m} \in L_{i_1} \ldots L_{i_m} = \tau(a_{i_1}) \ldots \tau(a_{i_m}) = \tau(u) \subseteq \tau(L)$$

Следствие 1 из теоремы об инвариантности КС языков относительно подстановки

Из примера 1 и теоремы получим

Следствие 1 (об инвариантности КС языков относительно регулярных операций)

Пусть $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ — КС языки, тогда $L_1 \cup L_2, L_1 L_2, L_i^*$ — тоже КС языки.

Доказательство

Следствие 1 из теоремы об инвариантности КС языков относительно подстановки

Из примера 1 и теоремы получим

Следствие 1 (об инвариантности КС языков относительно регулярных операций)

Пусть $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ — КС языки, тогда $L_1 \cup L_2, L_1 L_2, L_i^*$ — тоже КС языки.

Доказательство

- Приведем построение соответствующих грамматик из доказательства теоремы.

Следствие 1 из теоремы об инвариантности КС языков относительно подстановки

Из примера 1 и теоремы получим

Следствие 1 (об инвариантности КС языков относительно регулярных операций)

Пусть $L_1, L_2 \subseteq \Sigma^*$ — КС языки, тогда $L_1 \cup L_2, L_1 L_2, L_i^*$ — тоже КС языки.

Доказательство

- Приведем построение соответствующих грамматик из доказательства теоремы.
- Пусть $G_1 = (\Gamma_1, \Sigma, P_1, S_1)$, $G_2 = (\Gamma_2, \Sigma, P_2, S_2)$ — КС грамматики, порождающие языки L_1 и L_2 соответственно. Будем считать, что $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$.

Доказательство следствия 1

- Для операции $\cup$ язык $L = \{a_1\} \cup \{a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 \mid a_2\})$ с аксиомой S. Тогда грамматика $H_1 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\})$ с аксиомой S порождает язык $L_1 \cup L_2$.

Доказательство следствия 1

- Для операции $\cup$ язык $L = \{a_1\} \cup \{a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 \mid a_2\})$ с аксиомой S. Тогда грамматика $H_1 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\})$ с аксиомой S порождает язык $L_1 \cup L_2$.
- Для операции $\cdot$ язык $L = \{a_1 a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 a_2\})$. Тогда грамматика $H_2 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$ с аксиомой S порождает $L_1 L_2$.

Доказательство следствия 1

- Для операции $\cup$ язык $L = \{a_1\} \cup \{a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 \mid a_2\})$ с аксиомой S. Тогда грамматика $H_1 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\})$ с аксиомой S порождает язык $L_1 \cup L_2$.
- Для операции $\cdot$ язык $L = \{a_1 a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 a_2\})$. Тогда грамматика $H_2 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$ с аксиомой S порождает $L_1 L_2$.
- Для операции * язык $L = \{a_1\}^*$, грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1\}, \{S \to a_1 S \mid \varepsilon\})$. Тогда грамматика $H_3 = (\Gamma_1, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1 S \mid \varepsilon\})$ с аксиомой S порождает L_1^*. Очевидно, что грамматика H_3 эквивалентна грамматике $H_3' = (\Gamma_1, \Sigma, P_1 \cup \{S_1 \to S_1 S_1 \mid \varepsilon\})$ с аксиомой S_1.

Доказательство следствия 1

- Для операции $\cup$ язык $L = \{a_1\} \cup \{a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 \mid a_2\})$ с аксиомой S. Тогда грамматика $H_1 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\})$ с аксиомой S порождает язык $L_1 \cup L_2$.
- Для операции $\cdot$ язык $L = \{a_1 a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 a_2\})$. Тогда грамматика $H_2 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$ с аксиомой S порождает $L_1 L_2$.
- Для операции * язык $L = \{a_1\}^*$, грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1\}, \{S \to a_1 S \mid \varepsilon\})$. Тогда грамматика $H_3 = (\Gamma_1, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1 S \mid \varepsilon\})$ с аксиомой S порождает L_1^*. Очевидно, что грамматика H_3 эквивалентна грамматике $H_3' = (\Gamma_1, \Sigma, P_1 \cup \{S_1 \to S_1 S_1 \mid \varepsilon\})$ с аксиомой S_1.

Вопросы для рассмотрения в следующих лекциях:

Доказательство следствия 1

- Для операции $\cup$ язык $L = \{a_1\} \cup \{a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 \mid a_2\})$ с аксиомой S. Тогда грамматика $H_1 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\})$ с аксиомой S порождает язык $L_1 \cup L_2$.
- Для операции $\cdot$ язык $L = \{a_1 a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 a_2\})$. Тогда грамматика $H_2 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$ с аксиомой S порождает $L_1 L_2$.
- Для операции * язык $L = \{a_1\}^*$, грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1\}, \{S \to a_1 S \mid \varepsilon\})$. Тогда грамматика $H_3 = (\Gamma_1, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1 S \mid \varepsilon\})$ с аксиомой S порождает L_1^*. Очевидно, что грамматика H_3 эквивалентна грамматике $H_3' = (\Gamma_1, \Sigma, P_1 \cup \{S_1 \to S_1 S_1 \mid \varepsilon\})$ с аксиомой S_1.

Вопросы для рассмотрения в следующих лекциях:

1. Будет ли КС языком пересечение КС языков?

Доказательство следствия 1

- Для операции $\cup$ язык $L = \{a_1\} \cup \{a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 \mid a_2\})$ с аксиомой S. Тогда грамматика $H_1 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 \mid S_2\})$ с аксиомой S порождает язык $L_1 \cup L_2$.
- Для операции $\cdot$ язык $L = \{a_1 a_2\}$, а грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1, a_2\}, \{S \to a_1 a_2\})$. Тогда грамматика $H_2 = (\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1 S_2\})$ с аксиомой S порождает $L_1 L_2$.
- Для операции * язык $L = \{a_1\}^*$, грамматика, его порождающая равна $G = (\{S\}, \{a_1\}, \{S \to a_1 S \mid \varepsilon\})$. Тогда грамматика $H_3 = (\Gamma_1, \Sigma, P_1 \cup \{S \to S_1 S \mid \varepsilon\})$ с аксиомой S порождает L_1^*. Очевидно, что грамматика H_3 эквивалентна грамматике $H_3' = (\Gamma_1, \Sigma, P_1 \cup \{S_1 \to S_1 S_1 \mid \varepsilon\})$ с аксиомой S_1.

Вопросы для рассмотрения в следующих лекциях:

1. Будет ли КС языком пересечение КС языков?
2. Как проверить, что данный язык **не** является КС языком?

Пример 2

Пусть
$G_1 : S_1 \to S_1aAb|AB|ba,\ A \to aBbA|ba,\ B \to aa,$
$G_2 : S_2 \to bS_2aS_2|B|Ab|\varepsilon,\ B \to abBA|a$ —
КС грамматики, порождающие языки L_1 и L_2 соответственно.

Пример 2

Пусть
$G_1 : S_1 \to S_1 aAb|AB|ba, A \to aBbA|ba, B \to aa,$
$G_2 : S_2 \to bS_2 aS_2|B|Ab|\varepsilon, B \to abBA|a$ —
КС грамматики, порождающие языки L_1 и L_2 соответственно.

Тогда грамматика H_1 :
$S \to S_1 \mid S_2,$
$S_1 \to S_1 aAb|AB|ba, A \to aBbA|ba, B \to aa,$
$S_2 \to bS_2 aS_2|B|Ab|\varepsilon, B \to abBA|a$
порождает язык $L_1 \cup L_2$.

Пример 2

Пусть

$G_1 : S_1 \to S_1 aAb|AB|ba, A \to aBbA|ba, B \to aa,$

$G_2 : S_2 \to bS_2 aS_2|B|Ab|\varepsilon, B \to abBA|a$ —

КС грамматики, порождающие языки L_1 и L_2 соответственно.

Тогда грамматика H_1 :

$S \to S_1 \mid S_2,$

$S_1 \to S_1 aAb|AB|ba, A \to aBbA|ba, B \to aa,$

$S_2 \to bS_2 aS_2|B|Ab|\varepsilon, B \to abBA|a$

порождает язык $L_1 \cup L_2$.

Грамматика H_2 :

$S \to S_1 S_2,$

$S_1 \to S_1 aAb|AB|ba, A \to aBbA|ba, B \to aa,$

$S_2 \to bS_2 aS_2|B|Ab|\varepsilon, B \to abBA|a$

порождает язык $L_1 L_2$.

Пример 2 (продолжение)

Грамматика H_3' :
$S_1 \to S_1 S_1 \mid \varepsilon$
$S_1 \to S_1 aAb|AB|ba, A \to aBbA|ba, B \to aa$,
порождает язык L_1^*.

Теорема о пересечении КС и рационального языков

Теорема о пересечении КС и рационального языков

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ — КС язык, $R \subseteq \Sigma^*$ — рациональный язык. Тогда $L \cap R$ — КС язык.

- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС-грамматика в форме Хомского (что это значит и почему так можно считать?), порождающая язык L, $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ — ДКА, распознающий язык R.

Теорема о пересечении КС и рационального языков

Теорема о пересечении КС и рационального языков

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ — КС язык, $R \subseteq \Sigma^*$ — рациональный язык. Тогда $L \cap R$ — КС язык.

- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС-грамматика в форме Хомского (что это значит и почему так можно считать?), порождающая язык L, $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ — ДКА, распознающий язык R.
- Пусть $f \in F$, рассмотрим $R_f = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) = f\}$. Тогда $R = \bigcup_{f \in F} R_f$, откуда $L \cap R = \bigcup_{f \in F}(L \cap R_f)$.

Теорема о пересечении КС и рационального языков

Пусть $L \subseteq \Sigma^*$ — КС язык, $R \subseteq \Sigma^*$ — рациональный язык. Тогда $L \cap R$ — КС язык.

- Пусть $G = (\Gamma, \Sigma, P, S)$ — КС-грамматика в форме Хомского (что это значит и почему так можно считать?), порождающая язык L, $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ — ДКА, распознающий язык R.
- Пусть $f \in F$, рассмотрим $R_f = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(q_0, w) = f\}$. Тогда $R = \bigcup_{f \in F} R_f$, откуда $L \cap R = \bigcup_{f \in F}(L \cap R_f)$.
- Поэтому если доказать, что все $L \cap R_f$ являются КС языками, то и их объединение тоже будет КС. Поэтому без ограничения общности по следствию 1 можно считать, что в автомате $\mathcal{A}$ ровно одно выходное состояние f.

Теорема о пересечении КС и рационального языков. Доказательство

- Построим КС грамматику $H = (\overline{\Gamma}, \Sigma, \overline{P}, \overline{S})$:

Теорема о пересечении КС и рационального языков. Доказательство

- Построим КС грамматику $H = (\overline{\Gamma}, \Sigma, \overline{P}, \overline{S})$:
- $\overline{\Gamma} = Q \times (\Gamma \cup \Sigma) \times Q$,

Докажем, что $L(H) = L \cap R$.

Теорема о пересечении КС и рационального языков. Доказательство

- Построим КС грамматику $H = (\overline{\Gamma}, \Sigma, \overline{P}, \overline{S})$:
- $\overline{\Gamma} = Q \times (\Gamma \cup \Sigma) \times Q$,
- $\overline{S} = (q_0, S, f)$

Докажем, что $L(H) = L \cap R$.

Теорема о пересечении КС и рационального языков. Доказательство

- Построим КС грамматику $H = (\overline{\Gamma}, \Sigma, \overline{P}, \overline{S})$:
- $\overline{\Gamma} = Q \times (\Gamma \cup \Sigma) \times Q$,
- $\overline{S} = (q_0, S, f)$
- Для каждого правила $(A \to Y_1 Y_2) \in P$,
  для любых $A, Y_1, Y_2 \in \Gamma$ и $q, p_1, p_2 \in Q$ добавляем правила
  $(q, A, p_2) \to (q, Y_1, p_1)(p_1, Y_2, p_2)$

Докажем, что $L(H) = L \cap R$.

Теорема о пересечении КС и рационального языков. Доказательство

- Построим КС грамматику $H = (\overline{\Gamma}, \Sigma, \overline{P}, \overline{S})$:
- $\overline{\Gamma} = Q \times (\Gamma \cup \Sigma) \times Q$,
- $\overline{S} = (q_0, S, f)$
- Для каждого правила $(A \to Y_1 Y_2) \in P$,
  для любых $A, Y_1, Y_2 \in \Gamma$ и $q, p_1, p_2 \in Q$ добавляем правила
  $(q, A, p_2) \to (q, Y_1, p_1)(p_1, Y_2, p_2)$
- Для каждого правила $(A \to a) \in P$, $a \in \Sigma$, для всевозможных $q, p \in Q$ добавляем правила $(q, A, p) \to (q, a, p)$

Докажем, что $L(H) = L \cap R$.

Теорема о пересечении КС и рационального языков. Доказательство

- Построим КС грамматику $H = (\overline{\Gamma}, \Sigma, \overline{P}, \overline{S})$:
- $\overline{\Gamma} = Q \times (\Gamma \cup \Sigma) \times Q$,
- $\overline{S} = (q_0, S, f)$
- Для каждого правила $(A \to Y_1 Y_2) \in P$,
  для любых $A, Y_1, Y_2 \in \Gamma$ и $q, p_1, p_2 \in Q$ добавляем правила
  $(q, A, p_2) \to (q, Y_1, p_1)(p_1, Y_2, p_2)$
- Для каждого правила $(A \to a) \in P$, $a \in \Sigma$, для всевозможных $q, p \in Q$ добавляем правила $(q, A, p) \to (q, a, p)$
- Для каждого $a \in \Sigma$ и любых $q, p \in Q$ добавим правило $(q, a, p) \to a$ тогда и только тогда, когда $\delta(q, a) = p$ в автомате $\mathcal{A}$.

Докажем, что $L(H) = L \cap R$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$

- Покажем сначала, что $L \cap R \subseteq L(H)$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$

- Покажем сначала, что $L \cap R \subseteq L(H)$.
- Пусть $w \in L \cap R$, тогда $\delta(q_0, w) = f$ и существует вывод

$$S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_i \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w$$

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$

- Покажем сначала, что $L \cap R \subseteq L(H)$.
- Пусть $w \in L \cap R$, тогда $\delta(q_0, w) = f$ и существует вывод

$$S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_i \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w$$

- Если $n = 1$, т.е $\alpha_1 = \alpha_n = a$, то $a \in L \cap R$ и поэтому $S \Rightarrow a$ и $\delta(q_0, a) = f$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$

- Покажем сначала, что $L \cap R \subseteq L(H)$.
- Пусть $w \in L \cap R$, тогда $\delta(q_0, w) = f$ и существует вывод

$$S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_i \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w$$

- Если $n = 1$, т.е $\alpha_1 = \alpha_n = a$, то $a \in L \cap R$ и поэтому $S \Rightarrow a$ и $\delta(q_0, a) = f$.
- И, значит, по определению грамматики H, для любых $p, q \in Q$ в ней есть правила $(q, S, p) \to (q, a, p)$ и $(q_0, a, f) \to a$, и следовательно, есть вывод

$$(q_0, S, f) \Rightarrow_H (q_0, a, f) \Rightarrow_H a = w$$

Следовательно, $w \in L(H)$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$

- Покажем сначала, что $L \cap R \subseteq L(H)$.
- Пусть $w \in L \cap R$, тогда $\delta(q_0, w) = f$ и существует вывод

$$S \Rightarrow \alpha_1 \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_i \Rightarrow \ldots \Rightarrow \alpha_n = w$$

- Если $n = 1$, т.е $\alpha_1 = \alpha_n = a$, то $a \in L \cap R$ и поэтому $S \Rightarrow a$ и $\delta(q_0, a) = f$.
- И, значит, по определению грамматики H, для любых $p, q \in Q$ в ней есть правила $(q, S, p) \to (q, a, p)$ и $(q_0, a, f) \to a$, и следовательно, есть вывод

$$(q_0, S, f) \Rightarrow_H (q_0, a, f) \Rightarrow_H a = w$$

  Следовательно, $w \in L(H)$.
- Поэтому считаем, что $n > 1$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$ (продолжение)

- Пусть $\alpha_i = x_1 x_2 \dots x_k$ для некоторых $x_1, x_2, \dots, x_k \in \Gamma \cup \Sigma$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$ (продолжение)

- Пусть $\alpha_i = x_1 x_2 \ldots x_k$ для некоторых $x_1, x_2, \ldots, x_k \in \Gamma \cup \Sigma$.
- Докажем индукцией по i, что существуют $t_1, t_2, \ldots, t_{k-1} \in Q$

$$(q_0, S, f) \Rightarrow_H^* (q_0, x_1, t_1)(t_1, x_2, t_2)(t_2, x_3, t_3) \ldots (t_{k-1}, x_k, f)$$

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$ (продолжение)

- Пусть $\alpha_i = x_1 x_2 \dots x_k$ для некоторых $x_1, x_2, \dots, x_k \in \Gamma \cup \Sigma$.
- Докажем индукцией по i, что существуют $t_1, t_2, \dots, t_{k-1} \in Q$

$$(q_0, S, f) \Rightarrow_H^* (q_0, x_1, t_1)(t_1, x_2, t_2)(t_2, x_3, t_3) \dots (t_{k-1}, x_k, f)$$

- Пусть

$$\alpha_i = \gamma_1 B \gamma_2 = x_1 x_2 \dots x_{m-1} B x_{m+1} x_{m+2} \dots x_k, \text{ где } x_m = B$$

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$ (продолжение)

- Пусть $\alpha_i = x_1 x_2 \dots x_k$ для некоторых $x_1, x_2, \dots, x_k \in \Gamma \cup \Sigma$.
- Докажем индукцией по i, что существуют $t_1, t_2, \dots, t_{k-1} \in Q$

$$(q_0, S, f) \Rightarrow_H^* (q_0, x_1, t_1)(t_1, x_2, t_2)(t_2, x_3, t_3) \dots (t_{k-1}, x_k, f)$$

- Пусть

$$\alpha_i = \gamma_1 B \gamma_2 = x_1 x_2 \dots x_{m-1} B x_{m+1} x_{m+2} \dots x_k, \text{ где } x_m = B$$

- Тогда

$$\alpha_{i+1} = \gamma_1 \beta \gamma_2 = x_1 x_2 \dots x_{m-1} \beta x_{m+1} x_{m+2} \dots x_k, \text{ где } (B \to \beta) \in P$$

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$ (продолжение)

- По предположению индукции и определению грамматики H существуют $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_k \in Q$ такие, что существует вывод
  $(q_0, S, f) \Rightarrow_H^*$
  $(q_0, x_1, t_1)(t_1, x_2, t_2) \ldots (t_{m-1}, x_m, t_m)(t_m, B, t_{m+1})$
  $(t_{m+1}, x_{m+1}, t_{m+2})(t_{m+2}, x_{m+2}, t_{m+3}) \ldots (t_{k-1}, x_k, f)$

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$ (продолжение)

- По предположению индукции и определению грамматики H существуют $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_k \in Q$ такие, что существует вывод
  $(q_0, S, f) \Rightarrow_H^*$
  $(q_0, x_1, t_1)(t_1, x_2, t_2) \ldots (t_{m-1}, x_m, t_m)(t_m, B, t_{m+1})$
  $(t_{m+1}, x_{m+1}, t_{m+2})(t_{m+2}, x_{m+2}, t_{m+3}) \ldots (t_{k-1}, x_k, f)$
- Так как грамматика G в форме Хомского, возможны два случая:
  (1) $\beta = Y_1 Y_2$ для $Y_1, Y_2 \in \Gamma$, т.е.

$$\alpha_{i+1} = x_1 x_2 \ldots x_{m-1} Y_1 Y_2 x_{m+1} x_{m+2} \ldots x_k;$$

  (2) $\beta = a$ для $a \in \Sigma$, т.е.

$$\alpha_{i+1} = x_1 x_2 \ldots x_{m-1} a x_{m+1} x_{m+2} \ldots x_k$$

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$ (продолжение). Случай 1

- Рассмотрим случай (1).
  Тогда по определению грамматики H для любого $r \in Q$ в этой грамматике существуют правила $(t_m, B, t_{m+1}) \to (t_{m+1}, Y_1, r)(r, Y_2, t_{m+1})$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$ (продолжение). Случай 1

- Рассмотрим случай (1).
  Тогда по определению грамматики H для любого $r \in Q$ в этой грамматике существуют правила $(t_m, B, t_{m+1}) \to (t_{m+1}, Y_1, r)(r, Y_2, t_{m+1})$.
- Следовательно, в ней существует вывод
  $(q_0, S, f) \Rightarrow_H^*$
  $(q_0, x_1, t_1)(t_1, x_2, t_2) \dots (t_{m-1}, x_{m-1}, t_m)(t_m, Y_1, r)(r, Y_2, t_{m+1})$
  $(t_{m+1}, x_{m+1}, t_{m+2})(t_{m+2}, x_{m+2}, t_{m+3}) \dots (t_{k-1}, x_k, f)$; что и требовалось доказать для данного случая.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$ (продолжение). Случай 2

- Рассмотрим случай (2).
  Тогда по определению грамматики H для любого $t_{m+1} \in Q$ в этой грамматике существуют правила $(t_m, B, t_{m+1}) \to (t_{m+1}, a, t_{m+1})$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L \cap R \subseteq L(H)$ (продолжение). Случай 2

- Рассмотрим случай (2).
  Тогда по определению грамматики H для любого $t_{m+1} \in Q$ в этой грамматике существуют правила $(t_m, B, t_{m+1}) \to (t_{m+1}, a, t_{m+1})$.
- Следовательно, в ней существует вывод
  $(q_0, S, f) \Rightarrow_H^*$
  $(q_0, x_1, t_1)(t_1, x_2, t_2) \ldots (t_{m-1}, x_{m-1}, t_m)(t_m, a, t_{m+1})$
  $(t_{m+1}, x_{m+1}, t_{m+2})(t_{m+2}, x_{m+2}, t_{m+3}) \ldots (t_{k-1}, x_k, f)$; что и требовалось.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L(H) \subseteq L \cap R$

- Теперь докажем, что $L(H) \subseteq L \cap R$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L(H) \subseteq L \cap R$

- Теперь докажем, что $L(H) \subseteq L \cap R$.
- Обратно, пусть $w = a_1 \dots a_n \in L(H)$, тогда существует вывод $(q_0, S, f) \Rightarrow_H^* w$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L(H) \subseteq L \cap R$

- Теперь докажем, что $L(H) \subseteq L \cap R$.
- Обратно, пусть $w = a_1 \dots a_n \in L(H)$, тогда существует вывод $(q_0, S, f) \Rightarrow_H^* w$.
- Рассмотрим дерево вывода T_H цепочки w в грамматике H (см. рис.2). По определению грамматики H отцом каждого узла a_i, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, этого дерева является узел (q_{i-1}, a_i, q_i), причем $\delta(q_{i-1}, a_i) = q_i$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L(H) \subseteq L \cap R$

- Теперь докажем, что $L(H) \subseteq L \cap R$.
- Обратно, пусть $w = a_1 \ldots a_n \in L(H)$, тогда существует вывод $(q_0, S, f) \Rightarrow_H^* w$.
- Рассмотрим дерево вывода T_H цепочки w в грамматике H (см. рис.2). По определению грамматики H отцом каждого узла a_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, этого дерева является узел (q_{i-1}, a_i, q_i), причем $\delta(q_{i-1}, a_i) = q_i$.
- С одной стороны, имеем $\delta(q_0, a_1) = q_1$, $\delta(q_1, a_2) = q_2, \ldots$, $\delta(q_{n-1}, a_n) = f$ (см.рис.2). Следовательно, $w \in R = L(\mathcal{A})$.

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L(H) \subseteq L \cap R$. Иллюстрация

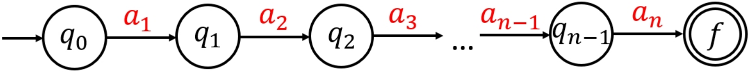


Рис. 2

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L(H) \subseteq L \cap R$

- С другой стороны, "оборвем"все листья $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в дереве T_H вывода цепочки w в грамматике H (см. рис.3), получим дерево T'_H вывода цепочки
$$\bar{w} = (q_0, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2)\ldots(q_{n-1}, a_n, f),$$
состоящее только из нетерминалов грамматики H (см. рис.4).

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L(H) \subseteq L \cap R$

- С другой стороны, "оборвем"все листья $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в дереве T_H вывода цепочки w в грамматике H (см. рис.3), получим дерево T'_H вывода цепочки
$$\bar{w} = (q_0, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2) \ldots (q_{n-1}, a_n, f),$$
состоящее только из нетерминалов грамматики H (см. рис.4).
- Значит, у нас есть вывод
$$(q_0, S, f) \Rightarrow^*_H (q_0, a_1, q_1) \ldots (q_{n-1}, a_n, f) \Rightarrow^*_H a_1 \ldots a_n = w$$
и, кроме того, $\delta(q_{i-1}, a_i) = q_i$.
- Если дереве T'_H у всех нетерминалов-троек (p, A, q) грамматики H отбросить первую и третью компоненту (состояния автомата $\mathcal{A}$), то получится дерево T_G вывода цепочки $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ в грамматике G (см. рис.5), откуда $w \in L$.

- С другой стороны, "оборвем"все листья $a_1, a_2, \ldots, a_n$ в дереве T_H вывода цепочки w в грамматике H (см. рис.3), получим дерево T'_H вывода цепочки
$$\bar{w} = (q_0, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2) \ldots (q_{n-1}, a_n, f),$$
состоящее только из нетерминалов грамматики H (см. рис.4).
- Значит, у нас есть вывод
$$(q_0, S, f) \Rightarrow^*_H (q_0, a_1, q_1) \ldots (q_{n-1}, a_n, f) \Rightarrow^*_H a_1 \ldots a_n = w$$
и, кроме того, $\delta(q_{i-1}, a_i) = q_i$.
- Если дереве T'_H у всех нетерминалов-троек (p, A, q) грамматики H отбросить первую и третью компоненту (состояния автомата $\mathcal{A}$), то получится дерево T_G вывода цепочки $w = a_1 a_2 \ldots a_n$ в грамматике G (см. рис.5), откуда $w \in L$.
- Таким образом, $w \in L \cap R$.

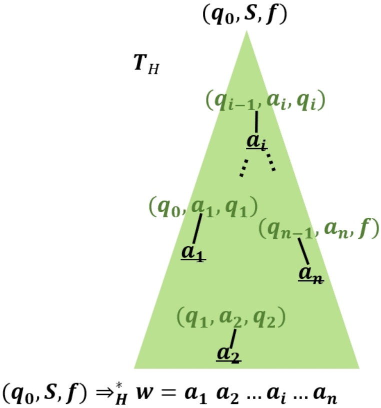
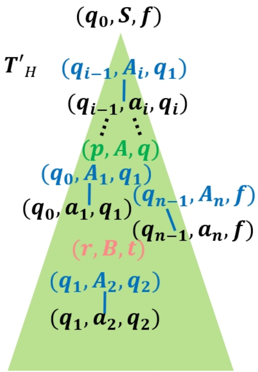

(q_0, S, f)
T_H
(q_{i-1}, a_i, q_i)
a_i
(q_0, a_1, q_1)
a_1
(q_{n-1}, a_n, f)
a_n
(q_1, a_2, q_2)
a_2
$(q_0, S, f) \Rightarrow_H^* w = a_1\ a_2 \ldots a_i \ldots a_n$

Рис. 3

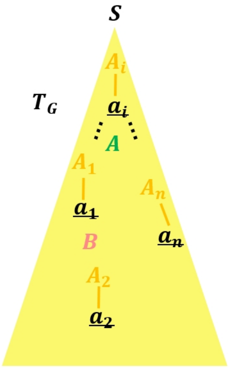
Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L(H) \subseteq L \cap R$. Иллюстрация



$$(q_0, S, f) \Rightarrow_H^* \overline{w} = (q_0, a_1, q_1)(q_1, a_2, q_2) \dots (q_{i-1}, a_2, q_i) \dots (q_{n-1}, a_n, f)$$

Рис. 4

Пересечение КС и рационального языков. Доказательство $L(H) \subseteq L \cap R$. Иллюстрация



$$S \Rightarrow_G^* w = a_1 a_2 \dots a_i \dots a_n$$

Рис. 5

Пример 3

Пример 3

- Пусть $\Sigma = \{a, b\}$.

Пример 3

- Пусть $\Sigma = \{a, b\}$.
- Вспомним автомат $\mathcal{A}$ (с единственной заключительной вершиной) из лекции 2, распознающий язык R всех слов над алфавитом $\{a, b\}$, в которых число букв b делится на 3 (см. рис.6).

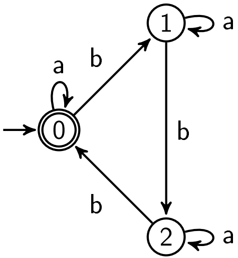


Рис. 6

Пример 3 (продолжение)

- И рассмотрим одну из видоизмененных грамматик из лекции 1

$$S \to aSb \mid ab$$

распознающих язык $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

Пример 3 (продолжение)

- И рассмотрим одну из видоизмененных грамматик из лекции 1
$$S \to aSb \mid ab$$
распознающих язык $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
- Она ε-свободна, ациклична. Приведем ее к форме Хомского по алгоритму из лекции 6:
$$\begin{aligned} S &\to C_a S C_b \mid C_a C_b \\ C_a &\to a \\ C_b &\to b \end{aligned}$$

Пример 3 (продолжение)

- И рассмотрим одну из видоизмененных грамматик из лекции 1

$$S \to aSb \mid ab$$

  распознающих язык $L = \{a^n b^n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

- Она ε-свободна, ациклична. Приведем ее к форме Хомского по алгоритму из лекции 6:

$$S \to C_a S C_b \mid C_a C_b$$
$$C_a \to a$$
$$C_b \to b$$

- Получим грамматику G в форме Хомского

$$S \to C_a D \mid C_a C_b$$
$$D \to S C_b$$
$$C_a \to a$$
$$C_b \to b$$

Пример 3 (построение грамматики H)

- $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{S, C_a, C_b, D\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$, $q_0 = 0$, $f = 2$.

Пример 3 (построение грамматики H)

- $\Sigma = \{a, b\}$, $\Gamma = \{S, C_a, C_b, D\}$, $Q = \{0, 1, 2\}$, $q_0 = 0$, $f = 2$.
- Построим грамматику $H = (\overline{\Gamma}, \Sigma, \overline{P}, \overline{S})$, распознающую язык $L \cap R$ как при доказательстве теоремы о пересечении КС и рационального языка:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\Gamma} = Q \times (\Gamma \cup \Sigma) \times Q = \\
&\{(0, S, 0), (0, S, 1), (0, S, 2) \\
&(1, S, 0), (1, S, 1), (1, S, 2) \\
&(2, S, 0), (2, S, 1), (2, S, 2) \\
&(0, C_a, 0), (0, C_a, 1), (0, C_a, 2) \\
&(1, C_a, 0), (1, C_a, 1), (1, C_a, 2) \\
&(2, C_a, 0), (2, C_a, 1), (2, C_a, 2) \\
&(0, C_b, 0), (0, C_b, 1), (0, C_b, 2) \\
&(1, C_b, 0), (1, C_b, 1), (1, C_b, 2) \\
&(2, C_b, 0), (2, C_b, 1), (2, C_b, 2) \\
&(0, D, 0), (0, D, 1), (0, D, 2) \\
&(1, D, 0), (1, D, 1), (1, D, 2) \\
&(2, D, 0), (2, D, 1), (2, D, 2)\}
\end{aligned}
$$

Пример 3 (построение грамматики H (продолжение))

- $\overline{S} = (q_0, S, f) = (0, S, 0)$

Пример 3 (построение грамматики H (продолжение))

- $\overline{S} = (q_0, S, f) = (0, S, 0)$
- Для каждого правила $(A \to Y_1 Y_2) \in P$,
  для любых $A, Y_1, Y_2 \in \Gamma$ и $q, p_1, p_2 \in Q$ добавляем правила
  $(q, A, p_2) \to (q, Y_1, p_1)(p_1, Y_2, p_2)$.
  Мы не будем выписывать все правила $(A \to Y_1 Y_2) \in P$, напишем только для одного правила $S \to C_a D$:

$$(0, S, 0) \to (0, C_a, 0)(0, D, 0), \quad (0, S, 0) \to (0, C_a, 1)(1, D, 0)$$

$$(1, S, 0) \to (1, C_a, 0)(0, D, 0), \quad (1, S, 0) \to (1, C_a, 1)(1, D, 0)$$

$$(2, S, 0) \to (2, C_a, 0)(0, D, 0), \quad (2, S, 0) \to (2, C_a, 1)(1, D, 0)$$

$$(0, S, 1) \to (0, C_a, 0)(0, D, 1), \quad (0, S, 1) \to (0, C_a, 1)(1, D, 1)$$

$$(1, S, 1) \to (1, C_a, 0)(0, D, 1), \quad (1, S, 1) \to (1, C_a, 1)(1, D, 1)$$

$$(2, S, 1) \to (2, C_a, 0)(0, D, 1), \quad (2, S, 1) \to (2, C_a, 1)(1, D, 1)$$

Пример 3 (построение грамматики H (продолжение))

$$(0, S, 0) \to (0, C_a, 2)(2, D, 0)$$

$$(1, S, 0) \to (1, C_a, 2)(2, D, 0)$$

$$(2, S, 0) \to (2, C_a, 2)(2, D, 0)$$

$$(0, S, 1) \to (0, C_a, 2)(2, D, 1)$$

$$(1, S, 1) \to (1, C_a, 2)(2, D, 1)$$

$$(2, S, 1) \to (2, C_a, 2)(2, D, 1)$$

Пример 3 (построение грамматики H (продолжение))

- Для каждого $a \in \Sigma$ и любых $q, p \in Q$ добавим правило $(q, a, p) \to a$ тогда и только тогда, когда $\delta(q, a) = p$ в автомате $\mathcal{A}$.

Пример 3 (построение грамматики H (продолжение))

- Для каждого $a \in \Sigma$ и любых $q, p \in Q$ добавим правило $(q, a, p) \to a$ тогда и только тогда, когда $\delta(q, a) = p$ в автомате $\mathcal{A}$.
- Выпишем для правила $(q, a, p) \to a$, учитывая что $\delta(0, a) = 0$, $\delta(1, a) = 1$, $\delta(2, a) = 2$:

$$
\begin{aligned}
(0, a, 0) &\to a \\
(1, a, 1) &\to a \\
(2, a, 2) &\to a
\end{aligned}
$$

Пример 3 (построение грамматики H (продолжение))

- Для каждого $a \in \Sigma$ и любых $q, p \in Q$ добавим правило $(q, a, p) \to a$ тогда и только тогда, когда $\delta(q, a) = p$ в автомате $\mathcal{A}$.
- Выпишем для правила $(q, a, p) \to a$, учитывая что $\delta(0, a) = 0$, $\delta(1, a) = 1$, $\delta(2, a) = 2$:

$$(0, a, 0) \to a$$
$$(1, a, 1) \to a$$
$$(2, a, 2) \to a$$

- Выпишем для правила $(q, b, p) \to b$, учитывая что $\delta(0, b) = 1$, $\delta(1, b) = 2$, $\delta(2, b) = 0$:

$$(0, b, 1) \to b$$
$$(1, b, 2) \to b$$
$$(2, b, 0) \to b$$

Пример 3 (вывод цепочки $w = a^3b^3$)

- Рассмотрим цепочку $w = a^3b^3 \in L \cap R$.

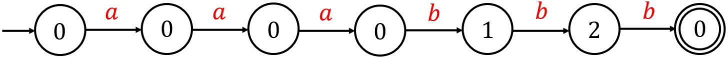


Рис. 7

Пример 3 (вывод цепочки $w = a^3b^3$)

- Рассмотрим цепочку $w = a^3b^3 \in L \cap R$.
- На рис.8 изображен путь в автомате $\mathcal{A}$:

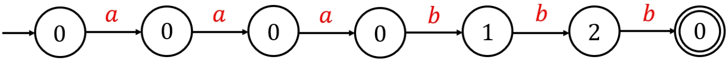


Рис. 7

Пример 3 (вывод цепочки $w = a^3b^3$)

- Рассмотрим цепочку $w = a^3b^3 \in L \cap R$.
- На рис.8 изображен путь в автомате $\mathcal{A}$:

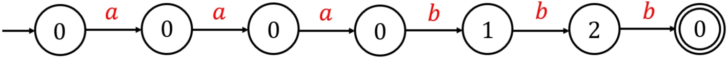


Рис. 7

- Теперь рассмотрим дерево вывода T_G этой цепочки w в грамматике G (рис. 8).

Пример 3 (вывод цепочки $w = a^3b^3$)

- Рассмотрим цепочку $w = a^3b^3 \in L \cap R$.
- На рис.8 изображен путь в автомате $\mathcal{A}$:

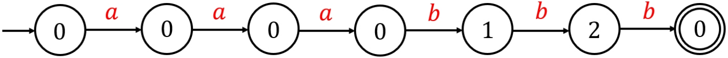


Рис. 7

- Теперь рассмотрим дерево вывода T_G этой цепочки w в грамматике G (рис. 8).
- Далее рассмотрим как строится дерево T_H вывода цепочки w в грамматике (рис. 9-12). Видно, что оно строится неоднозначно.

Пример 3 (вывод цепочки $w = a^3b^3$)

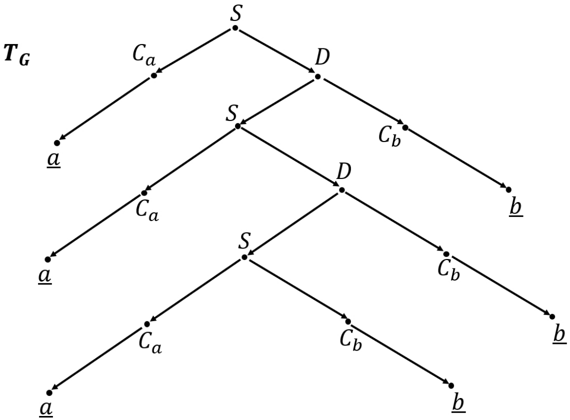


Рис. 8

Пример 3 (вывод цепочки $w = a^3b^3$)

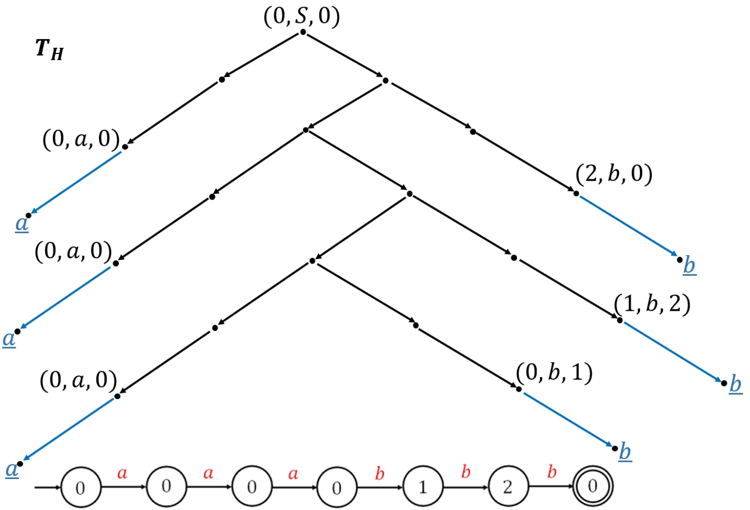


Рис. 9

Пример 3 (вывод цепочки $w = a^3b^3$)

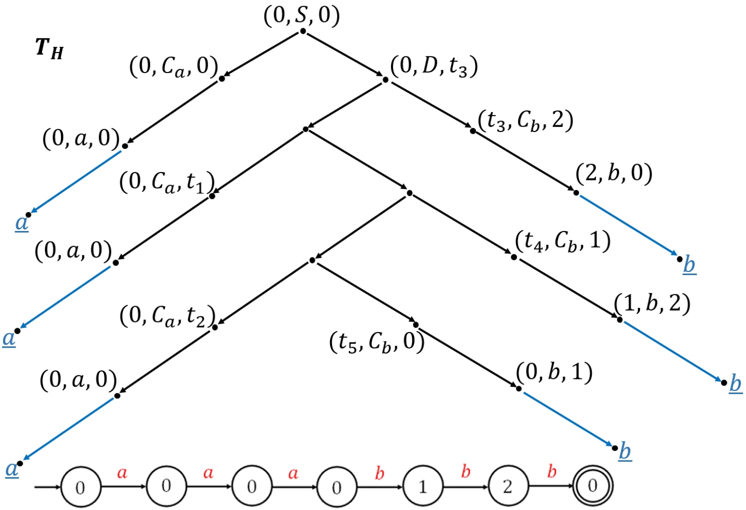


Рис. 10

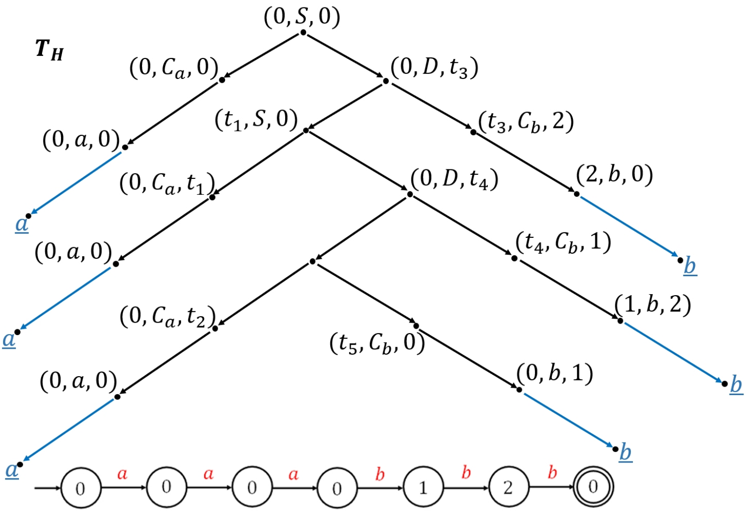

T_H
(0, S, 0)
(0, C_a, 0)
(0, D, t_3)
(0, a, 0)
(t_1, S, 0)
(t_3, C_b, 2)
a
(0, C_a, t_1)
(0, D, t_4)
(2, b, 0)
(0, a, 0)
(t_4, C_b, 1)
b
a
(1, b, 2)
(0, C_a, t_2)
(t_5, C_b, 0)
(0, a, 0)
(0, b, 1)
b
b
a
0 a 0 a 0 a 0 b 1 b 2 b 0

Рис. 11

Пример 3 (вывод цепочки $w = a^3b^3$)

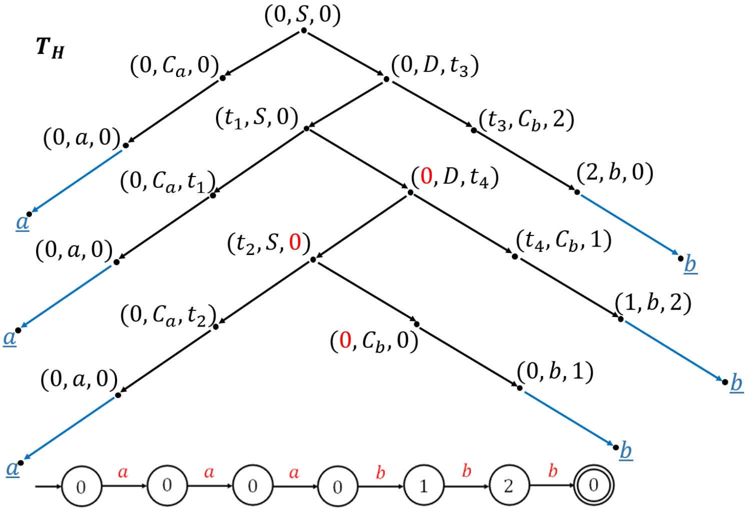


Рис. 12